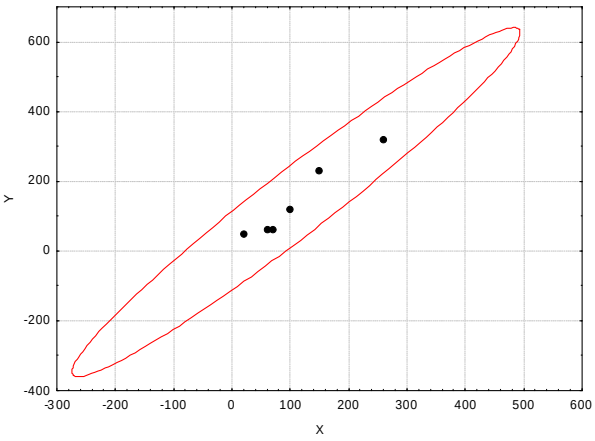
# Cvičení 8.: Jednoduchá lineární regrese

**Vzorový příklad:** U šesti obchodníků byla zjišťována poptávka po určitém druhu zboží loni (veličina X - v kusech) a letos (veličina Y - v kusech).

| číslo. obchodníka | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| poptávka loni (X) | 20 | 60 | 70 | 100 | 150 | 260 |
| poptávka letos (Y) | 50 | 60 | 60 | 120 | 230 | 320 |

a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Načteme datový soubor obchodnici.sta se dvěma proměnnými X a Y a 6 případy:
Zobrazíme dvourozměrný tečkový diagram s proloženou elipsou 95% konstantní hustoty pravděpodobnosti, s jehož pomocí posoudíme dvourozměrnou normalitu dat: Grafy – Bodové grafy – vypneme Typ proložení – Proměnné X, Y - OK . Na záložce Detaily vybereme Elipsa Normální – OK. Ve vzniklém dvourozměrném tečkovém diagramu změníme rozsah zobrazených hodnot na vodorovné a svislé ose, abychom viděli celou elipsu




Ze vzhledu diagramu je patrné, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný a že mezi loňskou a letošní poptávkou existuje vcelku silná přímá lineární závislost.

Testování hypotézy o nezávislosti: Statistika – Základní statistiky /Tabulky - Korelační matice – OK – 2 seznamy proměnných X, Y, OK. Na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Souhrn.

| Prom. X & prom. Y | Korelace (obchodnici.sta)<br>Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000<br>(Celé případy vynechány u ChD)<br>Průměr | Sm.Odch. | r(X,Y) | r2 | t | p | N | Konst. záv.: Y | Směr. záv: Y | Konst. záv.: X | Směrnic záv.: X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 110,0000 | 85,3229 | | | | | | | | | |
| Y | 140,0000 | 111,1755 | 0,971977 | 0,944739 | 8,269474 | 0,001167 | 6 | 0,686813 | 1,266484 | 5,566343 | 0,745955 |

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu výběrového korelačního koeficientu $R_{12}$ (r = 0,971977, tzn. že mezi X a Y existuje velmi silná přímá lineární závislost), realizaci testové statistiky t = 8,269474 a p-hodnotu pro test hypotézy o nezávislosti (p = 0,001167, $H_0$ tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05).

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná Y, nezávisle proměnná X - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

| N=6 | Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (obchodnici.sta)<br>R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415<br>F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | b* | Sm.chyba z b* | b | Sm.chyba z b | t(4) | p-hodn. |
| Abs.člen | | | 0,686813 | 20,64236 | 0,033272 | 0,975052 |
| X | 0,971977 | 0,117538 | 1,266484 | 0,15315 | 8,269474 | 0,001167 |

Ve výstupní tabulce najdeme koeficient $b_0$ ve sloupci B na řádku označeném Abs. člen, koeficient $b_1$ ve sloupci B na řádku označeném X. Rovnice regresní přímky:
$y = 0{,}686813 + 1{,}266484\ x$.
Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,6868 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,665 kusů.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

Vrátíme se do Výsledky – vícenásobná regrese – Detailní výsledky – ANOVA.

| Efekt | Analýza rozptylu (obchodnici.sta) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Součet čtverců | sv | Průměr čtverců | F | p-hodn. |
| Regres. | 58384,89 | 1 | 58384,89 | 68,38420 | 0,001167 |
| Rezid. | 3415,11 | 4 | 853,78 | | |
| Celk. | 61800,00 | | | | |

Odhad rozptylu najdeme na řádku Rezid., ve sloupci Průměr čtverců, tedy $s^2 = 853{,}78$.
Index determinace je uveden v záhlaví původní výstupní tabulky pod označením R2. V našem případě $ID^2 = 0{,}9447$, tedy variabilita letošní poptávky je z 94,5% vysvětlena regresní přímkou.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.

Ve výstupní tabulce výsledků regrese přidáme za proměnnou Úroveň p dvě nové proměnné dm (pro dolní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry) a hm (pro horní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry). Do Dlouhého jména proměnné dm resp. hm napíšeme: =v3-v4*VStudent(0,975;4) resp. =v3+v4*VStudent(0,975;4)

| N=6 | Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (obchodnici.sta)<br>R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415<br>F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | b* | Sm.chyba z b* | b | Sm.chyba z b | t(4) | p-hodn. | dm =v3-v4*VSt | hm =v3+v4*VSt |
| Abs.člen | | | 0,686813 | 20,64236 | 0,033272 | 0,975052 | -56,625557 | 57,9991833 |
| X | 0,971977 | 0,117538 | 1,266484 | 0,15315 | 8,269474 | 0,001167 | 0,84126639 | 1,69170064 |

Vidíme, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95 a $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

Testovou statistiku F-testu a odpovídající p-hodnotu najdeme v záhlaví výstupní tabulky regrese. Zde F = 68,384, p-hodnota < 0,00117, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti modelu jako celku. (Výsledky F-testu jsou rovněž uvedeny v tabulce ANOVA.)

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy
Výsledky dílčích t-testů jsou uvedeny ve výstupní tabulce regrese.

| N=6 | Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (obchodnici.sta)<br>R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415<br>F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | b* | Sm.chyba z b* | b | Sm.chyba z b | t(4) | p-hodn. |
| Abs.člen | | | 0,686813 | 20,64236 | 0,033272 | 0,975052 |
| X | 0,971977 | 0,117538 | 1,266484 | 0,15315 | 8,269474 | 0,001167 |

Testová statistika pro test hypotézy $H_0$: $\beta_0 = 0$ je 0,033272, p-hodnota je 0,975052. Hypotézu o nevýznamnosti úseku regresní přímky tedy nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Testová statistika pro test hypotézy $H_0$: $\beta_1 = 0$ je 8,269474, p-hodnota je 0,001167. Hypotézu o nevýznamnosti směrnice regresní přímky tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.

g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

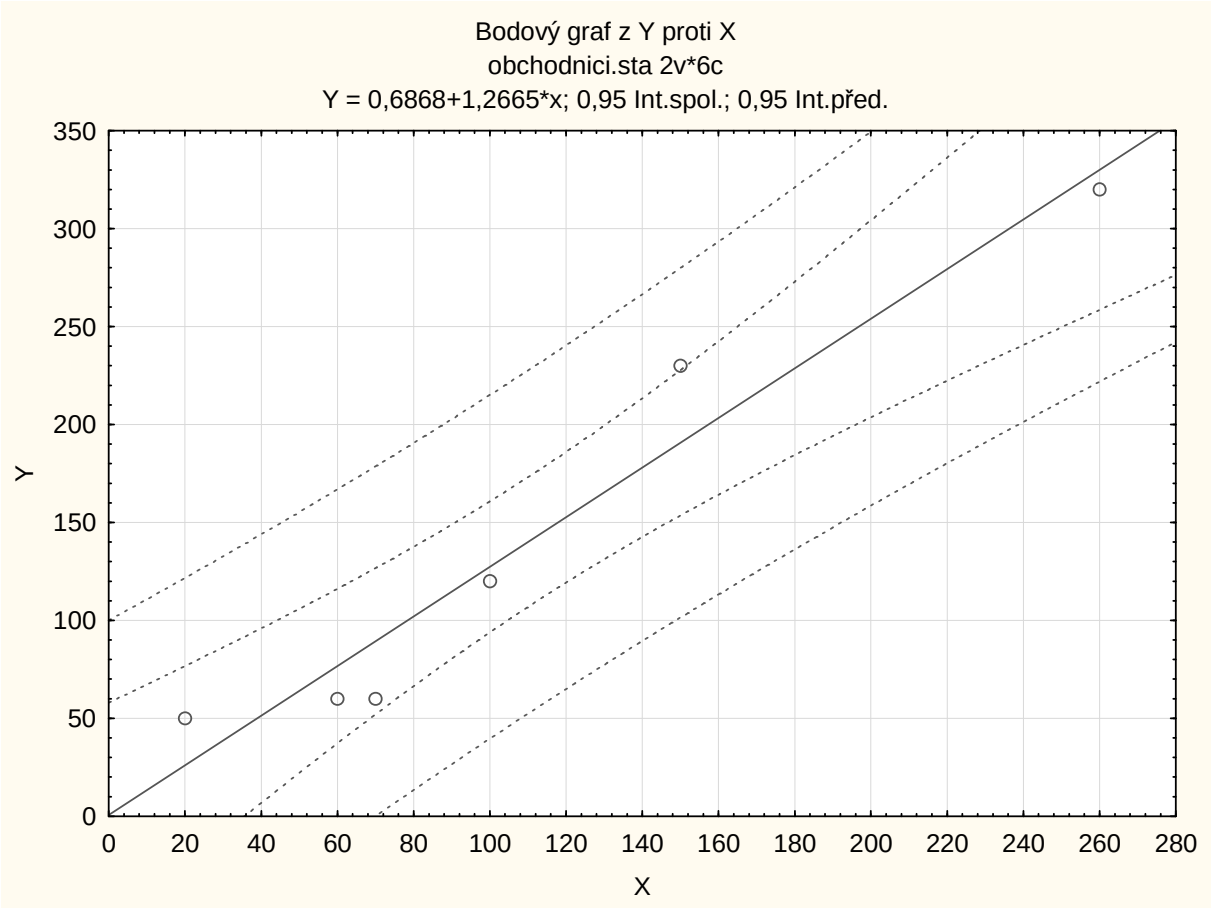
Pro výpočet predikované hodnoty zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi Předpovědi závisle proměnné X: 110 OK. Ve výstupní tabulce je hledaná hodnota označena jako Předpověď.

| Proměnná | Předpovězené hodnoty (obchodnici.sta) proměnné: Y | | |
|---|---|---|---|
| | b-váha | Hodnota | b-váha * Hodnot |
| X | 1,266484 | 110,0000 | 139,3132 |
| Abs. člen | | | 0,6868 |
| Předpověď | | | 140,0000 |
| -95,0%LS | | | 106,8803 |
| +95,0%LS | | | 173,1197 |

Při loňské poptávce 110 kusů je predikovaná hodnota letošní poptávky 140 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou a 95% pásem spolehlivosti a 95% predikčním pásem.

Grafy – Bodové grafy – ponecháme Typ proložení: Lineární – Proměnné X, Y – OK – zapneme Regresní pásy – Spolehlivost - OK. Ve vytvořeném grafu 2x klikneme na jeho pozadí, z nabídky Spojnice vybereme Regresní pásy – Přidat nový pár pásů - zvolíme Typ Predikční – změníme barvu z červené na modrou - OK.




i) Vypočtěte střední absolutní procentuální chybu predikce (MAPE)

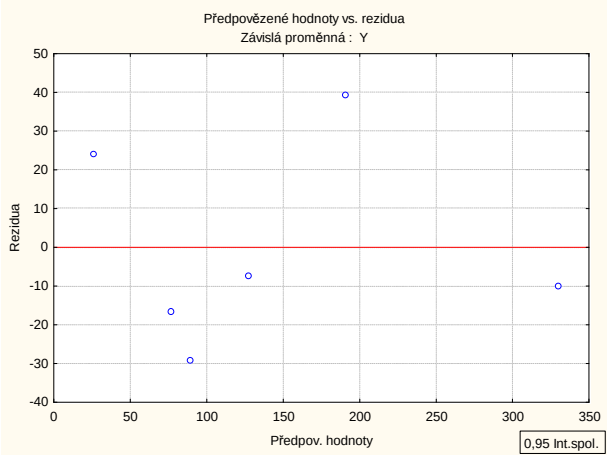
Ve výsledcích Vícenásobné regrese zvolíme záložku Rezidua / předpoklady / předpovědi – Reziduální analýza – Uložit – Uložit rezidua a předpovědi – Vybrat vše – OK. Ve vzniklé tabulce odstraníme proměnné 5 – 10, přidáme proměnnou chyby a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=100*abs(v4/v2)
Pak spočteme průměr této proměnné a zjistíme, že MAPE = 25,17%.

j) Proveďte analýzu reziduí.
Posouzení nezávislosti reziduí pomocí Durbinovy – Watsonovy statistiky:
Statistiky – Vícenásobná regrese – proměnná Závislá: y, nezávislá x – OK – na záložce Residua/předpoklady/předpovědi vybereme Reziduální analýza - Detaily – Durbin-Watsonova statistika:

| | Durbin-Watson.d | Sériové korelace |
|---|---|---|
| Odhad | 2,022847 | -0,113505 |

Hodnota této statistiky je blízká 2, svědčí o tom, že rezidua jsou nekorelovaná.

Posouzení homoskedasticity reziduí
Reziduální analýza – Bodové grafy – Předpovědi vs. rezidua



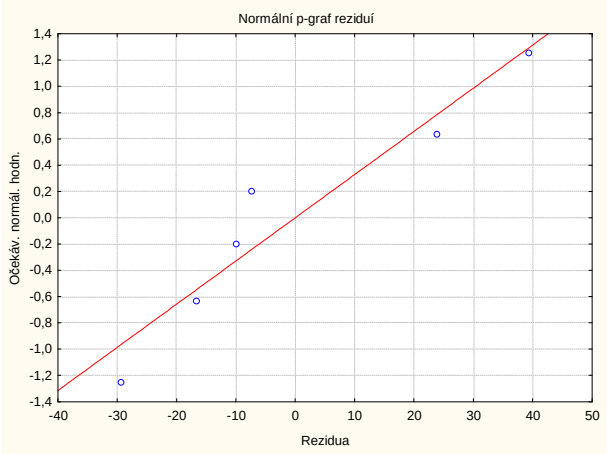

Rezidua jsou kolem nuly rozmístěna náhodně.

Testování nulovosti střední hodnoty reziduí:
Pro proměnnou Rezidua z tabulky uložené pomocí Reziduální analýzy provedeme jednovýběrový t-test: Statistiky - Základní statistiky/tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – proměnné Rezidua – OK.

| Proměnná | Průměr | Sm.odch. | N | Sm.chyba | Referenční konstanta | t | SV | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rezidua | -0,000003 | 26,13469 | 6 | 10,66944 | 0,00 | -0,000000 | 5 | 1,000000 |

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že střední hodnota reziduí je 0.

Posouzení normality reziduí:
Na záložce Pravděpodobnostní grafy zvolíme Normální pravděpodobnostní graf reziduí:

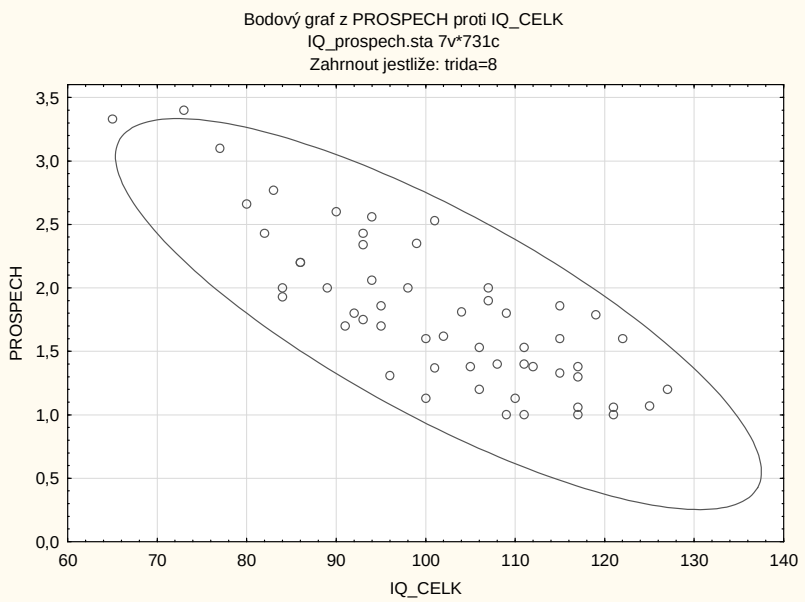



Rezidua se řadí kolem ideální přímky, lze tedy soudit, že se řídí normálním rozložení.

**Příklad k samostatnému řešení:** V rámci psychologického výzkumu byly u 731 dětí ze základních škol zjišťovány následující údaje:
Pohlaví (1 – chlapec, 2 – dívka) – proměnná SEX
IQ celkové – proměnná IQ_CELK
Třída (1. až 9.) – proměnná TRIDA
Vzdělání matky (1 – základní, 2 – SŠ, 3 – VŠ) – proměnná VM
Vzdělání otce (1 – základní, 2 – SŠ, 3 – VŠ) – proměnná VO
Sídlo (1 – město, 2 – venkov) – proměnná SIDLO
Prospěch (průměrný prospěch na pololetním vysvědčení) – Proměnná PROSPECH
Údaje jsou uloženy v souboru IQ_prospech.sta.

Pro žáky z 8. třídy pomocí lineární regrese s nezávisle proměnnou IQ_CELK vysvětlete hodnoty proměnné PROSPECH.

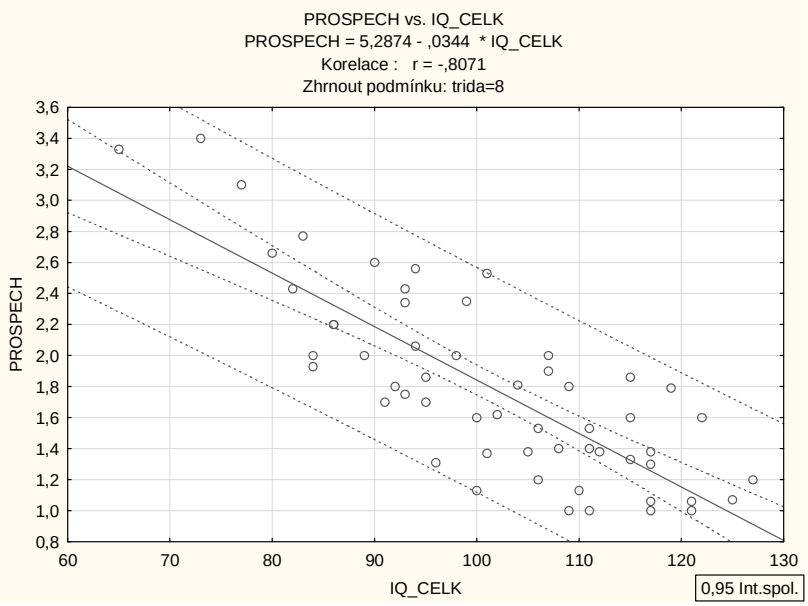
a) Dvourozměrnou normalitu dat orientačně posuďte dvourozměrným tečkovým diagramem s 95% elipsou konstantní hustoty pravděpodobnosti.




b) Vypočtěte odhady regresních parametrů, napište rovnici regresní přímky a interpretujte její parametry.

| N=56 | Výsledky regrese se závislou proměnnou : PROSPECH (IQ_prospech.sta)<br>R= ,80710847 R2= ,65142408 Upravené R2= ,64496897<br>F(1,54)=100,92 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : ,35806<br>Zhrnout podmínku: trida=8 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | b* | Sm.chyba z b* | b | Sm.chyba z b | t(54) | p-hodn. |
| Abs.člen | | | 5,287439 | 0,351073 | 15,0608 | 0,000000 |
| IQ_CELK | -0,807108 | 0,080344 | -0,034447 | 0,003429 | -10,0457 | 0,000000 |

c) Do dvourozměrného tečkového diagramu zakreslete regresní přímku s 95% pásem spolehlivosti a 95% predikčním pásem.




d) Najděte odhad rozptylu, proveďte celkový F-test a rovněž dílčí t-testy o významnosti regresních parametrů. (F-test je významný, oba dílčí t-testy rovněž, odhad rozptylu je 0,1282)

e) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.
$4{,}5836 < \beta_0 < 5{,}9913$ s pravděpodobností aspoň 0,95,
$-0{,}0413 < \beta_1 < -0{,}0276$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

f) Vypočtěte index determinace a interpretujte ho. Vypočtěte rovněž střední absolutní procentuální chybu predikce (MAPE) ($ID^2$ = 65 %, MAPE = 17,8 %).

g) Proveďte analýzu reziduí.