4.1.27. PŘÍKLAD. **Ještě jednou substituce v neurčitém integrálu.** Vztah 4.1.10.(∗) je totožný se vztahem

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{$*$}$$

který chápeme tak, že se vpravo do primitivní funkce $\int f(y)\,\mathrm{d}y$ (která je funkcí proměnné y) dosadí za proměnnou y funkce $g(x)$. Zatím jsme při integrování používali vztah (∗) ve směru zleva doprava. Ukážeme, že pro některé typy integrálů je výhodné použít vztah (∗) ve směru zprava doleva. Přirozeně musíme potom do funkce, která vyjadřuje integrál vlevo a která je funkcí proměnné x, na místo proměnné x dosadit vyjádření proměnné x pomocí proměnné y. Poněvadž $y = g(x)$, je pro prostou funkci g možno psát $x = g^{-1}(y)$. Zkrátka, vypočítáme – pokud to je možné – proměnnou x pomocí proměnné y.

Za proměnnou y v následujícím integrálu dosadíme x^2, tj. $y = x^2$. Pro diferenciály to znamená $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$; omezíme-li se na kladná x, postupně dostáváme

$$\int e^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int e^{\sqrt{x^2}}2x\,\mathrm{d}x = 2\int e^x x\,\mathrm{d}x = 2\Big(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\Big) =$$
$$= 2\big(xe^x - e^x\big) + c = 2(x-1)e^x + c = 2(\sqrt{y}-1)e^{\sqrt{y}} + c$$

na intervalu $(0,\infty)$. Na integrál, který jsme dostali po substituci, jsme uplatnili integraci per partes.

4.1.28. Podobně řešte:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x\,.$

4.1.29. Zvolte vhodný postup a vypočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg}^4 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{6+5x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \ln(x-3)\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4x^6+1}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int (x-5)^7 x\,\mathrm{d}x\,,$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{2x+3}\,\mathrm{d}x\,,$ k) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x\,,$ l) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. **4.1.28. a)** $\arcsin\frac12 x$ na $(-2,2)$, **b)** $\frac13\operatorname{arctg}\frac13 x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\arcsin\frac{x-2}{2}$ na $(0,4)$, **d)** $\frac13\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})$ na $(0,\infty)$, **f)** $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ na $(0,\infty)$, **g)** $\frac12\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$ na $(-\infty,\infty)$, **h)** $\arcsin\frac{x-3}{4}$ na $(-1,7)$, **i)** $2\big(\sin\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}\cos\sqrt{x-1}\big)$ na $(1,\infty)$.

4.1.29. a) $-\dfrac{(x+2)}{e^x} \equiv -(x+2)e^{-x}$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $-\frac15\operatorname{cotg}^5 x$ na $(0,\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **c)** $\frac14\ln(2x^2+1)+\frac32\sqrt2\operatorname{arctg}(\sqrt2 x)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $-(x+\operatorname{cotg}x)$ na $(0,\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **e)** $2(x+2)\sqrt{x}$ na $(0,\infty)$, **f)** $5\ln|x|-\frac{6}{x}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$, **g)** $(x-3)\ln(x-3)-x$ na $(3,\infty)$, **h)** $\frac16\operatorname{arctg}(2x^3)$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\frac{1}{72}(x-5)^8(8x+5)$ na $(-\infty,\infty)$, **j)** $\frac12 x-\frac34\ln|2x+3|$ na $(-\infty,-\frac32)$ a na $(-\frac32,\infty)$, **k)** $2x-\sqrt{10}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac25}x)$ na $(-\infty,\infty)$, **l)** $\dfrac{-(x+1)}{(x+2)^2}$ na $(-\infty,-2)$ a na $(-2,\infty)$.

4.2. Neurčitý integrál, část II

4.2.1. PŘÍKLAD. Často se podaří převést integraci na integrování funkce, která je podílem dvou polynomů. Pokud stupeň polynomu v čitateli není menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, musí se začít dělením polynomů. To se někdy dá obejít obratným přestavěním vhodných výrazů v čitateli, například

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \int\Big(1-\frac{1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg}x + c$$

na intervalu $(-\infty,\infty)$.

4.2.2. PŘÍKLAD. Poněvadž dělením polynomů se rychle zjistí, že

$$3x^3 - 14x - 7 = (3x^2 - 6x - 2)(x+2) - 3\,,$$

můžeme na na intervalech $(-\infty,-2)$ a $(-2,\infty)$ postupovat takto:

$$\int \frac{3x^3-14x-7}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int\Big(3x^2-6x-2-\frac{3}{x+2}\Big)\,\mathrm{d}x = x^3 - 3x^2 - 2x - 3\ln|x+2| + c\,.$$

4.2.3. POZNÁMKA. Z mnoha případů, které potom mohou nastat, když máme nalézt primitivní funkci k podílu dvou polynomů, u nichž je stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, vybereme pouze nejjednodušší – všechny kořeny polynomu ve jmenovateli jsou reálné a navzájem různé. V tomto případě se dá dokázat, že pro vhodně zvolená čísla $A_1,\dots,A_n$ platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x-\alpha_j}$$

pro všechna čísla x různá od kořenů jmenovatele. Přitom n je stupeň polynomu Q ve jmenovateli (stupeň polynomu P je tedy menší než n) a čísla α_j jsou kořeny jmenovatele.

Jako příklad toho, jak je možné čísla A_j nalézt, vezmeme relaci

$$\frac{12x-6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}\,.$$

Vynásobíme ji polynomem $x(x-1)(x+2)$ a dostaneme vztah mezi polynomy

$$12x - 6 = A_1x(x-1) + A_2(x-1)(x+2) + A_3x(x+2)\,. \tag{$*$}$$

Ukážeme dvě cesty k získání hodnot koeficientů A_1, A_2, A_3:

a) Roznásobíme výrazy na pravé straně a porovnáme koeficienty u mocnin x^2, $x^1 \equiv x$ a $x^0 \equiv 1$. Dostaneme tyto tři vztahy pro A_1, A_2 a A_3:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} x^2: & A_1 & + & A_2 & + & A_3 & = & 0\,,\\ x^1: & -A_1 & + & A_2 & + & 2A_3 & = & 12\,,\\ x^0: & & - & 2A_2 & & & = & -6\,. \end{array}$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic je $A_1 = -5$, $A_2 = 3$, $A_3 = 2$. Proto

$$\int \frac{12x-6}{x(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\frac{-5}{x+2} + \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1}\Big)\,\mathrm{d}x = -5\ln|x+2| + 3\ln|x| + 2\ln|x-1| + c$$

na každém z intervalů $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,1)$ a $(1,\infty)$.

b) Jednodušší je patrně tento postup. Do vztahu (∗) postupně dosadíme kořeny polynomu Q. Dosadíme-li kořen α_j, dostaneme vztah, v němž se objevuje pouze jedno z hledaných čísel, A_j. Ostatní jsou násobena nulou, a proto se v rovnici pro určení A_j neobjeví. Okamžitě dostaneme

$$\begin{array}{rcrlrcl} x & = & -2: & 6A_1 = -30, \text{ proto} & A_1 & = & -5\,,\\ x & = & 0: & -2A_2 = -6, \text{ proto} & A_2 & = & 3\,,\\ x & = & 1: & 3A_3 = 6, \text{ proto} & A_3 & = & 2\,; \end{array}$$

stejný výsledek jako výše.

4.2.4. Najděte primitivní funkce

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+5}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x^4+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{t^5}{t-1}\,\mathrm{d}t\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{(a+b)u}{(u-a)(u+b)}\,\mathrm{d}u\,,\quad a,b>0.$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{a+e^x}\,\mathrm{d}x\,, a>0\,,$ i) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x+2}\,\mathrm{d}x\,,$

j) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{6+\cos x\,(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x\,,$ k) $\displaystyle\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{(3+\sin x)(2+\sin x)}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. **4.2.4. a)** $x+\ln|\frac{x+3}{x+2}|$ na každém ze tří intervalů $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,\infty)$, **b)** $\frac{1}{3}x^3+4x+5\ln|\frac{x-2}{x+2}|$ na $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,\infty)$, **c)** $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-3}{x}|$ na $(-\infty,0)$, $(0,3)$, $(3,\infty)$, **d)** $\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+\ln|t-1|$ na $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$, **e)** $\ln|\frac{x^2-1}{x}|$ na čtyřech intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$, **f)** $\ln\big(|u-a|^a|u+b|^b\big)$na $(-\infty,-b)$, $(-b,a)$, (a,∞), **g)** $\ln\frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}$ na $(0,\infty)$, **h)** $\frac{1}{a}\big(x-\ln(a+e^x)\big)$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\frac{1}{2}\big(x+\ln(e^x+2)\big)$ na $(-\infty,\infty)$, **j)** $\frac{1}{5}\ln\frac{3-\cos x}{2+\cos x}$ na $(-\infty,\infty)$, **k)** $\ln\frac{(3+\sin x)^2}{2+\sin x}$ na $(-\infty,\infty)$.

4.2.5. PŘÍKLAD. Spočítáme primitivní funkci k funkci $\varphi\to\frac{1}{\cos\varphi}$. Tato funkce se použije při popisu Mercatorova zobrazení sféry do roviny. Poněvadž proměnná φ odpovídá zeměpisné šířce, stačí se omezit na $\varphi\in(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$. Postupujeme takto (substituce: $y=\sin\varphi$, $\mathrm{d}y=\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $y\in(-1,1)$):

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int\frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int\frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Jednou z metod nahoře uvedených zjistíme, že čísla A, B v rozkladu

$$\frac{1}{1-y^2}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{y-1}$$

splňují $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$; proto

$$\int\frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int\frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|+c\,.$$

Zaměníme y za původní proměnnou φ a máme

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}+c\quad\text{pro}\quad\varphi\in\big(-\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\big)\,.$$

4.2.6. Využijte vztahů

$$\sin\varphi=-\cos\big(\varphi+\frac{\pi}{2}\big)\,,\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,\quad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

a ukažte, že platí

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{4}\pi\big)+c\quad\text{pro}\quad\varphi\in\big(-\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\big)\,.\tag{$*$}$$

4.2.7. Ke stejnému výsledku se dá dostat i jinými cestami. Ukážeme dvě z nich a přitom procvičíme další integrační postupy. Zavedeme novou proměnnou $y=\varphi+\frac{1}{2}\pi$. Potom je $y\in(0,\pi)$ a máme

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int\frac{1}{\cos(y-\frac{1}{2}\pi)}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{\sin y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Jestliže zavedeme ještě další proměnnou z vztahem $z=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, je $z\in(0,\infty)$, a proto lze psát

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\ln z+c\,.$$

Návratem k původní proměnné dostaneme vztah 4.2.6.($*$).

4.2.8. Vyjádření goniometrických funkcí pomocí funkce tg je univerzální způsob – někdy však zbytečně komplikovaný – jak při integraci postupovat. V poslední úloze lze proto postupovat také takto: (substituce $\varphi=2u$, tedy $u\in(-\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi)$)

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=2\int\frac{1}{\cos 2u}\,\mathrm{d}u=2\int\frac{1}{\cos^2u-\sin^2u}\,\mathrm{d}u=2\int\frac{1}{(1-\operatorname{tg}^2u)\cos^2u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Jestliže použijeme ještě další proměnné w dané vztahem $w=\operatorname{tg}u$ (potom je $w\in(-1,1)$), převedeme poslední integrál na

$$2\int\frac{1}{1-w^2}\,\mathrm{d}w=\int\Big(\frac{1}{w+1}-\frac{1}{w-1}\Big)\,\mathrm{d}w=\ln\left|\frac{w+1}{w-1}\right|+c=\ln\frac{1+w}{1-w}+c=\ln\frac{1+\operatorname{tg}u}{1-\operatorname{tg}u}+c\,.$$

Poněvadž $1=\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi$, poslední výraz se upraví na tvar 4.2.6.($*$) užitím vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

4.2.9. POZNÁMKA. Vztahů $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ se doporučuje použít pro úpravu některých výrazů obsahujících druhé mocniny funkcí cos a sin. Použitím prvního vztahu dostaneme

$$\int\cos^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\big(x+\tfrac{1}{2}\sin 2x\big)+c\equiv\tfrac{1}{2}\big(x+\sin x\cos x\big)+c\,.$$

Lze však postupovat i jinak – méně obratně. Per partes dává

$$\int\cos^2x\,\mathrm{d}x=\int\cos x\cos x\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}f(x)=\cos x\\ g'(x)=\cos x\end{pmatrix}=\cos x\sin x+\int\sin^2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\cos x\sin x+\int(1-\cos^2x)\mathrm{d}x=\cos x\sin x+x-\int\cos^2x\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud pro hledanou primitivní funkci získáme vztah

$$2\int\cos^2x\,\mathrm{d}x=x+\cos x\sin x\,.$$

Dostaneme stejný výsledek jako výše. Oba vyložené přístupy použijte při odvozování vztahu

$$\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c\,.$$

4.2.10. POZNÁMKA. Užijeme-li integrace per partes, máme

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}f(x)=e^x\\ g'(x)=\cos x\end{pmatrix}=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Na integrál $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$ uplatníme opět integraci per partes, dostaneme

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}f(x)=e^x\\ g'(x)=\sin x\end{pmatrix}=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme tento výsledek do prvního vztahu, tím dostaneme

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx .$$

To je rovnice pro hledanou primitivní funkci; dostaneme z ní tento výsledek:

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty) .$$

Podobně odvoďte, že

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty) .$$

4.2.11. POZNÁMKA. Při hledání primitivní funkce lze získat dva výsledky, o kterých není na první pohled patrné, že se liší o konstantu. Například (substituce $2x = u$)

$$\int \sin 2x \, dx = -\tfrac{1}{2} \cos 2x + c ,$$

ale také (substituce $\sin x = w$)

$$\int \sin 2x \, dx = 2 \int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty).$$

Poněvadž $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, lze i přímým výpočtem snadno ukázat, že se dvě uvedené primitivní funkce liší o konstantu:

$$-\tfrac{1}{2} \cos 2x + c = -\tfrac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + c = \sin^2 x + (c - \tfrac{1}{2}) .$$

Podobně lze pro libovolnou kladnou konstantu a a pro $x \in (0, \infty)$ psát tyto dva výsledky (vezmeme-li substituci $ax = y$ pro výpočet druhé primitivní funkce):

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(ax) + c . \quad \left(\text{Neboť} \int \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{a}{ax} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy = \ln(ax) + c .\right)$$

Vysvětlete, proč se tyto dvě primitivní funkce na intervalu $(0, \infty)$ liší opravdu pouze o konstantu.

4.2.12. POZNÁMKA. Substituce nejsou určeny jednoznačně. Například substituce $1 + e^x = w$ dává

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx = \int w^{\frac{1}{2}} \, dw = \tfrac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty) .$$

Užijeme-li však substituce $\sqrt{1 + e^x} = y$ (tj. $y^2 = 1 + e^x$, $2y dy = e^x \, dx$), dostaneme totéž, neboť

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx = 2 \int y^2 \, dy = \tfrac{2}{3} y^3 + c = \tfrac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + c .$$

Podobně

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \tfrac{1}{3} \sin^3 x + c .$$

To vidíme hned, když jdeme cestou doporučované substituce $\sin x = w$. Ke stejnému výsledku vede i poněkud nestandardní a nešikovná substituce $\sin^2 x = z$. Máme totiž ($dz = 2 \sin x \cos x \, dx$)

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{z} \, dz = \tfrac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{1}{3} \sin^3 x + c .$$

4.2.13. Následující úlohy nejsou seřazeny podle obtížnosti. Slouží k tomu, abyste si ověřili, že už dokážete vybrat vhodnou metodu z těch, které byly probrány. Jakmile je správná metoda vybrána, nalezení primitivní funkce už žádnou těžkost nepředstavuje. Najděte:

a) $\displaystyle\int \frac{z}{z+1} \, dz$,	b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x-3}} \, dx$,	c) $\displaystyle\int t(t+1)^7 \, dt$,
d) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x \, dx$,	e) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x \, dx$,	f) $\displaystyle\int \sqrt{w-3} \, dw$,
g) $\displaystyle\int \sin^5 x \, dx$,	h) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$,	i) $\displaystyle\int \cos^{-2} x \sin x \, dx$,
j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, dx$,	k) $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x+3)(x+2)(x-1)} \, dx$,	l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\sqrt{x}} \, dx$,
m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+2} \, dx$,	n) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, dx$,	o) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x \, dx$,
p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+2} \, dx$,	q) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \, dx$,	r) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x} \, dx$,
s) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$,	t) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$,	u) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \, dx$,
v) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \, dx$,	w) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x-2} \, dx$,	x) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-6} \, dx$.

4.2.14. Také zde najděte vhodný postup, jehož použitím spočítáte

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx$,	b) $\displaystyle\int (b - ax) \, e^{-x} \, dx$,	c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sin x \, dx$.
d) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$,	e) $\displaystyle\int x^2 \ln^3 x \, dx$,	f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+e^{-x^2}} \, dx$,
g) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} \, dx$,	h) $\displaystyle\int (x^3 - 1) \sin x \, dx$,	i) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2} \, dx$,
j) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$,	k) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sin^2 x} \, dx$,	l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \, dx$.

Řešení. **4.2.13.** **a)** $z - \ln|z+1|$ na intervalu $(-\infty, -1)$ a na intervalu $(-1, \infty)$, **b)** $-\frac{1}{2} e^{3-2x}$ na $(-\infty, \infty)$, **c)** $\frac{1}{72}(t+1)^8(8t-1)$ na $(-\infty, \infty)$, **d)** $-\frac{1}{3}\cos^3 x$ na $(-\infty, \infty)$, **e)** $\frac{1}{6}\sin^6 x$ na $(-\infty, \infty)$, **f)** $\frac{2}{3}(w-3)^{\frac{3}{2}}$ na $(3, \infty)$, **g)** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x$ na $(-\infty, \infty)$, **h)** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty, \infty)$, **i)** $\cos^{-1} x$ na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **j)** $\frac{1}{2}\ln^2 x$ na $(0, \infty)$, **k)** $\frac{1}{2} \ln \frac{|(x-1)(x+3)|}{(x+2)^2}$ na $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 1)$ a na $(1, \infty)$, **l)** $\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(1 + 2\sqrt{x})$ na $(0, \infty)$, **m)** $\frac{1}{4}\ln(x^4 + 2)$ na $(-\infty, \infty)$, **n)** $\ln|\sin x|$ na $(0, \pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **o)** $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|$ na $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $\frac{1}{2}k\pi$, $k \in Z$, **p)** $\frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}} x^4)$ na $(-\infty, \infty)$, **q)** $2x - \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **r)** $-\ln(3 + \cos^2 x)$ na $(-\infty, \infty)$, **s)** $\frac{4}{15}(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x} - 2)$ na $(0, \infty)$, **t)** $-x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1 + \sqrt{x})$ na $(0, \infty)$, **u)** $\frac{2}{3}(x + 7)\sqrt{x - 2}$ na $(2, \infty)$, **v)** $\operatorname{arctg} \ln x$ na $(0, \infty)$, **w)** $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8\ln|x - 2|$ na $(-\infty, 2)$ a na $(2, \infty)$, **x)** $\frac{1}{5}\ln(|x-3|^2|x+2|^3)$ na $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ a na $(3, \infty)$.

4.2.14. **a)** $\frac{1}{2}\big((x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - x\big)$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $\big(a(x+1) - b\big)\, e^{-x}$ na $(-\infty, \infty)$, **c)** $\cos x + 1/\cos x$ na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které z tohoto intervalu dostaneme posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **d)** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)$ na $(0, \infty)$, **e)** $\frac{1}{27}x^3(9\ln^3 x - 9\ln^2 x + 6\ln x - 2)$ na $(0, \infty)$, **f)** $\frac{1}{2}\ln(1 + e^{x^2})$ na $(-\infty, \infty)$, **g)** $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ na $(-\infty, \infty)$, **h)** $(-x^3 + 6x + 1)\cos x + 3(x^2 - 2)\sin x$ na $(-\infty, \infty)$, **i)** $\frac{2}{15}(3x - 4)(x + 2)^{\frac{3}{2}}$ na $(-2, \infty)$, **j)** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$ na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **k)** $(1 - x)\operatorname{cotg} x + \ln|\sin x|$ na intervalu $(0, \pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k \in Z$, **l)** $\arcsin \frac{x-1}{2}$ na $(-1, 3)$.

4.2.15. Píšeme-li místo jedničky $\cos^2 x + \sin^2 x$, snadno odvodíme, že

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\,, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \equiv 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

na intervalech, jejichž rozsah si snadno uvědomíme. Využijte uvedené vztahy při určení těchto primitivních funkcí:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.16. POZNÁMKA. Někdy je třeba ještě získaný výsledek upravit. Jestliže a je pevná kladná konstanta, můžeme na intervalu $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ psát (substituce $ax + b = y$, $y \in (0, \infty)$, $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$):

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{y-b}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a^2}\int \left(y^{\frac{1}{2}} - by^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2by^{\frac{1}{2}}\right) + c$$

(v tomto místě se lze vrátit k proměnné x a výpočet ukončit; je však lépe vytknout odmocninu a primitivní funkci upravit)

$$= \frac{2}{3a^2}(y - 3b)\,y^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3a^2}(ax - 2b)\sqrt{ax+b} + c\,.$$

4.2.17. Výsledek se upraví vytknutím faktoru s vhodným racionálním exponentem. Najděte:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.18. A závěrem ještě několik úloh, u nichž je třeba volit vhodnou metodu:

a) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2+4}}\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{4\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{2(1-x)}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.19. POZNÁMKA. V poslední úloze jsme nalezli primitivní funkci pouze na intervalech, ve kterých neleží žádný bod $x = \frac{1}{2}k\pi$, $k \in Z$, přestože integrand je funkce spojitá na $(-\infty, \infty)$, kde proto také musí existovat primitivní funkce. To ukazuje, že věci mohou být složitější, než se na první pohled jeví. Na to, abychom ukázali jak postupovat, však bohužel místo nemáme.

Řešení. **4.2.15. a)** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$ na intervalech, v nichž je funkce tg definována, **b)** $-\frac{1}{3}\left(\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x\right)$ na intervalech, v nichž je funkce cotg definována, **c)** (substituce $y = \operatorname{tg} x$) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 x - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)\right) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$ na intervalech, kde je $\cos x \neq 0$.
4.2.17. a) $-\frac{1}{15}(3x+1)(1-2x)^{\frac{3}{2}}$ na $(-\infty, \frac{1}{2})$, **b)** $\frac{1}{3}(x-1)(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ na $(-\frac{1}{2}, \infty)$, **c)** $-\frac{1}{3}(x+3)\sqrt{3-2x}$ na $(-\infty, \frac{3}{2})$. **4.2.18. a)** $\frac{1}{\ln 5}5^x$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, **c)** $x - 2\operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, \infty)$, **d)** $\frac{1}{4}(3x^2+4)^{\frac{2}{3}}$ na $(-\infty, \infty)$, **e)** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|$ na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, **f)** $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ na $(-\infty, \infty)$, **g)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\mathrm{e}^x)$ na $(-\infty, \infty)$, **h)** $\frac{x}{(x+2)^3}$ na $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, **i)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x)$ na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k \in Z$.

4.3. Určitý integrál

4.3.1. POZNÁMKA. Je dána spojitá funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, $-\infty < a < b < \infty$. Označíme $\mathcal{P}$ libovolnou skupinu složenou z lichého počtu bodů, které se dělí do dvou podskupin tak, že první skupina obsahuje $m+1$ bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ a druhá obsahuje m bodů $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; přitom požadujeme, aby platilo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b\,,$$

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k\ , k = 1, \ldots, m\,.$$

Základní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ nemusí být pravidelné, délky $x_k - x_{k-1}$ intervalů $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ se nemusí pro různá k shodovat. Největší z čísel $x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, m$, charakterizuje jemnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na podintervaly, označíme ho $d(\mathcal{P})$. Ke každé popsané skupině bodů $\mathcal{P}$ přiřadíme číslo $s(f, \mathcal{P})$, které je definováno takto:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Určitým integrálem (spojité) funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme číslo s, pro které platí

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ d(\mathcal{P}) < \delta \implies |s(f, \mathcal{P}) - s| < \epsilon\,.$$

Takové číslo existuje; nazýváme ho (určitým) integrálem funkce f od a do b a značíme je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Shrnuto: pro každou posloupnost výše popsaných skupin bodů $\mathcal{P}_n$ platí:

$$\text{jestliže}\quad \lim_{n\to\infty} d(f, \mathcal{P}_n) \to 0\,, \quad \text{potom}\quad s(f, \mathcal{P}_n) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.2. Dokažte, že pro konstantní funkci f, která je pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ rovna konstantě c, platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

4.3.3. PŘÍKLAD. Uvedeme tři volby skupiny $\mathcal{P}$. Všechny budou mít stejné pravidelné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ body x_k; lišit se budou pouze ve volbě ξ_k. Pro přirozené číslo n označíme $h = (b-a)/n$ a $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Pro body ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, bereme jednu z možností:

α) $\xi_k = x_{k-1}$,

β) $\xi_k = x_k$,

γ) $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)\,.$

Zvolíme možnost β) a užijeme vzorce pro součet aritmetické posloupnosti k tomu, abychom dokázali, že $\int_0^b x\,\mathrm{d}x = b^2/2$. Pro libovolné přirozené číslo n vezmeme $h = \frac{b}{n}$ jako délku kroku, kterým pokročíme od jednoho bodu x_{k-1} k následujícímu bodu x_k. To znamená, že $x_k = hk$, $\xi_k = x_k$. Tento výběr bodů x_k, ξ_k označíme $\mathcal{P}_n$. Dostaneme pro něj

$$s(x, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k h = h^2 \sum_{k=1}^{n} k = h^2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(hn)^2}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}\,\frac{n+1}{n}\,.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme výsledek $\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2$. Zopakujte pro případy α) a γ).

4.3.4. Poněvadž $s(f+g,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P})$, dostaneme limitním přechodem tento vztah mezi integrály:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Z jakého vztahu se limitním přechodem dostane

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

pro každé číslo α? Dva výše zmíněné vztahy vedou k tomuto závěru:

zobrazení $f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je lineárním zobrazením prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ do R,

kde symbolem $C(\langle a,b\rangle)$ je označen vektorový prostor funkcí spojitých na intervalu $\langle a,b\rangle$.

4.3.5. Limitním přechodem také vysvětlíme následující vztah, který platí pro každou funkci spojitou na $\langle a,c\rangle$, $a<c$. Je-li b libovolné číslo ležící mezi a a c, je

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.6. Je zatím definován $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a<b$. Pro $b=a$ je samozřejmě $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zbývá se vypořádat s případem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, v němž je $a>b$. Ten se vyřeší tak, že (zatím neznámému) výrazu na levé straně přiřadíme hodnotu, kterou má výraz stojící na pravé straně vztahu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pokud} \quad a>b\,.$$

Poněvadž v integrálu na pravé straně je horní mez větší než dolní, víme, co výraz na pravé straně znamená. Zjednodušte tyto součty integrálů

a) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, d) $\int_1^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4.3.7. Z definice určitého integrálu vyplývá, že

$$\text{jakmile} \quad f(x)\le g(x) \quad \text{pro } \forall x\in\langle a,b\rangle, \quad \text{potom} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Speciálně, je-li f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$. Dokonce, je-li v jednom bodě intervalu $\langle a,b\rangle$ hodnota nezáporné spojité funkce f kladná, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Jak uspořádáme podle velikosti integrály

$$\int_0^{\frac12\pi} x\,\mathrm{d}x\,,\quad \int_0^{\frac12\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\,,\quad \int_0^{\frac12\pi} \frac{2x}{\pi}\,\mathrm{d}x\ ?$$

4.3.8. Užijte předcházející úlohu a dokažte, že

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Najděte příklady funkcí, pro které neplatí rovnost.

Řešení. **4.3.2.** Poněvadž $\sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = b-a$, je pro každou skupinu bodů $\mathcal{P}$ možné napsat $s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = c\cdot\sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$. **4.3.6.** **a)** $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, **b)** $\int_0^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, **c)** $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, **d)** $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. **4.3.7.** Je to klesající posloupnost kladných čísel.

4.3.9. PŘÍKLAD. **Substituce v určitém integrálu.** Při substituci v určitém integrálu můžeme postupovat takto: v závorce někde uprostřed výpočtu si připravíme přechod od proměnné x k nové proměnné u; přitom také odpovídajícím způsobem změníme meze, například

$$\int_0^{\frac12\pi} \cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{r} \cos x = u \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x=0\ \ : u=1 \\ x=\frac{\pi}{2}\ : u=0 \end{array}\right) = -\int_1^0 u^2\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \tfrac13\big[u^3\big]_0^1 = \tfrac13\,.$$

4.3.10. Dokažte použitím substituce, že pro každé $k=1,2,\dots$ platí

$$\int_0^{\frac12\pi} \sin^k x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac12\pi} \cos^k x\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.11. PŘÍKLAD. **Per partes v určitém integrálu.** Také při užití metody per partes v určitém integrálu můžeme hned přecházet k číselným hodnotám; například

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\mathrm{d}x = -\big[x\,e^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} - \big[e^{-x}\big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}\,.$$

4.3.12. Dokažte, že pro funkci f spojitou na intervalu $\langle -a,0\rangle$, $a>0$, je

$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.13. Dokažte, že pro funkci f spojitou a lichou na intervalu $\langle -a,a\rangle$, $a>0$, je

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

4.3.14. Dokažte, že pro funkci f spojitou a sudou na intervalu $\langle -a,a\rangle$, $a>0$, je

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.15. Spočítejte

a) $\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x$,	b) $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$,	c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$,
d) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,	e) $\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$,	f) $\int_0^{\frac14\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$,
g) $\int_0^{\frac12\pi} \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$,	h) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$,	i) $\int_0^{\frac12\pi} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$,
j) $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$,	k) $\int_{-1}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$,	l) $\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x$,
m) $\int_0^1 xe^{1-x}\,\mathrm{d}x$,	n) $\int_{-1}^1 x(e^x+e^{-x})\,\mathrm{d}x$,	o) $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.
p) $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$,	q) $\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$,	r) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.3.10.** Použijeme substituce $y = \frac12\pi - x$. **4.3.15.** **a)** $\frac16$, **b)** 2, **c)** 0, **d)** $\frac12\pi$, **e)** $(e-1)/e$, **f)** $\frac12\ln 2$, **g)** $\frac14$, **h)** $\frac43$, **i)** $\frac23$, **j)** 1, **k)** $(2-e)/e$, **l)** $2/e$, **m)** $e-2$, **n)** 0, neboť integrujeme lichou funkci přes interval, který je symetricky umístěn vzhledem k bodu 0, **o)** $2\ln 2 - 1$, **p)** $-\frac14$, **q)** $\frac{1}{36}$, **r)** $\frac16$.

4.3.16. Integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

spočítejte užitím primitivní funkce. Potom předstírejte, že jste primitivní funkci zapomněli, a užijte substituce $x = \operatorname{tg} w$.

4.3.17. Někdy je jednodušší počítat určitý integrál substitucí, při které se meze mění, než nalézt primitivní funkci a integrál vyčíslit jako rozdíl její hodnoty v horní a dolní mezi. Například při výpočtu určitého integrálu, který dává obsah P čtvrtiny kruhu poloměru R, $R > 0$, můžeme postupovat takto:

$$P = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x = R\sin\varphi \\ \mathrm{d}x = R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ x = 0\ : \varphi = 0 \\ x = R\ : \varphi = \frac12\pi \end{pmatrix} = R^2\int_0^{\frac12\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac12 R^2\int_0^{\frac12\pi}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac14\pi R^2.$$

Odsud vyplývá, že obsah kruhu je $4P = \pi R^2$.

Primitivní funkci dokážeme ovšem také nalézt. Ukážeme to pro případ $R = 1$. Použijeme integraci per partes a postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

První integrál na pravé straně poslední rovnosti známe; máme rovnici, ze které hledanou primitivní funkci vypočítáme. Výsledkem je, pro $x \in (-1,1)$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac12\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + c\,. \qquad (*)$$

a) Použijte tento výsledek a jednoduchou substitucí najděte $\int \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Použijte substituci $x = \sin\varphi$ k výpočtu integrálu $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.3.18. V těchto úlohách můžeme sice umocnit dvojčlen v integrandu a potom integrovat, lepší však je začít substitucí, po které polynom v integrandu obsahuje menší počet členů; spočítejte

a) $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^2 u(u-1)^5\,\mathrm{d}u$, c) $\int_0^A t(A-t)^3\,dt$.

4.3.19. Spočítejte

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$, e) $\int_{-1}^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x$, h) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, i) $\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x$,

j) $\int_3^4 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$, k) $\int_0^{\frac12\pi} 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x$, l) $\int_0^{\frac14\pi} \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$,

m) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+2e^x}\,\mathrm{d}x$, n) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, o) $\int_0^{\frac12} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

4.3.20. Ukažte, že pro funkci f spojitou na $(-\infty,\infty)$ a pro libovolná čísla a, b, c platí:

a) $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x$, b) $\int_{3a}^{3b} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b f(3x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^1 f(a+ht)\,\mathrm{d}t$, kde h je dáno vztahem $h = b - a$.

4.3.21. Ukažte, že pro funkci f, která má příslušné derivace spojité na $(-\infty,\infty)$, a pro libovolnou trojici čísel a, b, h, $h \neq 0$, platí:

a) $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$, b) $\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)$,

c) $\int_0^1 f'(a+ht)\,\mathrm{d}t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, d) $\int_a^b f'(3x)\,\mathrm{d}x = \frac13\big(f(3b) - f(3a)\big)$.

4.3.22. Ověřte bez jakéhokoliv výpočtu, že každý z těchto integrálů je záporný:

a) $\int_0^{\frac12}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$, b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

4.3.23. Dokažte, že pro každé kladné číslo a a každou spojitou a sudou funkci f platí

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Potom spočítejte

$$\int_{-\frac16\pi}^{\frac16\pi} \frac{\cos x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. **4.3.16.** $\frac14\pi$. **4.3.17.** **a)** Substitucí $x = Rz$ přejdeme k $R^2\int\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$; uplatníme 4.3.17.(*), vrátíme se k původní proměnné x a upravíme; výsledek je

$$\int\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac12\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right) + c\,,$$

b) substitucí přejdeme k $\int_0^{\frac12\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$; tento integrál je roven $\frac14\int_0^{\frac12\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{16}\pi$.
4.3.18. **a)** 15, **b)** $\frac{13}{42}$, **c)** $\frac{1}{20}A^5$.
4.3.19. **a)** 1, **b)** 0, **c)** $2(2-\ln 3)$, **d)** $2\ln 2 - \frac34$, **e)** $\frac{-2}{e}$, **f)** $\frac92\pi$, **g)** $\frac19(24\ln 2 - 7)$, **h)** $\frac14(\pi-2)$, **i)** $\pi^2 - 4$, **j)** $\frac{37}{3}$, **k)** -1, **l)** $\frac{7\sqrt2}{120}$, **m)** $\frac12\ln\frac53$, **n)** $\frac13\pi\sqrt3 - \ln 2$, **o)** $\frac16\pi\sqrt6 + 2\sqrt2 - 4$. **4.3.23.** $\frac12$.

Funkce horní meze určitého integrálu.

4.3.24. Pro funkci f spojitou na otevřeném intervalu I definujeme novou funkci F na intervalu I tímto způsobem: pevně vybereme libovolný bod $a \in I$ a v bodě x intervalu I funkci F přiřadíme hodnotu

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Je jasné, že $F(a) = 0$. Ukážeme, že funkce F má derivaci v každém bodě intervalu I, tj.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad \forall x \in I\,.$$

To je velmi důležitý výsledek. Bude dokázán, jakmile se podaří ověřit, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = 0\,.$$

Pro libovolná čísla $x, x+h$ z intervalu I můžeme výraz, který se limituje, upravit takto:

$$\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big) - f(x) = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_a^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(\xi)-f(x)\big)\,\mathrm{d}\xi\,. \quad (*)$$

Nyní naznačíme, proč poslední člen v této řadě výrazů má limitu nula. Omezíme se na $h>0$. Vzhledem ke spojitosti funkce f lze pro každé $\epsilon>0$ nalézt $h>0$ takové, že

$$\forall\, \xi \in \langle x, x+h\rangle \Rightarrow |f(\xi)-f(x)| < \epsilon\,.$$

Proto poslední výraz se dá odhadnout takto

$$\Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(\xi)-f(x)\big)\,\mathrm{d}\xi\Big| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big|f(\xi)-f(x)\big|\,\mathrm{d}\xi \le \epsilon\,.$$

To ukazuje, že výraz $(*)$ má limitu nula. Platí tedy pro každou funkci f spojitou na otevřeném intervalu I, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

v každém bodě $x \in I$.

4.3.25. POZNÁMKA. Funkce F definovaná v předcházejícím cvičení je tedy primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Pro každé dva prvky a, b intervalu I platí

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(b) - F(a)\,.$$

Poněvadž každé dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu I se liší o konstantu, poslední vztah vysvětluje, proč hodnota určitého integrálu je rovna přírůstku primitivní funkce na integračním intervalu.

4.3.26. Pro funkci f spojitou na otevřeném intervalu I ukažte, že platí ($a \in I$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -f(x)$$

v každém bodě $x \in I$.

4.3.27. Pro právě narozeného jedince je pravděpodobnost dožití se věku x popsána funkcí

$$p(x) = e^{-\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\,,$$

kde μ je kladná funkce na intervalu $(0,\omega)$; $\omega>0$ je kladná konstanta, která odpovídá maximálnímu věku. Ukažte, že $p(0)=1$ a že p je klesající funkce. Dále ověřte, že

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\mu(x)\,.$$

4.3.28. Dokažte výpočtem, že pro funkci f spojitou a lichou (resp. sudou) na $(-\infty,\infty)$, je funkce

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

sudá (resp. lichá) na $(-\infty,\infty)$. Užijte jednoho z těchto tvrzení a dokažte, že funkce $x \to \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ je lichá na $(-\infty,\infty)$.

4.4. Nevlastní integrál

4.4.1. Napište, co znamená, že tyto integrály konvergují ($-\infty<a<b<\infty$):

a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a,b)$,

b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f spojitou na intervalu $(a,b\rangle$,

c) $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a,\infty)$,

d) $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f spojitou na intervalu $(-\infty,b\rangle$,

e) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f spojitou na intervalu $(-\infty,\infty)$.

4.4.2. PŘÍKLAD. Při výpočtu nevlastních integrálů počítáme limity. Píšeme třeba

$$\int_0^\infty (x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty}\Big(\big[-(x+1)e^{-x}\big]_0^\xi + \int_0^\xi e^{-x}\,\mathrm{d}x\Big) = \lim_{\xi\to\infty}\Big(\big[-(x+1)e^{-x}\big]_0^\xi - \big[e^{-x}\big]_0^\xi\Big) = 2\,.$$

4.4.3. Zjistěte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní. Pokud je konvergentní, najděte jeho hodnotu:

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_a^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ pro $a>0$, f) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha>0$, h) $\int_\alpha^\infty x e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha>0$, i) $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

4.4.4. Zjistěte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní. Pokud je konvergentní, najděte jeho hodnotu:

a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, e) $\int_0^e x\ln x\,\mathrm{d}x$, f) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$, h) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x$, i) $\int_1^5 \frac{1}{(5-x)\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

4.4.1. a) $\lim\limits_{\xi\to b-}\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je vlastní, **b)** $\lim\limits_{\xi\to a+}\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je vlastní,

c) $\lim\limits_{\xi\to\infty}\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je vlastní, **d)** $\lim\limits_{\xi\to-\infty}\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je vlastní,

e) pro libovolné číslo a konvergují tyto dva integrály: $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

4.4.3. a) $\frac{1}{2}$, **b)** divergentní, **c)** divergentní, **d)** $\frac{1}{3}$, **e)** $\frac{2}{\sqrt{a}}$, **f)** $\frac{1}{2}\pi$, **g)** $\frac{1}{\alpha}$, **h)** $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}e^{-\alpha^2}$, **i)** 2.

4.4.4. a) divergentní, **b)** 4, **c)** divergentní, **d)** -1, **e)** $\frac{1}{4}e^2$, **f)** $2\sqrt{2}$, **g)** 2, **h)** 4, **i)** divergentní.

4.4.5. Užijte větu o substituci a ukažte, že

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Potom jeden z integrálů spočítejte.

4.4.6. Použijte substituce $x = \operatorname{tg} u$ a spočítejte

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Potom výsledek ověřte přímým výpočtem pomocí primitivní funkce.

4.4.7. Jsou dány dvě funkce f a g spojité na intervalu $\langle a, \infty)$ a číslo $b \geq a$ takové, že

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{pro všechny body} \quad x \in \langle b, \infty)\,.$$

Potom platí:

jestliže $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ je divergentní, potom je také $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ divergentní,

jestliže $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní, potom je také $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentní.

Z těchto dvou tvrzení vyberte jedno a s jeho pomocí rozhodněte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní (hodnotu integrálu nepočítejte):

a) $\int_0^{\infty} \left(5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) \mathrm{d}x$, b) $\int_1^{\infty} \frac{4 + 3\sin 2x}{x^2 + 5}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^7 + 2}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x + e^x}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_0^{\infty} e^{x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_1^{\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$.

4.4.8. Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$ a číslo $b \geq a$ takové, že integrál $\int_b^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ je konvergentní. Potom konverguje také $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ukažte, že tyto nevlastní integrály konvergují:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\,\mathrm{d}x$.

4.4.9. Použijte integraci per partes a ukažte, že nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$$

konverguje.

Řešení. **4.4.5.** $\ln 2$. **4.4.6.** $\frac{1}{4}\pi$. **4.4.7.** **a)** je divergentní; například srovnáním s divergentním integrálem $\int_0^{\infty} 1\,\mathrm{d}x$, **b)** konverguje; srovnáváme s konvergentním integrálem $\int_1^{\infty} \frac{7}{x^2}\,\mathrm{d}x$, **c)** konverguje; srovnáváme s konvergentním integrálem $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^7}\,\mathrm{d}x$, **d)** je konvergentní; například srovnáním s konvergentním integrálem $\int_1^{\infty} 2x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$, **e)** diverguje; srovnáváme s divergentním integrálem $\int_0^{\infty} e^0\,\mathrm{d}x \equiv \int_0^{\infty} 1\,\mathrm{d}x$, **f)** diverguje; srovnáváme s divergentním integrálem $\int_e^{\infty} \ln e\,\mathrm{d}x \equiv \int_0^{\infty} 1\,\mathrm{d}x$. **4.4.9.** Integrace per partes ukazuje, že

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sin 1 + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poslední integrál je konvergentní. Proto i zadaný integrál je konvergentní.

4.5. Užití určitého integrálu

Střední hodnota

4.5.1. Střední hodnotou funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, je míněna hodnota

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Ukažte, že pro konstantní funkci je střední hodnota rovna hodnotě funkce.

b) Spočítejte střední hodnotu funkce $f(t) = A \sin \omega t$ (A, ω jsou kladné konstanty) na intervalu $\langle 0, T\rangle$, kde T je perioda funkce f.

c) Spočítejte odmocninu ze střední hodnoty kvadrátu funkce $f(t) = A \sin \omega t$ na intervalu $\langle 0, T\rangle$, kde T je perioda funkce f.

4.5.2. Při sledování populace strukturované podle věku x nazveme populační hustotou funkci $P(x)$ takovou, že integrál $\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá počtu jedinců v populaci, jejichž věk x leží v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 < x_2$.

a) Jak vyjádříme velikost celé populace (zahrneme všechny věkové skupiny)?

b) Jak vyjádříme průměrný věk v populaci?

c) Jak vyjádříme průměrný věk skupiny vymezené věkovým intervalem $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 < x_2$?

d) Jaká je pravděpodobnost, že věk náhodně vybraného jedince padne do intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$?

e) Popište distribuční funkci F pravděpodobnosti z předcházející úlohy.

4.5.3. Závislost produkce na čase popíšeme funkcí $p(t)$, kde čas je zachycen proměnnou t. Celková produkce mezi časy t_1 a t_2, $t_1 < t_2$, je dána výrazem

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Vyjádřete průměrnou produkci v období $\langle t_1, t_2\rangle$, $t_1 < t_2$.

b) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem lineárně tak, že v čase $t = 2$ je poloviční. Napište funkci $p(t)$ a integrací spočítejte průměrnou produkci mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

c) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem podle vztahu $p(t) = p_0(1 - \frac{1}{8}t^2)$. V čase $t = 2$ máme tedy poloviční produkci v porovnání s produkcí v čase $t = 0$. Jaká je průměrná produkce mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

d) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem podle vztahu $p(t) = p_0 2^{-\frac{t}{2}}$. V čase $t = 2$ máme tedy poloviční produkci v porovnání s produkcí v čase $t = 0$. Jaká je průměrná produkce mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

e) Vysvětlete, proč je průměrná produkce nejvyšší v úloze c) a nejnižší v úloze d). Odpovídají tomu hodnoty derivace $p'(0)$?

Vztah mezi zrychlením, rychlostí a dráhou

4.5.4. Rychlost vozidla v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ je popsána funkcí $v(t)$. Jakým výrazem je dána střední hodnota rychlosti vozidla mezi časy t_1 a t_2? Jakým výrazem je popsána dráha $s(t)$ vozidla mezi časy t_1 a t_2? Odpovídá střední hodnota rychlosti tak zvané „průměrné“ rychlosti, kterou jsme zvyklí počítat podle vztahu $(s(t_2) - s(t_1))/(t_2 - t_1)$?

4.5.5. Vyjádřete rychlost $v(t)$ a dráhu $s(t)$ v čase t rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením a na časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$, $t_1 < t_2$. Vyjádřete střední (průměrnou) rychlost na tomto časovém intervalu.

4.5.6. Těleso se začne pohybovat z klidu (v čase $t = 0$) se zrychlením $a(t) = A - \alpha t$, kde A, α jsou kladné konstanty. Jaký je vztah pro rychlost $v(t)$ pohybu v čase t? Jakou dráhu $s(t)$ těleso urazí do okamžiku, v němž je jeho rychlost nulová? Udělejte rozměrovou analýzu výsledku!

4.5.7. Jak vysoko vystoupí těleso vržené na Zemi svisle vzhůru rychlostí v_0 (g je tíhové zrychlení)?

4.5.8. Šikmý vrh na rovině. Jak daleko na rovině doletí těleso vržené pod úhlem α rychlostí v (g je tíhové zrychlení)? Sledujte rychlost ve dvou směrech: v_y ve směru svislém a v_x ve směru vodorovném. Pro jaký úhel α doletí nejdále?

Obsah obrazců v rovině

4.5.9. PŘÍKLAD. Jestliže pro dvě spojité funkce f a g platí

$$g(x) \le f(x) \quad \text{pro všechna čísla } x \in \langle a, b \rangle\,, \tag{$*$}$$

potom obsah rovinného obrazce tvořeného body $(x, y) \in E^2$, které splňují

$$\Big\{(x,y)\,:\, x \in \langle a,b\rangle\,,\, g(x) \le y \le f(x)\Big\}$$

je roven

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poněvadž křivky $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ mají dva společné body $(0,0)$ a $(1,1)$, volíme $g(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$. Potom funkce f a g splňují $(*)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a obsah obrazce omezeného křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ je proto roven

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,.$$

4.5.10. Najděte obsah obrazce omezeného křivkami:

a) $y = 1 - x^2\,,\ y = -2x^2\,,\ x = 0\,,\ x = 2\,,$

b) $y = 2x^2 - x - 2\,,\ y = 4 + 2x - x^2\,,$

c) $y = 2x + 1\,,\ y = 3 + x - x^2\,,$

d) $y = x^2 + x - 3\,,\ 2x - y + 3 = 0\,.$

4.5.11. Najděte obsah obrazce omezeného osou x a křivkami:

a) $y = 2 - \sqrt{x}\,,\ x = 9\,,$

b) $y = \ln x\,,\ x = 2e\,.$

4.5.12. Spočítejte obsah obrazce v E^2 tvořeného body $\{(x,y)\mid 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 1 + |x^4 - 1|\}\,.$

4.5.13. Napište rovnici tečny funkce $f(x) = 2 + \ln(x+1)$ v bodě s x-ovou souřadnicí $x = 0$. Spočítejte obsah obrazce omezeného popsanou tečnou a křivkou $y = x^2$.

4.5.14. Najděte obsah obrazce omezeného křivkou $y = 4 - x^2$, tečnou k této křivce v bodě $(1, ?)$ a přímkou $x = 3$.

Délka křivky

4.5.15. Vysvětlete, proč má vzorec pro délku křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, tvar

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Spočítejte délku úsečky, která spojuje body $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Pro jednoduchost předpokládáme, že $x_1 < x_2$.

b) Spočítejte délku křivky $y = \ln x$, $x \in \langle \frac{3}{4}, \sqrt{3}\rangle$.

c) Spočítejte délku křivky $y = \frac{1}{2}x^2$ mezi body se souřadnicemi $x = -1$ a $x = 1$. Potřebnou primitivní funkci naleznete v úloze 3.1.5.a.

d) Spočítejte délku čtvrtiny kružnice poloměru R.

Objemy a povrchy těles

4.5.16. Cavalieriho princip. Jestliže hodnota $S(x)$ je rovna obsahu řezu tělesa rovinou kolmou na osu x, potom objem tělesa vyťatého dvěma rovinami kolmými na osu x, které protínají osu x v bodech se souřadnicemi $x = a$, $x = b$, $a < b$, se rovná

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Spočítejte objem koule o poloměru R.

b) Spočítejte objem obou částí koule poloměru R, na které je koule rozdělena rovinou, jejíž vzdálenost od středu koule je rovna polovině poloměru R. Správnost výpočtu ověřte sečtením obou výsledků.

4.5.17. Vysvětlete, proč má vzorec pro obsah plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x tvar

$$2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Spočítejte povrch koule o poloměru R.

4.5.18. Z koule poloměru R je rovinou oddělena kulová úseč výšky v. Jaký je její objem V? Jaký je obsah S jejího pláště?

4.5.19. Použijte výsledek předcházejícího cvičení a odvoďte vzorec pro obsah S pláště kulové vrstvy výšky v vyříznuté z koule poloměru R. Je na tomto vzorci něco překvapujícího?

4.5.20. Paraboloid vznikne rotací symetrické části paraboly kolem osy. Spočítejte objem V paraboloidu s výškou v a poloměrem základny r. Spočítejte obsah S pláště takového paraboloidu.

4.5.21. Napište rovnici elipsoidu v E^3 (v proměnných x, y, z), který vznikne rotací elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kolem osy x. Spočítejte jeho objem V. Obsah plochy v obecném případě nespočítáte.

4.5.22. Napište rovnici hyperboloidu v E^3 (v proměnných x, y, z), který vznikne rotací hyperboly

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

kolem osy x. Spočítejte objem tělesa, které je omezeno popsanou plochou a rovinami $x = 0$ a $x = 3a$.

Na závěr

4.5.23. Odvoďte obsah S kruhu poloměru R ze vzorce pro délku kružnice tak, že kruh rozdělíte na „velmi úzká“ mezikruží.

4.5.24. Odvoďte objem V koule poloměru R ze vzorce pro obsah povrchu kulové plochy (sféry) tak, že kouli rozdělíte na „velmi tenké“ kulové „slupky“.

4.5.25. Vodní tok má půlkruhový průřez poloměru R. Rychlost toku je největší na hladině uprostřed, kde má hodnotu v, a klesá kvadraticky s tím, jak se přibližujeme stěně koryta. Rychlost na stěně je nulová. Spočítejte průtok Q. Jaký je podíl tohoto průtoku Q a průtoku Q_H za podmínky, že rychlost v průřezu toku je homogenní (všude stejná) a rovna v?

Řešení.

4.5.1. b) $T = \frac{2\pi}{\omega}$, střední hodnota je $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin z\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Střední hodnota kvadrátu funkce je $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{A^2\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 z\,dz = \frac{A^2}{2}$. Odmocnina z tohoto výrazu je $\frac{A\sqrt{2}}{2}$ (ve fyzice se nazývá efektivní hodnota veličiny popsané funkcí f; napětí nebo proud jsou vhodné příklady).

4.5.2. a) $\int_0^\omega P(x)\,\mathrm{d}x$, kde ω je maximální věk, tj. věk, pro který platí: $x > \omega \Rightarrow P(x) = 0$.

$$\text{b)}\ \frac{\int_0^\omega xP(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\omega P(x)\,\mathrm{d}x}.\ \text{c)}\ \frac{\int_{x_1}^{x_2} xP(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x}.\ \text{d)}\ \frac{\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\omega P(x)\,\mathrm{d}x}.\ \text{e)}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ \frac{\int_0^x P(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\int_0^\omega P(\xi)\,\mathrm{d}\xi} & \text{pro } x \in \langle 0,\omega\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > \omega. \end{cases}$$

4.5.3. a) $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t$. **b)** $p(t) = p_0(1 - \frac{1}{4}t)$, $\frac{3}{4}p_0$. **c)** $\frac{5}{6}p_0 \doteq 0.83p_0$. **d)** $\frac{1}{2\ln 2}p_0 \doteq 0.72p_0$. **e)** Grafy funkcí popisujících produkci spojují dva stejné body. Graf je konkávní v případě c), lineární v b) a konvexní v případě d).

4.5.4. Střední hodnota rychlosti: $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$. Dráha v čase t: $s(t) = s(t_1) + \int_{t_1}^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Ano, poněvadž podle předcházejícího vzorce je $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

4.5.5. $v(t) = v(t_1) + a(t - t_1)$, $s(t) = s(t_1) + \int_{t_1}^t v(\tau)\,d\tau = s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}a(t - t_1)^2$. Střední (průměrná) rychlost je $v(t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)$.

4.5.6. $v(t) = \frac{1}{2}(2A - \alpha t)t$, rychlost je rovna nule v čase $t = \frac{2A}{\alpha}$; $s(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{6}\alpha t^3$; uražená dráha je $s(\frac{2A}{\alpha}) = \frac{2A^3}{3\alpha^2}$; rozměry konstant A, α jsou $[A] = \mathrm{ms}^{-2}$, $[\alpha] = \mathrm{ms}^{-3}$.

4.5.7. $v(t) = v_0 - gt$, rychlost je rovna nule v čase $t = \frac{v_0}{g}$; $s(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$; výška výstupu je proto $s(\frac{v_0}{g}) = \frac{v_0^2}{2g}$.

4.5.8. $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$, proto rychlost ve svislém směru v čase t je $v(t) = v_y - gt$ a dráha s_y ve svislém směru je $s_y(t) = v_yt - \frac{1}{2}gt^2$. Odsud zjistíme, že těleso se v čase $t = \frac{2v_y}{g}$ vrátí do vodorovné roviny, z níž bylo vrženo. Poněvadž dráha $s_x(t)$ za čas t ve směru vodorovném je $s_x(t) = \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = v_xt$, dostaneme dosazením času pro délku vrhu hodnotu $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$.

4.5.10. a) $\frac{14}{3}$, **b)** $\frac{27}{2}$, **c)** $\frac{9}{2}$, **d)** $\frac{125}{6}$. **4.5.11. a)** $\frac{8}{3}$, **b)** $1 + 2e\ln 2$.

4.5.12. 8. **4.5.13.** $\frac{9}{2}$. **4.5.14.** $\frac{8}{3}$. **4.5.15. b)** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 3$. **c)** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. **d)** $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in \langle 0, R\rangle$; při integraci použijte substituci $x = R\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

4.5.16. a) $\pi\displaystyle\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi R^3$. **b)** $\pi\displaystyle\int_{\frac{R}{2}}^{R}(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24}\pi R^3$, $\pi\displaystyle\int_{-R}^{\frac{R}{2}}(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}\pi R^3$.

4.5.17. $4\pi R^2$. **4.5.18.** $V = \frac{1}{3}\pi v^2(3R - v)$, $S = 2\pi Rv$. **4.5.19.** $S = 2\pi Rv$. Vzorec nezávisí na tom, kde jsou v kouli řezy vedeny, ale pouze na vzdálenosti v rovin, které kulovou vrstvu vymezují.

4.5.20. $V = \frac{1}{2}\pi r^2v$, $S = \frac{\pi r}{6v^2}\left((r^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}} - r^3\right)$.

4.5.21. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$, $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$. **4.5.22.** $\frac{y^2+z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $V = 12\pi ab^2$.

4.5.23. $S = \int_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2$. **4.5.24.** $V = \int_0^R 4\pi r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi R^3$. **4.5.25.** $Q = \frac{1}{4}\pi R^2v$, $Q : Q_H = \frac{1}{2}$.

4.6. Integrály v pravděpodobnosti

4.6.1. Buď X spojitá náhodná veličina s hodnotami v intervalu $(-\infty,\infty)$. Funkci f nazveme **hustotou pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny X (stručně hustotou náhodné veličiny X), když se dá hodnotou $f(\xi)\,\delta$ „velmi dobře" vystihnout pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina X nabývá hodnot z „malého" intervalu $(\xi - \frac{1}{2}\delta, \xi + \frac{1}{2}\delta)$. V mlhavých termínech se dá říci, že aproximace této pravděpodobnosti je tím lepší, čím je délka zmíněného intervalu – tedy δ – menší. Rozdělením intervalu, v němž se hodnota náhodné veličiny má pohybovat, dospějeme limitním procesem k vyjádření pravděpodobnosti $P(a < X < b)$, s jakou náhodná veličina X nabývá hodnot z konečného intervalu (a,b), $a < X < b$. Tato pravděpodobnost se vyjádří integrálem

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Proto pro hodnotu **distribuční funkce** $F(x)$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X je menší než x, platí

$$F(x) \equiv P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Pokud pro danou náhodnou veličinu existuje hustota, je $P(X = a) = P(x = b) = 0$, a proto všechny následující výrazy mají stejnou hodnotu: $P(a < X \le b)$, $P(a \le X < b)$, $P(a \le X \le b)$, $P(a < X < b)$.

Napište výraz, který ukazuje, jak se liší $P\bigl(x - \frac{1}{2}\delta < X < x + \frac{1}{2}\delta\bigr)$ od své aproximace $f(x)\,\delta$, $\delta > 0$, jestliže hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je popsána funkcí f.

4.6.2. Napište vyjádření střední hodnoty μ a rozptylu (variance) σ^2 náhodné veličiny X, pro kterou existuje hustota f.

4.6.3. Jak bude vypadat hustota f pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která se stejnou pravděpodobností nabývá hodnoty pouze z intervalu (a,b), $a < b$? Jak vypadá distribuční funkce F náhodné veličiny X? Spočítejte střední hodnotu a rozptyl X.

4.6.4. Jak zvolit κ, aby funkce

$$f(x) = \frac{\kappa}{e^x + e^{-x}}$$

byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny s hodnotami v $(-\infty,\infty)$? Spočítejte příslušnou distribuční funkci.

4.6.5. Obecné momenty náhodné veličiny X s reálnými hodnotami a hustotou f jsou definovány vztahy

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokažte, že pro rozptyl (varianci) platí $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

4.6.6. Buď X náhodná veličina s hodnotami v $(-\infty,\infty)$ a hustotou f. Její střední hodnotu označíme μ a rozptyl σ^2. Buď α kladná konstanta.

a) Určete koeficient κ tak, aby funkce $f_\alpha(x) = \kappa f(\frac{x}{\alpha})$ byla hustotou nějaké náhodné veličiny X_α.

b) Spočítejte střední hodnotu μ_α a rozptyl σ_α^2 náhodné veličiny X_α.

c) Funkce f_α je hustotou náhodné veličiny αX. Srovnejte se cvičením 4.6.22.

Řešení. **4.6.1.** $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta}\bigl(f(\xi) - f(x)\bigr)\,\mathrm{d}\xi$. **4.6.2.** $\mu = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\xi f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $\sigma^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\xi - \mu)^2 f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

4.6.3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in (a,b), \\ 1 & \text{pro } x \ge b. \end{cases} \qquad \mu = \frac{a+b}{2},\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4.6.4. $\kappa = \frac{2}{\pi}$. $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^x)$. **4.6.6. a)** $\kappa = \frac{1}{\alpha}$. **b)** $\mu_\alpha = \alpha\mu$, $\sigma_A^2 = \alpha^2\sigma^2$.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti

4.6.7. V čase $t = 0$ máme fungující (elektronické) zařízení, náhodná veličina X popisuje životnost takového zařízení. Pravděpodobnost, že zařízení selže až po uplynutí času t, se označuje $P(t < X)$. Pravděpodobnost, že zařízení selže v časovém intervalu (t_1, t_2), je $P(t_1 < X < t_2)$. Budeme se zabývat vlastnostmi náhodné veličiny X, když za její hustotu vezmeme tuto funkci s parametrem λ, $\lambda > 0$:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \leq 0\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Vyřešte tyto úlohy s právě definovanou hustotou f ($t > t_1 \geq 0$):

a) $P(X < t) = P(0 < X < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, b) $P(t < X) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau = e^{-\lambda t}$,

c) $P(t_1 < X < t) = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t}$, d) $P(0 < X) = 1$,

e) střední hodnota μ náhodné veličiny X je rovna $\mu = \int_0^\infty t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$,

f) rozptyl σ^2 náhodné veličiny X je roven $\sigma^2 = \int_0^\infty (t-\mu)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$.

g) Kolik je $\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(X < t)$? Nakreslete graf $t \to P(X < t)$.

4.6.8. POZNÁMKA. Pravděpodobnost toho, že zařízení, které fungovalo v čase T, neselže ještě po další dobu t (podmíněná pravděpodobnost – náhodný jev spočívá v tom, že zařízení funguje po dobu $T + t$ ovšem za podmínky, že fungovalo po dobu T), je dána vztahem (který je třeba trochu rozmyslet)

$$\frac{P(T + t < X)}{P(T < X)}\,.$$

Podle předcházejícího výsledku víme, že $P(t < X) = e^{-\lambda t}$, lze proto psát

$$\frac{P(T + t < X)}{P(T < X)} = \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda t}\,.$$

Výsledek ukazuje, že důsledkem volby hustoty f podle vztahu 4.6.7.(*) je, že životnost má tuto vlastnost: jestliže zařízení v jistém okamžiku funguje, je z hlediska další životnosti stejně dobré jako zařízení nové.

4.6.9. POZNÁMKA. V předcházejících cvičeních jsme počítali integrály

$$\int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

pro $k = 1, 2$. K jejich výpočtu jsme použili integraci per partes. Věc lze zjednodušit užitím obratu, který vychází z jednoduchého vztahu

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\,,$$

který platí pro všechna $\lambda \in (0, \infty)$. Tento vztah derivujeme podle λ. Vlevo přesuneme derivaci za integrační znamení (to není samozřejmá operace, vynechat její ospravedlnění by si studenti matematiky dovolit nemohli; my se tím však zabývat nemůžeme). Násobíme -1 a jako výsledek dostaneme relaci

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Můžeme derivovat podle λ dále a dostaneme, že pro každé kladné λ a každé přirozené číslo k platí

$$\int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\,. \qquad (*)$$

4.6.10. Odvoďte vztah pro k-tý obecný moment m_k náhodné veličiny X. Potom znovu spočítejte rozptyl.

4.6.11. Náhodná veličina Y popisuje dobu životnosti dvou zařízení. Prvního, jehož životnost je popsána hustotou 4.6.7.(*) s $\lambda = \lambda_1$, a druhého, jehož životnost je popsána hustotou 4.6.7.(*) s $\lambda = \lambda_2$ (střední délka života prvního zařízení je tedy $1/\lambda_1$ a druhého je $1/\lambda_2$). Náhodný jev spočívá v tom, že používáme jedno zařízení po celou dobu, co funguje, a potom používáme druhé zařízení až do doby, kdy přestane pracovat. Náhodná veličina Y popisuje celkovou dobu do selhání druhého zařízení.

a) Ukažte, že hustota $g(t)$ náhodné veličiny Y je pro $t \leq 0$ rovna nule a pro $t > 0$ je dána vztahem

$$g(t) = \lambda_1\lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_1\tau} e^{-\lambda_2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

b) Spočítejte hustotu $g(t)$ pravděpodobnosti náhodné veličiny Y pro případ $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

c) Ověřte, že $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

d) Spočítejte cvičení b) a c) pro případ stejných hodnot λ_1 a λ_2, píšeme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

e) Jestliže životnost prvního zařízení je vyjádřena náhodnou veličinou X_1, životnost druhého zařízení náhodnou veličinou X_2, potom náhodná veličina Y je součtem dvou náhodných veličin X_1 a X_2, $Y = X_1 + X_2$.

4.6.12. Pokud za hustoty pravděpodobnosti v předcházející úloze vezmeme obecné funkce f_1 a f_2 (nulové pro $t < 0$), má výraz pro hustotu náhodné veličiny Y tvar

$$g(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Ukažte, že g se dá zapsat také takto:

$$g(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

4.6.13. Ověřte, že vzhledem k tomu, že funkce f_1, f_2 jsou rovny nule pro $t < 0$, je možné integrovat přes interval $(-\infty, \infty)$ a psát výraz, který není komplikován přítomností konečných mezí v integrálu

$$g(t) = \int_{-\infty}^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Integrály tohoto typu se nazývají **konvoluční integrály**.

Řešení. **4.6.7. g)** λ. **4.6.10.** Vztah 4.6.9.(*) násobíme λ, dostaneme $m_k = \frac{k!}{\lambda^k}$. Poněvadž můžeme použít vztahu $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$, dříve odvozený vztah $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ dostaneme okamžitě dosazením.

4.6.11. b) $g(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$. **d)** $g(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$.

4.6.12. Substituce nové proměnné u pomocí vztahu $u = t - \tau$.

Normální rozdělení pravděpodobnosti

4.6.14. POZNÁMKA. Hustota $f_{\mu,\sigma}$ normálního rozdělení náhodné veličiny X se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, $\sigma > 0$, je

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Hustotu normovaného (standardizovaného) normálního rozdělení (normální rozdělení s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$) označíme φ, tj.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Potom pro distribuční funkci normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 platí

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi .$$

Označme Φ distribuční funkci normovaného (standardizovaného) normálního rozdělení

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi .$$

4.6.15. Ukážeme, že

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) .$$

Substitucí v prvním integrálu nahradíme proměnnou ξ proměnnou η podle vztahu $\xi = \mu + \sigma\eta$. To znamená $\mathrm{d}\xi = \sigma\mathrm{d}\eta$, dolní meze jsou pro obě proměnné rovny $-\infty$ a horní mez, jež je x pro proměnnou ξ, přejde na hodnotu $(x-\mu)/\sigma$ pro proměnnou η. Proto

$$P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,\mathrm{d}\eta = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) .$$

4.6.16. Ukažte, že Φ je rostoucí funkce na intervalu $(-\infty, \infty)$, jejíž limita v bodě $-\infty$ je rovna nule. Poněvadž Φ má být distribuční funkcí rozdělení pravděpodobnosti, musí také platit

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1 .$$

Tím se budeme zabývat v následujícím cvičení.

4.6.17. Ukážeme, že

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1 .$$

Poněvadž primitivní funkci není možné vyjádřit pomocí elementárních funkcí, budeme postupovat jinak. Hodnotu integrálu označíme I. Je to kladné číslo, poněvadž integrovaná funkce je kladná na celém integračním oboru. Integrál, který vyjadřuje I, můžeme zapsat dvěma způsoby, které se liší pouze označením proměnné. Tedy

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y .$$

Proto jejich součin je roven

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y ,$$

což znamená, že se integruje přes celou rovinu. Integruje se funkce dvou proměnných $(x,y) \to e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, která má stejnou hodnotu $e^{-\frac{r^2}{2}}$ pro všechny body, které leží na kružnici poloměru r se středem v počátku. Když tuto hodnotu vezmeme na mezikruží vnitřního poloměru r a vnějšího poloměru $r + dr$, dostaneme k celkové hodnotě integrálu příspěvek $2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr$. Rovinu – celý integrační obor – vyčerpáme tak, že proměnnou r necháme probíhat interval $(0, \infty)$. Tím se nahoře uvedený dvojný integrál pro I^2 převede na tvar

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = 1 .$$

Poněvadž hodnota I nemůže být záporná, máme $I = 1$.

4.6.18. Ukážeme, že střední hodnota rozdělení pravděpodobnosti s hustotou $f_{\mu,\sigma}$ je rovna μ a rozptyl je roven σ^2 – tak jak čekáme. Jde o tyto rovnosti:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mu , \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2 .$$

Substituci $x = \mu + \sigma y$ uplatníme na oba integrály. První převedeme na

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma y) e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y ,$$

který se roztrhne na dva. První dává μ a druhý – jakožto integrál z liché funkce – je roven nule. Druhý integrál přejde stejnou substitucí na

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y ,$$

který je roven σ^2, poněvadž se užitím integrace per partes dokáže, že

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = 1 .$$

4.6.19. Ukažte, že pro distribuční funkci Φ normovaného normálního rozdělení platí:

a) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. b) $\Phi(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Phi(-x)$.

To ukazuje, že graf distribuční funkce Φ je symetrický vzhledem k bodu $(0, \frac{1}{2})$.

c) Pro všechna x je $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, a proto tabulky funkce Φ uvádějí hodnoty pouze pro $x > 0$.

d) Kolik je hodnota derivace funkce Φ v nule? e) Nakreslete průběh funkce Φ.

4.6.20. Ukažte, že pro normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, $\sigma > 0$, platí:

a) $P(a < X < b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$. b) $P(|X-\mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1$.

c) $P(|X-\mu| < a) = 2\Phi\Big(\frac{a}{\sigma}\Big) - 1$. d) $P(|X-\mu| > a) = 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{a}{\sigma}\Big)\Big)$.

4.6.21. Jako výše odvoďte, že $P(|X-\mu| > k\sigma) = 2(1-\Phi(k))$ pro $k > 0$. Pro $k = 3$ se mluví o pravidlu tří sigma. Platí, že $2(1 - \Phi(3)) \doteq 0{,}0027$. Poněvadž primitivní funkci pro výpočet $\Phi(3)$ nenajdeme, je třeba tuto hodnotu získat pomocí vhodného numerického výpočtu. Tento výpočet je v dnešní době, kdy počítač je téměř na každém stole, věcí vhodného programu (Excel stačí). V době, kdy tomu tak nebylo, se hodnoty funkce Φ čerpaly z tabulek. Byly také odvozeny přibližné vztahy, s jejichž pomocí se hodnoty funkce Φ dají získat nepříliš pracně s pomocí kalkulačky. Jeden z nich uvedeme. Funkce definovaná vztahem [Abramowitz, Stegun, vztah 26.2.18, strana 932]

$$P(x) = 1 - \tfrac{1}{2}\big(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4\big)^{-4} ,$$

v němž konstanty mají hodnoty

$$c_1 = 0.196854 , \; c_2 = 0.115194 , \; c_3 = 0.000344 , \; c_4 = 0.019527 ,$$

se dá vzít za dobrou aproximaci funkce Φ, poněvadž platí

$$|\Phi(x) - P(x)| < 2.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\infty, \infty) .$$