Spočítejte na kalkulačce $\Phi(3)$. Polynom pro výpočet $P(x)$ uspořádejte takto (Hornerovo schéma):

$$(((c_4x + c_3)x + c_2)x + c_1)x + 1$$

a postupujte zevnitř ven – začnete c_4x a jedničku přičtete až v poslední operaci.

4.6.22. Ukažte, že má-li náhodná veličina X s normálním rozdělením střední hodnotu μ a rozptyl σ^2, potom náhodná veličina $Y = \alpha X + \beta$ s libovolnými konstantami α a $\beta > 0$, má normální rozdělení se střední hodnotu $\alpha\mu + \beta$ a rozptylem $\alpha^2\sigma^2$. Srovnejte se cvičením 4.6.6.

4.6.23. Ze vztahů nahoře uvedených vidíme, že pro každé kladné číslo σ platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma\,.$$

Derivujeme podle σ obě strany rovnosti, násobíme σ^3 a máme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^3\,. \qquad (*)$$

Dosadíme $\sigma = 1$ a dostaneme výsledek, k němuž jsme ve 4.6.18. museli použít integraci per partes. Odvoďte vztahy pro momenty náhodné veličiny s hustotou $f_{0,\sigma}$ – normálního rozdělení s nulovou střední hodnotu –, tj. spočítejte integrály

$$m_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. **4.6.19. a)** Integrand v definici funkce Φ je funkce sudá. Proto integrál přes $(-\infty, 0)$ je roven interálu přes $(0,\infty)$, a každý z nich se proto musí rovnat $\frac{1}{2}$. **b)** Vztah bude dokázán, jakmile se zjistí, že $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. V integrálu, který dává $\Phi(-x)$, použijeme substituce $\xi = -y$, kterou se integrál přes interval $(-\infty, -x)$ převede na integrál přes (x, ∞). Proto můžeme psát

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = 1\,.$$

Tím jsme vztah dokázali. **d)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

4.6.20. a) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a)$; což je rozdíl distibuční funkce v hodnotách b a a.

4.6.21. Přibližná hodnota po zaokrouhlení na pět desetinných míst je 0.99842. Přesná hodnota zaokrouhlená na pět desetinných míst je 0.99865. Rozdíl je 0.00023, což je ve shodě se shora uvedeným odhadem přesnosti aproximace.

4.6.22. Tvrzení vyplývá z této série rovností:

$$P(Y < x) = P(\alpha X + \beta < x) = P\big(X < \frac{x-\beta}{\alpha}\big)$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{x-\beta}{\alpha} - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\big(\frac{x - (\alpha\mu + \beta)}{\alpha\sigma}\big)\,.$$

4.6.23. Pro k liché integrujeme lichou funkci, proto dostaneme $m_k = 0$. Pro sudé kladné indexy, vyjádřené ve tvaru $2k$, k kladné, se výsledek dostaneme tak, že vztah $(*)$ postupně derivujeme podle σ a násobíme σ^3. Pro $k > 1$ zjistíme, že

$$m_{2k} = 1\cdot 3 \cdot\ \ldots\ \cdot (2k-1)\,\sigma^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}\,.$$

Výraz za posledním rovnítkem má smysl i pro $k = 0$ a $k = 1$. Dává $m_0 = 1$ a $m_2 = \sigma^2$.

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

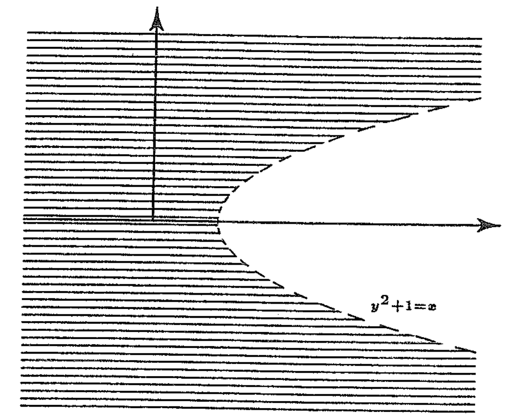
5.1. Funkce dvou proměnných; základní pojmy

5.1.1. PŘÍKLAD. Definiční obor funkce dvou proměnných je podmnožina E^2. Pro funkci

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x + 1}}$$

je definiční obor roven množině

$$D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y^2 + 1 > x\}\,.$$



Jestliže chceme množinu $D(f)$ graficky zachytit, kreslíme obrazec v rovině. Část patřící do $D(f)$ šrafujeme. Pokud části omezující křivky, které tvoří hranici obrazce, patří (resp. nepatří) do definičního oboru, kreslíme tyto části plnou (resp. přerušovanou) čarou.

5.1.2. Najděte a načrtněte definiční obor a zjistěte, zda funkce je na $D(f)$ omezená shora a zdola:

a) $f(x,y) = \ln(y + x^2 - 1)$, **b)** $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y}$, **c)** $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + xy + y^2}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2}}$, **e)** $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y+1}{x-2}}$, **f)** $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y + 2x^2 + 8x}}$,

g) $f(x,y) = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$, **h)** $f(x,y) = \sqrt{y - (x+1)^3}$, **i)** $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y}$,

j) $f(x,y) = \sqrt{(x+1)^3 - y} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, **k)** $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Řešení.

5.1.2. a) funkce není omezená na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > 1 - x^2\}$,

b) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \le 4 - x^2\}$,

c) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \ne (0,0)\}$,

d) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 2 \ \wedge\ y \ge -1\}$,

e) funkce je omezená zdola a není omezená shora na definičním oboru (jehož zápis je poněkud nepřehledný) $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 2 \ \wedge\ y \ge -1\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 2 \ \wedge\ y \le -1\}$,

f) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > 8 - 2(x+2)^2\}$,

g) funkce je omezená shora a není omezená zdola na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1\}$,

h) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \ge (x+1)^3\}$,

i) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid -2 \le x \le 2 \wedge 0 \le y\}$,

j) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > -1 \ \wedge\ 0 < y \le (x+1)^3\}$,

k) funkce je omezená zdola a je taky omezená shora na $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \ge 0\}$.

5.1.3. Na přímce p_1: $x_1 = t$, $x_2 = t$ a na přímce p_2: $x_1 = t$, $x_2 = -t$ sledujte pro t z prstencového okolí bodu nula hodnoty funkce

$$g(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

a ukažte, že limita funkce g v bodě $(0,0)$ neexistuje.

5.1.4. Pomocí polárních souřadnic $x_1 = r\cos\lambda$, $x_2 = r\sin\lambda$ sledujte pro r z pravého okolí nuly hodnoty funkce

$$h(x_1, x_2) = \frac{4x_1^2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

a ukažte, že limita funkce h v bodě $(0,0)$ se rovná nule.

5.1.5. Jak vypadají plochy, které jsou grafy funkcí

a) $f(x,y) = 2$, b) $f(x,y) = 1 - x$, c) $f(x,y) = 2 - y$, d) $f(x,y) = 1 - x - y$,
e) $f(x,y) = x^2$, f) $f(x,y) = 1 - x^2$, g) $f(x,y) = y^2 - 1$, h) $f(x,y) = 4 - y^2$,
i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, j) $f(x,y) = -x^2 - 9y^2$, k) $f(x,y) = x^2 - y^2$, l) $f(x,y) = y^2 - x^2$?

5.1.6. Pro funkci f s definičním oborem $D(f) = E^2$ definujeme funkci

$$p(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt),$$

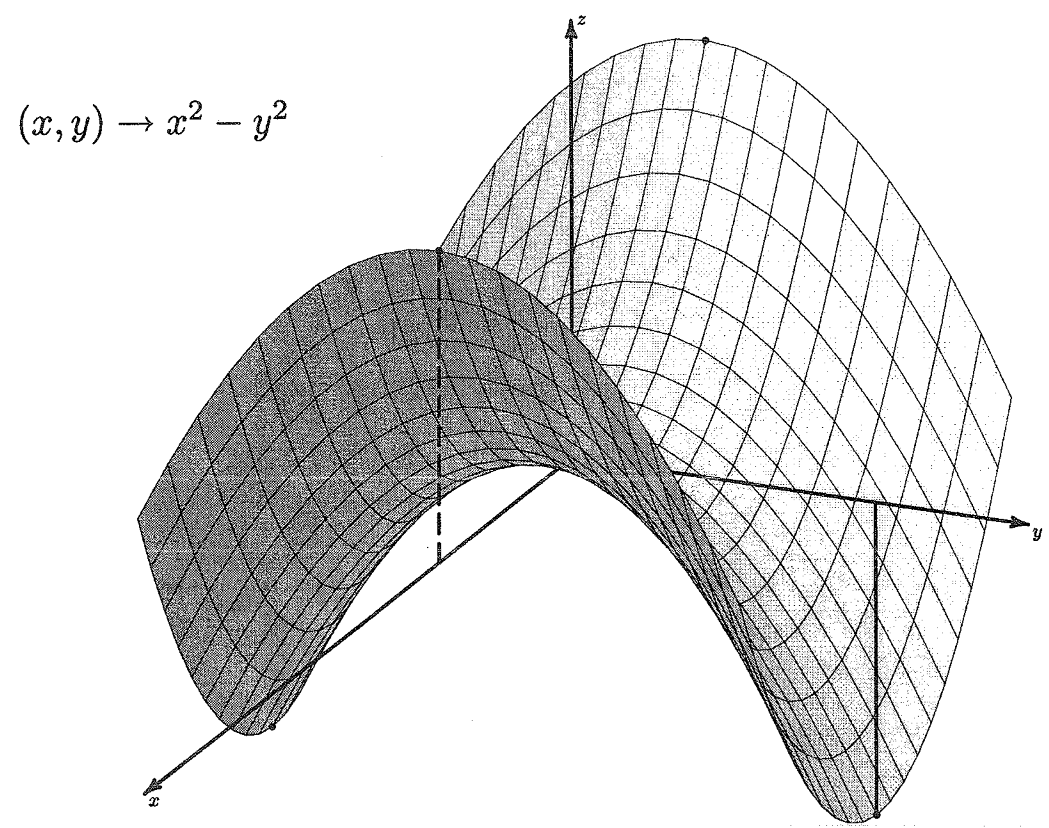
kde (x_0, y_0) je libovolný bod roviny a (a,b) je libovolný vektor délky jedna, tj. $a^2 + b^2 = 1$. Co představuje funkce p?

5.1.7. Ukažte, že plochy představované grafy následujících funkcí jsou rotačně symetrické vzhledem k ose z; najděte řezy ploch rovinami, které obsahují osu z; jak vypadají množiny

$$\{(x,y) \in E^2 \mid f(x,y) = c\}$$

pro různé hodnoty c, když

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$, c) $f(x,y) = \ln(5 - x^2 - y^2)$?



Řešení. 5.1.3. Pro $t \neq 0$ platí $g(t,t) = 1$ a $g(t,-t) = -1$, proto limita v bodě $(0,0)$ neexistuje. **5.1.4.** Pro $r > 0$ platí $h(r\cos\lambda, r\sin\lambda) = r^2\sin^2 2\lambda$. Proto $|h(r\cos\lambda, r\sin\lambda)| \le r^2$. Odtud vyplývá, že limita funkce h v bodě $(0,0)$ je rovna nule. **5.1.5. k)** Plocha je na obrázku. **5.1.6.** Graf funkce p je řez plochy $z = f(x,y)$ rovinou, která prochází bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a jejíž normála je $(b, -a, 0)$. Tato rovina je rovnoběžná s osou z.

5.2. Parciální derivace jednoduchých funkcí a jejich užití

5.2.1. Rozhodněte, zda daná funkce je na svém definičním oboru omezena zdola (resp. shora); spočítejte všechny první a druhé parciální derivace a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; potom dosaďte do diferenciálního výrazu:

a) $f(x,y) = -1 + x - 2y - \sqrt{xy}$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$,

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $f_{xx} + f_{yy}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $xf_x + yf_y$.

5.2.2. Rozhodněte, zda daná funkce je na E^2 omezena zdola (resp. shora); spočítejte všechny první a druhé parciální derivace a potom najděte lokální extrémy:

a) $f(x,y) = x^3 - y^2 - 2xy - x$, b) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 6y^2 + 2x$,
c) $f(x,y) = xy(6 - x - y)$, d) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,
e) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y - 3$, f) $f(x,y) = xy\,e^{x - \frac{y^2}{2}}$.

5.2.3. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace dané funkce a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; potom najděte všechny lokální extrémy dané funkce na množině $\mathcal{O}$ a pokuste se ukázat, že jsou vlastně globálními (absolutními) extrémy:

a) $f(x,y) = 2x^2 + 8x + y^2 - 2y$, b) $f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$,
c) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$, d) $f(x,y) = 2x\sqrt{y} - 2x^2 + 2x - y$.

5.2.4. Ujasněte si tvar křivky $z = x^4 - 2x^2 \equiv (x^2 - 1)^2 - 1$. Potom si představte plochu $z = x^4 - 2x^2 + y^2$ a popište z názoru všechny její stacionární body. Závěry ověřte výpočtem.

5.2.5. Diferenciál funkce f proměnných x, y v bodě $P = (x_0, y_0)$, v němž má funkce f spojité obě parciální derivace prvního řádu, je dán výrazem

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y.$$

Jestliže chceme také zachytit bod P a přírůstky h_x, h_y proměnných x, y, píšeme

$$\mathrm{d}f(P)(h_x, h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,h_y.$$

Diferenciál vyjadřuje lineární (v přírůstcích h_x, h_y proměnných x, y) přiblížení toho, jak se změní hodnota funkce, když z bodu (x_0, y_0) postoupíme do „blízkého" bodu $(x_0 + h_x, y_0 + h_y)$. Přesně řečeno, označíme-li

$$R(x_0, y_0)(h_x, h_y) = f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) - \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,h_y\Big),$$

platí

$$\lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{|R(x_0, y_0)(h_x, h_y)|}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0.$$

Najděte diferenciál funkce f v daném bodě pro

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ a obecný bod, b) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a obecný bod,

c) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 2y^2}$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

5.2.6. Najděte normálový vektor $\vec{n}_P$, který svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel, a obecnou rovnici tečné roviny v bodě $P = (x_0, y_0, z_0)$ plochy $z = f(x,y)$ pro

a) $f(x,y) = xy^2$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

c) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x^2 y}$, $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, d) $f(x,y) = xy + 2x - y$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

5.2.7. Pro funkci f, která má n nezávisle proměnných a která má v bodě $(x_1, \dots, x_n)$ všechny parciální derivace prvního řádu, je gradient ∇f v bodě $P = (x_1, \dots, x_n)$ definován výrazem

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \Big) .$$

Spočítejte gradient pro

a) $f(x,y) = x^3 y^2 - y + 1$, $P = (1, 1)$, b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{xy+2}{y^2}}$, $P = (2, -1)$,

c) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ a obecný bod P, d) $f(x,y) = \cos\big((\pi - x)(y+1)\big)$, $P = (\frac{1}{2}\pi, 0)$.

5.2.8. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = 5x^2 y - 4x - 2y$ v bodě $P = (1, 1)$ ve směru $\vec{s}$, který jde z bodu P do bodu $Q = (4, 5)$.

5.2.9. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 y$ v obecném bodě $P = (x,y)$ kružnice se středem v počátku $O = (0,0)$, ve směru $\vec{s}$, který je ke kružnici tečný a je v souhlase s kladným směrem oběhu kružnice.

5.2.10. Najděte derivaci funkce $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

a) v obecném bodě $P = (x_1, x_2, x_3)$ ve směru $\vec{s}$, který jde z bodu P do počátku $O = (0,0,0)$, $P \neq O$,

b) v obecném bodě $P = (x_1, x_2, x_3)$ ve směru $\vec{s}$, tečném ke sféře, která má střed v počátku $O = (0,0,0)$ a prochází bodem P.

5.2.11. Najděte minimum a maximum funkce f na kompaktní množině M, když

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \, , \, 0 \le y \le 3\}$,

b) $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x - 6y$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3 \, , \, 0 \le y \le 4\}$,

c) $f(x,y) = x^2(y^2 + 1) - 2xy - 2x$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \, , \, 0 \le y \le 2\}$.

5.2.12. Najděte minimum a maximum funkce f na kompaktní množině M, když

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ a M je vymezena $x + y + 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$,

b) $f(x,y) = (2x + 1)y$ a M je vymezena $y = x^2 - 4$, $y = 0$,

c) $f(x,y) = 2xy + 3x - 12y$ a M je vymezena $x = y^2$, $x = 4$.

Řešení.

5.2.1. a) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x \wedge 0 < y\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y < 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 - \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-1}{4\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ na $\mathcal{O}$,

b) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_{xx} + f_{yy} = 0$ na $\mathcal{O}$,

c) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \sin\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x^{\frac{3}{2}}} \cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y}{x^{\frac{5}{2}}} \cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2 + 4y^2}{4x^{\frac{7}{2}}} \sin\dfrac{y}{x}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x^{\frac{5}{2}}} \sin\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-1}{x^{\frac{3}{2}}} \sin\dfrac{y}{x}$, $x f_x + y f_y = \frac{1}{2} f$ na $\mathcal{O}$.

5.2.2. a) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 3x^2 - 2y - 1$, $f_y(x,y) = -2(x + y)$, $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = -2$, stacionární body jsou $A = (-1, 1)$ – lokální maximum a $B = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ – sedlo,

b) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 2(x + 1 - y^2)$, $f_y(x,y) = -4y(x - 3)$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -4y$, $f_{yy}(x,y) = -4x + 12$, stacionární body jsou $A = (-1, 0)$ – lokální minimum, $B = (3, 2)$ – sedlo a $C = (3, -2)$ – sedlo,

c) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = y(6 - 2x - y)$, $f_y(x,y) = x(6 - x - 2y)$, $f_{xx}(x,y) = -2y$, $f_{xy}(x,y) = 2(3 - x - y)$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, stacionární body jsou $A = (2, 2)$ – lokální maximum a $B = (0, 0)$ – sedlo, $C = (6, 0)$ – sedlo, $D = (0, 6)$ – sedlo,

d) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 6x^2 - y^2 + 10x$, $f_y(x,y) = -2y(x - 1)$, $f_{xx}(x,y) = 2(6x + 5)$, $f_{xy}(x,y) = -2y$, $f_{yy}(x,y) = -2(x - 1)$, stacionární body jsou $A = (0, 0)$ – lokální minimum, $B = (1, 4)$ – sedlo, $C = (1, -4)$ – sedlo, $D = (-\frac{5}{3}, 0)$ – sedlo,

e) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 3(x^2 - 1)$, $f_y(x,y) = -6(y^2 - 1)$, $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = -12y$, stacionární body jsou $A = (1, -1)$ – lokální minimum, $B = (-1, 1)$ – lokální maximum, $C = (1, 1)$ – sedlo a $D = (-1, -1)$ – sedlo,

f) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = (x + 1)y\,\mathrm{e}^{x - \frac{y^2}{2}}$, $f_y(x,y) = -x(y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x - \frac{y^2}{2}}$, $f_{xx}(x,y) = (x + 2)y\,\mathrm{e}^{x - \frac{y^2}{2}}$, $f_{xy}(x,y) = -(x + 1)(y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x - \frac{y^2}{2}}$, $f_{yy}(x,y) = xy(y^2 - 3)\,\mathrm{e}^{x - \frac{y^2}{2}}$, stacionární body jsou $A = (-1, 1)$ – lokální minimum, $B = (-1, -1)$ – lokální maximum a $C = (0, 0)$ – sedlo.

5.2.3. a) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená shora, $f_x(x,y) = 4(x + 2)$, $f_y(x,y) = 2(y - 1)$, $f_{xx}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2$, stacionárním bodem je $A = (-2, 1)$ – globální (absolutní) minimum,

b) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < y\}$, funkce není omezená shora, $f_x(x,y) = 2(3x - \sqrt{y} - 4)$, $f_y(x,y) = \dfrac{\sqrt{y} - x}{\sqrt{y}}$, $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{y}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}$, stacionárním bodem je $A = (2, 4)$ – globální (absolutní) minimum,

c) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x\}$, funkce není omezená zdola, $f_x(x,y) = \dfrac{y - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $f_y(x,y) = \sqrt{x} - 2y + 6$, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{-y}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_{yy}(x,y) = -2$, stacionárním bodem je $A = (4, 4)$ – globální (absolutní) maximum,

d) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < y\}$, funkce není omezená zdola, $f_x(x,y) = 2(\sqrt{y} - 2x + 1)$, $f_y(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}} - 1$, $f_{xx}(x,y) = -4$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{-x}{2y^{\frac{3}{2}}}$, stacionárním bodem je $A = (1, 1)$ – globální (absolutní) maximum.

5.2.4. Dvě globální minima v bodech $A = (-1,0)$ a $B = (1,0)$, sedlo v bodě $C = (0,0)$.

5.2.5. a) $\mathrm{d}f = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y$, **b)** $\mathrm{d}f = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, **c)** $\mathrm{d}f = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$, **d)** $\mathrm{d}f = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

5.2.6. a) $P = (-2,1,-2)$, $\vec{n}_P = (-1,4,1)$, $x - 4y - z + 4 = 0$, **b)** $P = (0,0,0)$, $\vec{n}_P = (0,0,1)$, $z = 0$, **c)** $P = (-1,0,-1)$, $\vec{n}_P = (-1,1,1)$, $x - y - z = 0$, **d)** $P = (1,-2,2)$, $\vec{n}_P = (0,0,1)$, $z = 0$.

5.2.7. a) $\nabla f(P) = (3,1)$, **b)** $\nabla f(P) = (-1,2)$, **c)** $\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)$, **d)** $\nabla f(P) = (1,-\frac{1}{2}\pi)$.

5.2.8. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(P) = 6$. **5.2.9.** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x,y) = \dfrac{x(x^2-2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.2.10. a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x_1,x_2,x_3) = -\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, **b)** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x_1,x_2,x_3) = 0$.

5.2.11. a) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(1,2) = -6$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(0,0) = f(2,0) = 0$,

b) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(2,1) = -9$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(0,4) = 120$,

c) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(1,1) = -2$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(2,2) = 8$.

5.2.12. a) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(-1,-1) = -2$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(-3,0) = f(0,-3) = 5$,

b) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(1,-3) = -9$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(-\frac{4}{3},-\frac{20}{9}) = \frac{100}{27}$,

c) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(1,1) = -7$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(4,-2) = 20$.

5.3. Parciální derivace složených funkcí

5.3.1. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace dané funkce a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; zjistěte, zda na množině $\mathcal{O}$ jsou funkce omezeny zdola (resp. shora):

a) $f(x,y) = \ln(5-x^2-y^2)$,	b) $g(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$,	c) $f(x,y) = \ln(x^2-2x-y)$,
d) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{y^2+1}{x}}$,	e) $f(x,y) = xy^3\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,	f) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}$,
g) $f(x,y) = \ln\dfrac{(x-1)^2y}{x}$,	h) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2}{y}+1\right)$,	i) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$,
j) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$,	k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y}}$,	l) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y^2}}$,
m) $f(x,y) = \sqrt{x\ln y}$,	n) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2xy}}}$,	o) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{y-x^2}}$,
p) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2xy+3y^2}}$,	q) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2}}$.	

5.3.2. Funkce g jedné proměnné má derivaci ve všech bodech intervalu $(-\infty,\infty)$, A je libovolná konstanta. Ukažte, že funkce $u(x,t) = A\mathrm{e}^{-5t}g(3t-2x)$ vyhovuje rovnici

$$2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -10\,u(x,t) \quad \text{ve všech bodech} \quad (x,t) \in E^2.$$

5.3.3. Funkce g jedné proměnné má dvě derivace ve všech bodech intervalu $(-\infty,\infty)$, A, B, α jsou libovolné konstanty. Ukažte, že funkce $u(x,t) = A\,g(x-\alpha t) + B\,g(x+\alpha t)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{ve všech bodech} \quad (x,t) \in E^2.$$

5.3.4. Funkce f dvou proměnných x_1, x_2 má v otevřené množině $G \subset E^2$ derivace druhého řádu a každá z dvojice funkcí y_1, y_2 jedné proměnné t má dvě derivace na otevřeném intervalu I. Přitom pro každý bod $t \in I$ je $(y_1(t), y_2(t)) \in G$. Vyjádřete první a druhou derivaci funkce $h(t) = f(y_1(t), y_2(t))$ podle t; při zápisu výsledků nevypisujte argument t a vnitřní funkce derivací funkce f. Použijte také indexů pro označení derivací, neboť takový zápis je jednodušší.

5.3.5. Funkce g závisí na dvou proměnných $(u,v) \in E^2$ a má parciální derivace druhého řádu ve všech bodech. Na místa proměnných (u,v) dosadíme funkce, které jsou pojmenovány ve shodě s proměnnými, na jejichž místa budou dosazeny. Tyto funkce jsou $u = 3x + 2y$ a $v = x - y$.

a) Napište výrazy, kterými jsou dány první dvě derivace funkce $z(x,y) = g(3x+2y, x-y)$.

b) Spočítejte hodnoty prvních a druhých derivací funkce z v bodě $P = (2,-1)$, když znáte tyto hodnoty derivací funkce g v bodě $Q = (4,3)$:

$$g_u(Q) = 3\,,\ g_v(Q) = -2\,,\ g_{uu}(Q) = 1\,,\ g_{uv}(Q) = -2\,,\ g_{vv}(Q) = 3\,.$$

5.3.6. Funkce g má stejné vlastnosti jako v předcházející úloze. Na místa argumentů (u,v) jsou dosazovány funkce $u = 3x - y$ a $v = x^2$.

a) Napište výrazy, kterými jsou dány první dvě derivace funkce $z(x,y) = g(3x-y, x^2)$.

b) Spočítejte hodnoty prvních a druhých derivací funkce z v bodě $P = (3,5)$, když znáte tyto hodnoty derivací funkce g v bodě $Q = (4,9)$:

$$g_u(Q) = -1\,,\ g_v(Q) = 1\,,\ g_{uu}(Q) = 1\,,\ g_{uv}(Q) = -1\,,\ g_{vv}(Q) = 3\,.$$

5.3.7. Napište diferenciál funkce $f(x,y) = \varphi(2x^2y)$ v bodě $(x_0,y_0) = (-1,2)$, když víte, že $\varphi'(4) = -\frac{1}{2}$.

5.3.8. Spočítejte tyto derivace vyšších řádů

a) $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\mathrm{e}^{xyz}$, b) $\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}x^my^n$ pro přirozená m, n,

c) $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\dfrac{x-2y}{x+y}$, d) $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\sin(xy^2)$.

5.3.9. Funkce g má dvě derivace na $(-\infty,\infty)$. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Dokažte, že platí $x^2 f_{xx} + 2xy\,f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$ ve všech bodech (x,y), $y \neq 0$.

5.3.10. Funkce g proměnných u, v má dvě derivace na E^2. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce dané předpisem $f(x,y) = g(x+y, x^2+y^2)$.

5.3.11. Funkce f má v bodě (x_0,y_0) derivace všech řádů.

a) Pro dvě reálné hodnoty h_x, h_y definujeme funkci g jedné reálné proměnné t vztahem

$$g(t) = f(x_0 + h_xt, y_0 + h_yt)\,.$$

Spočítejte derivace všech řádů funkce g v bodě $t = 0$.

b) Známe všechny hodnoty všech derivací funkce g v bodě $t = 0$, proto formální Taylorova řada dává toto vyjádření: $g(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Poněvadž ale $g(1) = f(x_0+h_x, y_0+h_y)$, můžeme pro obecný bod (x,y) z „malého“ okolí bodu (x_0,y_0) získat aproximaci hodnoty $f(x,y)$ tak, že vezmeme $h_x = x - x_0$ a $h_y = y - y_0$. Potom je $g(1) = f(x,y)$, a zmíněná řada vlastně odpovídá hodnotě $f(x,y)$. Proveďte pro funkci $P(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + xy$ a bod $(x_0,y_0) = (1,-1)$. Přečtěte z odvozeného vyjádření rovnici tečné roviny plochy $z = P(x,y)$ v bodě $(1,-1,4)$.

Řešení.

5.3.1. **a)** $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 < 5\}$, funkce je omezená shora hodnotou $f(0,0) = \ln 5$, zdola není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{5 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{5 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(5 + x^2 - y^2)}{(5 - x^2 - y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(5 - x^2 - y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2(5 - x^2 + y^2)}{(5 - x^2 - y^2)^2}$,

b) $\mathcal{O} = D(g) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce je omezená zdola nulou, shora není omezená,
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2} g(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{y^3} g(x,y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^4} g(x,y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2(x + y^2)}{y^5} g(x,y)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x(2x + 3y^2)}{y^6} g(x,y)$,

c) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y < (x-1)^2 - 1\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x - y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{x^2 - 2x - y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(x^2 - 2x + y + 2)}{(x^2 - 2x - y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x - y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{(x^2 - 2x - y)^2}$,

d) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x \neq 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-(y^2+1)}{x^2} f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(2x + y^2 + 1)(y^2 + 1)}{x^4} f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2y(x + y^2 + 1)}{x^3} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x + 2y^2)}{x^2} f(x,y)$,

e) $\mathcal{O} = D(g) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2(x+y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy(-x + 3y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(x + 2y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-x^2 + xy + 3y^2)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x(x^2 - 4xy + 6y^2)}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,

f) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce je omezená zdola hodnotou -1 a shora hodnotou 1, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\mathrm{e}^{x+y}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2\mathrm{e}^{x+y}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y)}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y)}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)^3}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y)}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)^3}$,

g) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge y > 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y < 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+1}{x(x-1)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2(x-1)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{y^2}$,

h) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid y < -x^2\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2}{y(x^2 + y)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(-x^2 + y)}{(x^2 + y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2(x^2 + 2y)}{y^2(x^2 + y)^2}$,

i) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou $-\frac{1}{2}\pi$ a shora hodnotou $\frac{1}{2}\pi$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$,

j) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid xy \neq -1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou $-\frac{1}{2}\pi$ a shora hodnotou $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1 + y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2y}{(1 + y^2)^2}$,

k) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > -x^3\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora omezená není, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3x^2}{2(x^3 + y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{3}{2}x^2 f^3(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2(x^3 + y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{2} f^3(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3x(5x^3 - 4y))}{4(x^3 + y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4}x(5x^3 - 4y) f^5(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{9x^2}{4(x^3 + y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{9}{4}x^2 f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3}{4(x^3 + y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4} f^5(x,y)$,

l) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid -y^2 < x\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2(x + y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{2} f^3(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{(x + y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -y f^3(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3}{4(x + y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4} f^5(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3y}{2(x + y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{2} y f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-x + 2y^2}{(x + y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (-x + 2y^2) f^5(x,y)$,

m) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x \wedge 1 < y\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge 0 < y < 1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln y}{2\sqrt{x \ln y}} \equiv \frac{1}{2} \ln y \; f^{-1}(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2y\sqrt{x \ln y}} \equiv \frac{x}{2y} \; f^{-1}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-\ln^2 y}{4(x \ln y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{4} \ln^2 y \; f^{-3}(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{4y\sqrt{x \ln y}} \equiv \frac{1}{4y} \; f^{-1}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-x^2(1 + 2\ln y)}{4y^2(x \ln y)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{-x^2(1 + 2\ln y)}{4y^2} \; f^{-3}(x,y)$,

n) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 0 \wedge y < 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y > 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou 0 a shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\mathrm{e}^{2xy}}{(1 - \mathrm{e}^{2xy})^{\frac{3}{2}}} \equiv y\mathrm{e}^{2xy} f^3(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{2xy}}{(1 - \mathrm{e}^{2xy})^{\frac{3}{2}}} \equiv x\mathrm{e}^{2xy} f^3(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2(2 + \mathrm{e}^{2xy})\mathrm{e}^{2xy}}{(1 - \mathrm{e}^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv y^2(2 + \mathrm{e}^{2xy})\mathrm{e}^{2xy} f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\big((2xy + 1) + (xy - 1)\mathrm{e}^{2xy}\big)\mathrm{e}^{2xy}}{(1 - \mathrm{e}^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv \big((2xy + 1) + (xy - 1)\mathrm{e}^{2xy}\big)\mathrm{e}^{2xy} f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2(2 + \mathrm{e}^{2xy})\mathrm{e}^{2xy}}{(1 - \mathrm{e}^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv x^2(2 + \mathrm{e}^{2xy})\mathrm{e}^{2xy} f^5(x,y)$,

o) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 < y\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x\mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}}{\sqrt{y - x^2}} \equiv \frac{-x}{\sqrt{y - x^2}} f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}}{2\sqrt{y - x^2}} \equiv \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(x^2\sqrt{y - x^2} - y)\mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}}{(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{(x^2\sqrt{y - x^2} - y)}{(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x(1 - \sqrt{y - x^2})\mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}}{2(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{x(1 - \sqrt{y - x^2})}{2(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(\sqrt{y - x^2} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}}{4(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{\sqrt{y - x^2} - 1}{4(y - x^2)^{\frac{3}{2}}} f(x,y)$,

p) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$, funkce je omezená zdola hodnotou 0 a shora není omezená, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-(x+y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -(x+y)f^3(x,y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x+3y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -(x+3y)f^3(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x(x+2y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 2x(x+2y)f^5(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2(x^2+5xy+3y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 2(x^2+5xy+3y^2)f^5(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6y(2x+3y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 6y(2x+3y)f^5(x,y),$$

q) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 < y^2+1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv xf^3(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -yf^3(x,y)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x^2+y^2+1}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (2x^2+y^2+1)f^5(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-3xy}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv -3xyf^5(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2+2y^2-1}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (x^2+2y^2-1)f^5(x,y).$$

5.3.4. $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} y_1' + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} y_2'$, $h' = f_{x_1} y_1' + f_{x_2} y_2'$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (y_1')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (y_2')^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_1' y_1' + \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1'' + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2'',$$

$$h'' = f_{x_1 x_1} (y_1')^2 + f_{x_2 x_2} (y_2')^2 + 2f_{x_1 x_2} y_1' y_1' + f_{x_1} y_1'' + f_{x_2} y_2'' .$$

5.3.5. a) $z_x = 3g_u + g_v$, $z_y = 2g_u - g_v$, $z_{xx} = 9g_{uu} + 6g_{uv} + g_{vv}$, $z_{xy} = 6g_{uu} - g_{uv} - g_{vv}$, $z_{yy} = 4g_{uu} - 4g_{uv} + g_{vv}$.

b) $z_x(P) = 7$, $z_y(P) = 8$, $z_{xx}(P) = 0$, $z_{xy}(P) = 5$, $z_{yy}(P) = 15$.

5.3.6. a) $z_x = 3g_u + 2xg_v$, $z_y = -g_u$, $z_{xx} = 9g_{uu} + 12xg_{uv} + 4x^2 g_{vv} + 2g_v$, $z_{xy} = -3g_{uu} - 2xg_{uv}$, $z_{yy} = g_{uu}$. **b)** $z_x(P) = 3$, $z_y(P) = 1$, $z_{xx}(P) = 83$, $z_{xy}(P) = 3$, $z_{yy}(P) = 1$.

5.3.7. $\mathrm{d}f(-1,2) = 4\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$. **5.3.8. a)** $(1+3xyz+x^2y^2z^2)\mathrm{e}^{xyz}$, **b)** $m!\,n!$, **c)** $\dfrac{36(x-y)}{(x+y)^5}$,
d) $2(1-2x^2y^4)\cos(xy^2) - 10xy^2\sin(xy^2)$.

5.3.9. $f_x = \dfrac{g'}{y}$, $f_y = \dfrac{-xg'}{y^2}$, $f_{xx} = \dfrac{g''}{y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{-(xg''+yg')}{y^3}$, $f_{yy} = \dfrac{x(xg''+2yg')}{y^4}$.

5.3.10. $f_x = g_u + 2xg_v$, $f_y = g_u + 2yg_v$, $f_{xx} = g_{uu} + 4xg_{uv} + 4x^2 g_{vv} + 2g_v$, $f_{xy} = g_{uu} + 2(x+y)g_{uv} + 4xyg_{vv}$, $f_{yy} = g_{uu} + 4yg_{uv} + 4y^2 g_{vv} + 2g_v$.

5.3.11. a) Pro derivace platí

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \, h_x^k \, h_y^{n-k} .$$

b) Pro hodnotu $f(x,y)$ máme

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (x-x_0)^k (y-y_0)^{n-k} \right) .$$

Pro každý polynom jde o přesné vyjádření; proto platí vztah

$$P(x,y) = 4 + 3(x-1) - 5(y+1) + 2(x-1)^2 + (x-1)(y+1) + 3(y+1)^2$$

pro všechny body (x,y). Rovnice tečné roviny je $z = 4 + 3(x-1) - 5(y+1)$.

5.4. Regresní přímka

5.4.1. Je dáno n dvojic $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ reálných čísel. Těmito dvojicemi jsou určeny dva vektory $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ a $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)$. Budeme předpokládat, že ani jeden z vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nemá všechny složky stejné. Hledáme takové konstanty a, b, že hodnota funkce

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$$

je minimální. Přímka $y = ax + b$, v níž a, b jsou čísla, pro která funkce F nabývá minima, se nazývá regresní přímka. Rovnice pro stacionární body funkce F na E^2 jsou

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, x_k = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b) = 0\,. \tag{1}$$

Označíme $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) aritmetické průměry n-tic $x_1,\dots,x_n$ (resp. $y_1,\dots,y_n$); pro ně platí

$$n\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \,, \quad n\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \,.$$

Druhý vztah v (1) je ekvivalentní se vztahem $\sum_{k=1}^{n} y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k - nb = 0$, který užitím aritmetických průměrů přejde do tvaru

$$b = \overline{y} - a\overline{x}\,. \tag{2}$$

Jestliže druhý vztah v (1) násobíme $\overline{x}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, \overline{x} = 0\,.$$

Když poslední vztah odečteme od prvního vztahu v (1), získáme

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\,(x_k - \overline{x}) = 0\,.$$

Jestliže sem ze vztahu (2) dosadíme za b, dostaneme ihned

$$\sum_{k=1}^{n} \big((y_k - \overline{y}) - a(x_k - \overline{x})\big)\,(x_k - \overline{x}) = 0\,,$$

odkud pro hodnotu a dostaneme konečně relaci

$$a\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})\,(x_k - \overline{x})\,. \tag{3}$$

Zavedeme ještě dva vektory

$$\vec{X} = (x_1 - \overline{x},\dots,x_n - \overline{x})\,, \quad \vec{Y} = (y_1 - \overline{y},\dots,y_n - \overline{y})\,,$$

s jejichž pomocí lze vztah pro a zapsat ve tvaru

$$a\,|\vec{X}|^2 = \vec{X}\cdot\vec{Y}\,, \tag{4}$$

kde $|\vec{X}|$ označuje délku vektoru $\vec{X}$ v E^n a $\vec{X}\cdot\vec{Y}$ skalární součin vektorů $\vec{X}$, $\vec{Y}$ v E^n. Abychom odtud mohli vypočítat a, je třeba zajistit, aby $|\vec{X}| \neq 0$. To je ekvivalentní s tím, že $\vec{X} \neq \vec{0}$, a tento předpoklad je splněn vzhledem k tomu, že předpokládáme, že v posloupnosti $x_1,\dots,x_n$ nejsou všechna čísla stejná. Ze stejného důvodu je také $\vec{Y} \neq \vec{0}$, a proto můžeme definovat číslo

$$r_{xy} = \frac{\vec{X}\cdot\vec{Y}}{|\vec{X}|\,|\vec{Y}|} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})\,(y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2}}\,,$$

které nazveme korelačním koeficientem zadané posloupnosti dvojic $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Poněvadž pro skalární součin dvou nenulových vektorů $\vec{X}$, $\vec{Y}$ platí $\vec{X} \cdot \vec{Y} = |\vec{X}|\,|\vec{Y}| \cos\varphi$, kde φ je úhel, který v E^n svírají vektory $\vec{X}$ a $\vec{Y}$, vidíme, že $r_{xy} = \cos\varphi$. Proto $|r_{xy}| \le 1$. Koeficient a se najde ze vztahu (4), který lze přepsat pomocí korelačního koeficientu do podoby

$$a = \frac{|\vec{Y}|}{|\vec{X}|}\, r_{xy}\,. \tag{5}$$

Koeficient b se potom určí ze vztahu (2). Spočítejte r_{xy}, a, b a rovnici regresní přímky pro dvojice bodů

a) $(7,6), (3,2), (6,8), (4,0)$, **b)** $(3,4), (4,1), (6,-5), (7,-8)$, **c)** $(3,5), (1,2), (7,1), (9,4)$.

5.4.2. Ukažte, že pro a platí

$$a = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{X}|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\,\overline{x}^2}\,.$$

5.4.3. Sledujte postup části 5.4.1 a pro dvojice $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ odvoďte vztahy pro ty veličiny $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$, pro které nabývá funkce

$$\tilde{F}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \tilde{a} y_k - \tilde{b})^2$$

svého minima. Vzdálenost bodu (x_k, y_k) od přímky $x = \tilde{a}y + \tilde{b}$, je tedy měřena „ve směru" osy x – na rozdíl od funkce F, v níž vystupuje vzdálenost bodu (x_k, y_k) od přímky $y = ax + b$ měřená ve směru osy y. Potvrďte, že obě přímky procházejí bodem $(\overline{x}, \overline{y})$. Potvrďte, že pro $r_{xy} = \pm 1$ jsou přímky totožné.

5.4.4. Při určení regresní přímky jsme vzali stacionární bod (dvojici (a, b) splňující vztahy (1)) a nestarali jsme se, zda se jedná opravdu o bod, v němž funkce F nabývá svého minima. Za předpokladu, že mezi čísly $x_1, \dots, x_n$ jsou alespoň dvě různá, lze ukázat, že

$$\lim_{r \to \infty} \min\{F(a, b) \mid r^2 \le a^2 + b^2\} = \infty\,. \tag{$*$}$$

Důkaz tohoto tvrzení je poněkud komplikovaný, a proto jej vynecháme.

a) S jeho pomocí však vysvětlete, proč hodnoty a, b, které splňují (1), reprezentují bod, v němž funkce F nabývá svého ostrého globálního minima.

b) Dovedete si představit hladkou funkci dvou proměnných na E^2, která má pouze jediný stacionární bod, který je bodem lokálního minima, přičemž funkce není omezena zdola?

5.4.5. POZNÁMKA. Vektor $\vec{X}$ může být také definován vztahem $\vec{X} = \vec{x} - \overline{x}\,\vec{1}$, v němž $\vec{1}$ je vektor, jehož všechny složky se rovnají 1.

5.4.6. Funkce u (resp. v) je lineární v proměnné x (resp. y), tj. $u = k_1 x + q_1$ (resp. $v = k_2 y + q_2$). Ke dvojicím $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ přiřadíme pomocí zmíněných funkcí hodnoty $u_j = k_1 x_j + q_1$ (resp. $v_j = k_2 y_j + q_2$). Odvoďte, jak souvisí korelační koeficient dvojic $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$ s korelačním koeficientem dvojic $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

5.4.7. Napište systém rovnic analogický k (1) pro koeficienty kvadratické regresní křivky $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Minimalizuje se funkce

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma)^2\,.$$

Jak vypadají soustavy rovnic pro koeficienty polynomiální regresní křivky stupně tři a vyššího?

Řešení. 5.4.1. a) $r_{xy} = 0.8$, $a = 1.6$, $b = -4$, $y = \frac{8}{5}x - 4$, **b)** $r_{xy} = -1$, $a = -3$, $b = 13$, $y = -3x + 13$, **c)** $r_{xy} = 0$, $a = 0$, $b = 3$, $y = 3$. **5.4.3.** Pro hodnoty $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ máme vztahy $\tilde{a}\,|\vec{Y}|^2 = \vec{X} \cdot \vec{Y}$, $\tilde{b} = \overline{x} - \tilde{a}\overline{y}$. **5.4.6.** Pro střední hodnoty platí $\overline{u} = k_1 \overline{x} + q_1$ a $\overline{v} = k_2 \overline{y} + q_2$.

Proto, když píšeme $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, je $\vec{U} = \vec{u} - \overline{u}\,\vec{1} = k_1\,(\vec{x} - \overline{x}\,\vec{1}) = k_1\,\vec{X}$ a $\vec{V} = \vec{v} - \overline{v}\,\vec{1} = k_2\,(\vec{y} - \overline{y}\,\vec{1}) = k_2\,\vec{Y}$. Proto $r_{xy} = r_{uv}\,\mathrm{sign}(k_1)\,\mathrm{sign}(k_2)$.

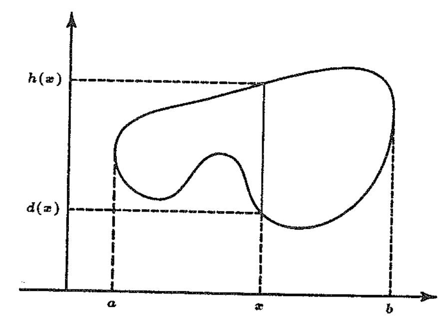
5.4.7. Koeficienty α, β, γ musí vyhovovat soustavě lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma) x_k^2 = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma) x_k = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma) = 0\,.$$

5.5. Dvojný integrál

5.5.1. PŘÍKLAD. Na „rozumné" omezené souvislé otevřené množině Ω (ohraničené konečným počtem úseček a jednoduchých oblouků) máme integrovat funkci f, která je spojitá na uzávěru množiny Ω. Ukážeme, co se rozumí hodnotou dvojného integrálu, pro který se používá označení

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$



Množinu Ω promítneme na osu x; dostaneme interval (a, b), jak je znázorněno na obrázku. Pro každé číslo $x \in (a, b)$ označíme Ω_x množinu těch y, pro které je $(x, y) \in \Omega$. (To je kolmý průmět na osu y průniku množiny Ω a přímky rovnoběžné s osou y, která je vedena bodem x.) Na obrázku je množina Ω_x tvořena intervalem $(d(x), h(x))$. To je nejjednodušší případ, neboť tato množina může být složitější, než je interval. (Kdyby šlo o rovnoběžky s osou x, obrázek nám poskytuje příklad, v němž společná část takové rovnoběžky a množiny Ω může být tvořena dvěma intervaly.) Obrázek však předkládá velmi jednoduchý případ (a jinými se zabývat nebudeme), v němž pro každé $x \in (a, b)$ je množina Ω_x intervalem. Každému takovému x přiřadíme hodnotu

$$\int_{\Omega_x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Tím je definována funkce proměnné x na intervalu (a, b). Její integrací vzhledem k x dostaneme hodnotu dvojného integrálu. Platí tedy

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\Omega_x} f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x\,.$$

Při opačném pořadí proměnných je

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{\Omega_y} f(x, y)\,\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}y\,,$$

kde c a d jsou krajní body intervalu na ose y, který je kolmým průmětem množiny Ω na osu y. Hodnota integrálu je výsledkem limitního procesu, který popíšeme, abychom získali představu, čemu hodnota integrálu odpovídá. Vezmeme dvě kladná (malá) čísla Δ_x a Δ_y. Soustava přímek $x = j\Delta_x$, $j \in Z$, (rovnoběžných s osou y) spolu se soustavou přímek $y = k\Delta_y$, $k \in Z$, (rovnoběžných s osou x) rozdělí rovinu na obdélníky

$$O_{j,k} = \big\{(x, y) \in E^2 \mid j\Delta_x \le x < (j+1)\Delta_x \ \wedge\ k\Delta_y \le y < (k+1)\Delta_y\big\}$$

s obsahem $\Delta_x \Delta_y$. V každém obdélníku $O_{j,k}$, který je částí množiny Ω, vybereme libovolný bod $P_{j,k}$ se souřadnicemi $(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})$ a vytvoříme číslo

$$I(\Delta_x, \Delta_y) = \sum_{O_{j,k} \subset \Omega} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})\,\Delta_x\,\Delta_y\,.$$

Pokud je funkce f kladná na Ω, toto číslo aproximuje objem tělesa

$$\{(x,y,z) \in E^3 \mid (x,y) \in \Omega \wedge 0 < z < f(x,y)\},$$

přičemž se objemu přiblížíme tím lépe, čím jsou čísla Δ_x a Δ_y menší.

Pro běžné oblasti se dá ukázat, že existuje číslo I takové, že

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \ (\Delta_x < \delta) \wedge (\Delta_y < \delta) \Rightarrow |I(\Delta_x, \Delta_y) - I| < \varepsilon .$$

A toto číslo I je výše popsaný integrál.

Například pro oblast Ω tvaru půlkruhu poloměru r, tj.

$$\Omega = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \wedge y > 0\},$$

a funkci $f(x,y) = y$ postupně dostáváme:

$$\iint_\Omega y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-r}^{r} \Big(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{r} \Big[y^2 \Big]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3} r^3 .$$

Je však možné postupovat i takto:

$$\iint_\Omega y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^r \Big(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} y \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y = 2 \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} \,\mathrm{d}y = -\tfrac{2}{3} \Big[(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^r = \tfrac{2}{3} r^3 .$$

5.5.2. Pro $G = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ zapisujeme

$$I = \iint_G f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x .$$

Pokud lze funkci f zapsat ve tvaru $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, pro integrál platí

$$I = \int_a^b f_1(x) \mathrm{d}x \int_c^d f_2(y) \mathrm{d}y .$$

5.5.3. Najděte hodnoty integrálů a nakreslete oblasti, přes které se integruje:

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} x y^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x , \ I_2 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^4}^{x} x y \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^4}^{x} x y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x .$$

5.5.4. Spočítejte $\iint_G (x-y)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, kde G je obdélník $\{(x,y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

5.5.5. Spočítejte objem tělesa omezeného plochami

a) $x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 2,\ z = 0,\ z = x$, b) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2$,

c) $y^2 = x,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x$, d) $y = (x+1)^3,\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x$,

e) $x = 0,\ x + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 1 + y^2$, f) $y = x,\ y = x^2 - 2x,\ z = 0,\ 2z = x$,

g) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 3x + 12y + 4z = 12$, h) $x = 4,\ y = 0,\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = y$,

i) $x = 4,\ y = 0,\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = x$, j) $x = 3,\ y = 0,\ 3y = x,\ z = 0,\ z = xy$.

Řešení. **5.5.3.** $I_1 = \frac{1}{40}$, $I_2 = \frac{3}{40}$. **5.5.4.** $\frac{1}{6} ab(2a^2 - 3ab + 2b^2)$. **5.5.5.** **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{4}{5}$, **d)** $\frac{12}{5}$, **e)** $\frac{96}{5}$, **f)** $\frac{27}{8}$, **g)** 2, **h)** 4, **i)** $\frac{64}{5}$, **j)** $\frac{9}{8}$.

LINEÁRNÍ ALGEBRA

6.1. Gaussova eliminace, vektory a matice

6.1.1. Gaussovou eliminací spočítejte řešení soustav lineárních rovnic, řešení zapište ve vektorovém tvaru a udělejte zkoušku:

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 6, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - y + z &= 4, \\ x + y - z &= -1, \\ 2x + 3y - z &= 2, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 5, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 1, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &= 11, \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 15x_2 + 15x_3 &= 3, \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 2, \\ 5x_1 + 18x_2 - 14x_3 &= 9, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1, \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5, \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= -1, \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 4x_5 &= -5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$

6.1.2. Najděte všechny vektory z E^5 kolmé na vektory

a) $\vec{a}_1 = (1,2,1,2,1)$, $\vec{a}_2 = (3,1,4,1,1)$, b) $\vec{a}_1 = (1,-1,1,-1,1)$, $\vec{a}_2 = (-3,3,-3,3,-3)$,

c) $\vec{a}_1 = (3,-1,7,0,-1)$, $\vec{a}_2 = (3,-2,5,-3,1)$, $\vec{a}_3 = (1,-1,1,-2,1)$.

6.1.3. Najděte hodnotu parametru ξ tak, aby poslední z uvedených vektorů byl lineární kombinací předcházejících, když

a) $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (1,1,2)$, $\vec{w} = (\xi,2,1)$, b) $\vec{a} = (5,2,-3)$, $\vec{b} = (2,3,-4)$, $\vec{c} = (4,-5,\xi)$,

c) $\vec{a} = (1,-1,2,1)$, $\vec{b} = (2,1,-1,-1)$, $\vec{c} = (4,-1,3,1)$, $\vec{d} = (1,-4,\xi,5)$.

6.1.4. Vyšetříme, zda vektory

$$\vec{a} = (1,2,2,0),\ \vec{b} = (1,2,1,-3),\ \vec{c} = (2,3,4,-3),\ \vec{d} = (1,3,-1,-6)$$

jsou lineárně závislé. Tak tomu bude v případě, že existují koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 takové, že

$$t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b} + t_3 \vec{c} + t_4 \vec{d} = \vec{0} \qquad (*)$$

a přitom se mezi nimi najde aspoň jeden nenulový. Rozepíšeme-li vztah $(*)$ po složkách, dostaneme homogenní soustavu lineárních rovnic pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4.

a) Řešením této soustavy rovnic ověřte, že takové netriviální řešení je $t_1 = 0$, $t_2 = -3$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$. To ukazuje, že $3\vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, a proto vektory jsou lineárně závislé.

b) Ukažte, že pokud se rozhodneme vyjádřit vektor $\vec{a}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ a $\vec{d}$, tj. hledat čísla u, v a w tak, aby platilo

$$u\vec{b} + v\vec{c} + w\vec{d} = \vec{a},$$

nebude mít soustava nehomogenních lineárních rovnic pro koeficienty u, v, w řešení. Tento výpočet problém lineární závislosti vektorů nevyřeší. Postup, který v každém případě dává odpověď, je ten, který vychází ze vztahu $(*)$ a který vede k homogenní soustavě lineárních rovnic pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 lineární kombinace zadaných vektorů.

6.1.5. Rozhodněte, zda uvedené vektory tvoří skupinu vektorů lineárně závislých; pokud ano, vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci ostatních (a ověřte, že odvozený vztah zadané vektory opravdu splňují), když

a) $\vec{a} = (1,2,-3,1)$, $\vec{b} = (-2,1,-1,2)$, $\vec{c} = (4,2,-3,5)$, $\vec{d} = (-4,3,-4,-1)$,

b) $\vec{a} = (2,-2,2,1)$, $\vec{b} = (1,-1,1,1)$, $\vec{c} = (1,2,0,2)$, $\vec{d} = (2,1,1,2)$,

c) $\vec{a} = (3,5,-2,4)$, $\vec{b} = (5,2,1,3)$, $\vec{c} = (1,1,3,-2)$, $\vec{d} = (-1,2,-2,1)$,

d) $\vec{a} = (2,1,-1,2)$, $\vec{b} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{c} = (3,-1,1,1)$, $\vec{d} = (2,-1,1,-2)$.

6.1.6. Ukažte, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v každé z těchto skupin jsou lineárně závislé, ať vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ bereme jakkoliv, třeba z prostoru R^n pro libovolné přirozené n:

a) $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 + 5\vec{u}_4$, $\vec{b} = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{c} = \vec{u}_2 + \vec{u}_4$, $\vec{d} = \vec{u}_4$,

b) $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3 + 5\vec{u}_4$, $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{c} = \vec{u}_2 + \vec{u}_4$, $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$.

6.1.7. Najděte hodnost matice

a) $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.1.8. Čtvercovou matici Y nazýváme antisymetrickou, když platí $Y = -Y^T$.

a) Ukažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A je matice $X = A + A^T$ matice symetrická a matice $Y = A - A^T$ je matice antisymetrická.

b) Ukažte, že každá čtvercová matice A je součtem matice symetrické a antisymetrické.

c) Ukažte, že diagonální elementy antisymetrické matice jsou rovny nule.

d) Rozložte tyto dvě matice na součet matice symetrické a antisymetrické:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 6 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.1.9. Označíme F zobrazení, které vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ přiřazuje antisymetrickou matici typu $(3,3)$ předpisem

$$F(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čemu je roven součin $F(\vec{a})\,\vec{b}$ matice $F(\vec{a})$ a vektoru $\vec{b} \in E^3$, když vektor $\vec{b}$ chápeme jako vektor sloupcový, tj. považujeme ho za matici typu $(3,1)$?

6.1.10. Procvičte si násobení matic tím, že ověříte správnost vztahů

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 5 \\ 7 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & -30 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 11 \\ 5 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -30 & 43 \\ -1 & 25 & 14 & -22 \\ 5 & -15 & -3 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -6 \\ 12 & -7 & -4 & -8 \\ -15 & 10 & 7 & 10 \\ 9 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -6 \\ 12 & -7 & -4 & -8 \\ -15 & 10 & 7 & 10 \\ 9 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^T.$$

6.1.11. Čtvercová matice B má v prvním řádku a na diagonále jedničky, ostatní elementy jsou rovny nule. Popište výsledek BA násobení matice B a matice A slovy. Matice A je libovolná matice, pro kterou je násobení definováno. Jaký je výsledek násobení CA, když C má na diagonále jedničky a jediný další nenulový prvek je 1 na místě (j,k), $k \neq j$? Jak vypadá matice D, pro níž DA je matice, kterou dostaneme z A vzájemnou výměnou řádků i a j? Jakým maticovým násobením manipulujeme se sloupci matice A?

6.1.12. Jsou dána čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ a šest vektorů zapsaných jako matice typu $(3,1)$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte matice P_1, P_2 a P_3 definované takto: $P_1 = V_1 W_1^T$, $P_2 = V_2 W_2^T$, $P_3 = V_3 W_3^T$.

b) Spočítejte matice $P_1 + P_2 + P_3$, P_1^2, P_2^2, P_3^2 a $P_j P_k$ pro $j,k = 1,2,3$, $j \neq k$.

c) Spočítejte matici A, která je dána předpisem $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$.

d) Ověřte, že $AV_j = \lambda_j V_j$ a $W_j^T A = \lambda_j W_j^T$ pro každé $j = 1,2,3$.

e) Spočítejte $V_j^T W_k$ a $W_j^T V_k$ pro $j,k = 1,2,3$.

6.1.13. Jestliže vektory $\vec{x} \in E^n$ zapisujeme jako sloupcové vektory, tj. matice typu $(n,1)$, lze skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ zapsat pomocí násobení matic $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T\,\vec{y}$. Pro matici M a vektory $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ spočítejte matici Q, když

$$Q = \vec{f}_1^T M \vec{f}_1 + \vec{f}_2^T M \vec{f}_2, \text{ kde } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a vektory $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ jsou dva kolmé vektory s délkou 1, tj. $\vec{f}_j^T \vec{f}_j = (1)$ pro $j = 1,2$ a $\vec{f}_1^T \vec{f}_2 = (0)$.

6.1.14. Spočítejte k-té mocniny těchto matic:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2. Determinanty, inverzní matice

6.2.1. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} 2004 & 2006 \\ 2005 & 2007 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2005 & 2004 \\ 2010 & 2009 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} x & i \\ i & x \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -7 & -2 & 10 \end{vmatrix}$,

i) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$, j) $\begin{vmatrix} b & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & 4 \end{vmatrix}$, k) $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$, l) $\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 2a & 2 & 3 \\ b & a & 5 \end{vmatrix}$,

m) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -\frac{3}{5} & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, n) $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 5 & \frac{3}{4} & 4 \\ 5 & \frac{5}{8} & 3 \end{vmatrix}$, o) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ \frac{7}{4} & 3 & 3 \\ \frac{3}{8} & 5 & 6 \end{vmatrix}$, p) $\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$,

q) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$, r) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$, s) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$, t) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$.

6.2.2. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -5 & 5 & 5 & 16 \\ -3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & c & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & a \\ 1 & 0 & a & b \end{vmatrix}$.

6.2.3. Hodnotu determinantu nepočítejte; vhodnými úpravami převeďte jeden determinant na druhý:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & x_1 & x_1^2 \\ x_1x_3 & x_2 & x_2^2 \\ x_1x_2 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

6.2.4. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

6.2.5. Ukažte, že pro determinant, který je složený ze tří vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

6.2.6. Pro dané matice spočítejte matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2.7. Určete takové hodnoty parametrů, aby matice byla regulární, a potom spočítejte inverzní matici:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6.2.8. Matice A, B jsou dány vztahy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & -1 & v \\ -1 & 1 & w \end{pmatrix}$$

s parametry u, v, w. Lze tyto parametry volit tak, aby matice B byla inverzní k matici A?

6.2.9. Tyto soustavy řešte Gaussovou eliminací, Cramerovým pravidlem a také pomocí inverzní matice k matici soustavy:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5, \\ -5x_1 + 7x_2 - 8x_3 &= 2, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= -3. \end{aligned}$

6.2.10. Najděte matici X, která splňuje rovnici

a) $AX + 2B = 2X + C$, když $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $XA + 2C = 2X + B$, když $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2.11. Matice G má navzájem kolmé sloupce, matice H řádky. Využijte toho a bez počítání napište inverzní matice (násobte matici a matici k ní transponovanou v takovém pořadí, že výsledek je matice diagonální):

a) $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

6.2.12. Matice A je dána jako součin matic $A = V D V^{-1}$, v němž matice V a D jsou dány.

a) Zjednodušte k-tou mocninu matice A, tj. matici A^k, k přirozené číslo.

b) Najděte vyjádření mocniny A^k v případě, že D je diagonální matice s elementy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonále, kterou označujeme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

6.3. Vlastní vektory

6.3.1. POZNÁMKA. Pokud vektor $\vec{v}$ vydáváme za pravý vlastní vektor matice A řádu n, který přísluší vlastnímu číslu λ, vždy se přesvědčíme, že platí $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Součinem $A\vec{v}$ rozumíme součin matice A a sloupcového vektoru $\vec{v}$, který ztotožňujeme s maticí typu $(n, 1)$. Samozřejmě, je-li vektor $\vec{v}$ vlastním vektorem matice A, je také jeho každý nenulový násobek vlastním vektorem matice A, speciálně vektor opačný $-\vec{v}$.

6.3.2. Najděte vlastní čísla a pravé vlastní vektory matic (poslední úloha ukazuje, že matice s reálnými prvky nemusí mít vlastní čísla reálná):

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3.3. Vlastní čísla symetrických matic s reálnými prvky jsou čísla reálná. Dokažte to pro matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

v níž parametry a, b, c jsou reálná čísla.

6.3.4. Najděte vlastní čísla (jedno z nich je nulové) a příslušné pravé vlastní vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -2 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -6 & -8 & 8 \\ -6 & -9 & 9 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3.5. Najděte hodnotu parametru t tak, že nula je vlastním číslem dané matice; potom spočítejte i ostatní vlastní čísla a ke každému určete příslušný pravý vlastní vektor:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & t & 1 \\ -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 2 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & t & -2 \\ 21 & 36 & -6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$.

6.3.6. Všechna vlastní čísla matic v tomto cvičení jsou nenulová. Dojdete-li při jejich hledání k polynomu třetího stupně, budete muset jedno vlastní číslo uhodnout. To půjde lehko, neboť všechna jsou celá čísla blízká nule. Najděte vlastní čísla a příslušné pravé vlastní vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.3.7. Pro matici A řádu n je $\det(\lambda I - A)$ polynom stupně n. Proto musí mít každá matice tolik vlastních čísel, kolik je její řád. Některá vlastní čísla mohou být vícenásobná. Jaké jsou vlastní vektory a příslušná vlastní čísla

a) matice jednotkové řádu n, b) matice nulové řádu n?

6.3.8. Dosud jsme se kromě matice jednotkové a nulové setkávali pouze s maticemi, jejichž vlastní čísla byla navzájem různá. Platí toto důležité tvrzení:

> Jestliže čtvercová matice má n navzájem různých vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, pak příslušné vlastní vektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

V případě, kdy se několik vlastních čísel shoduje, může být situace komplikovaná a nemůžeme ji rozebírat. Jaká jsou vlastní čísla a kolik příslušných vlastních vektorů najdeme pro matice

a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

6.3.9. Jaký význam mají vlastní čísla a příslušné vlastní vektory, uvidíme v tomto posledním cvičení. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & -2 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte vlastní čísla λ_j a příslušné pravé vlastní vektory $\vec{v}_j$ pro $j = 1, 2, 3$. Sestavte matici V tak, že její j-tý sloupec bude tvořit sloupcový pravý vlastní vektor $\vec{v}_j$. Poněvadž vlastní čísla jsou různá, matice V je regulární, a proto můžete spočítat matici V^{-1}. Konečně sestavíme diagonální matici $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, v níž na místě (j, j) je vlastní číslo λ_j. Spočítejte matici $B = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, V^{-1}$. Poněvadž se při správném výpočtu ukáže, že tato matice B se rovná matici A, dostáváme pro matici A vyjádření ve tvaru

$$A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, V^{-1}.$$

To je podle cvičení 6.2.12 výhodný tvar pro počítání mocnin matice A. To by ovšem nebyla velká výhra, protože vyjádřit matici v tomto tvaru je pracné; tento tvar je důležitý proto, že ukazuje najednou charakter všech mocnin A^k matice A pro libovolné $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Řešení.

6.1.1. a) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -2)$, **b)** $(x, y, z) = (1, 1, 3)$, **c)** $(y_1, y_2, y_3) = (2, -2, 3)$, **d)** řešení může být zapsáno například ve tvaru $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + (0, 1, 1)\, t$, kde t je parametr, **e)** např. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + (2, 1, 2)\, t$, **f)** např. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0) + (1, 0, -1)\, t$, **g)** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, -1)$, **h)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 1, 1, 1)\, t$, **i)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, -1, 0, 0) + (1, 1, 1, -4, 0)\, s + (1, 1, 1, 0, -4)\, t$, s, t parametry, **j)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 1, 0, 0, 0) + (3, 0, -1, 0, 0)\, r + (0, 2, 0, -1, 0)\, s + (2, 0, 0, 0, -1)\, t$, r, s, t parametry.

6.1.2. a) najdeme tři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 2, 0, 0, -5)$, $(0, 1, 0, -1, 0)$, $(7, -1, -5, 0, 0)$; proto libovolný kolmý vektor $\vec{x}$ splňuje $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t_1\,(1, 2, 0, 0, -5) + t_2\,(0, 1, 0, -1, 0) + t_3\,(7, -1, -5, 0, 0)$, t_j jsou parametry, **b)** najdeme čtyři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, -1)$, **c)** najdeme tři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 2, 0, 0, 1)$, $(1, 3, 0, -1, 0)$, $(3, 2, -1, 0, 0)$; (zadané tři vektory splňují $\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3$, a jsou proto lineárně závislé).

6.1.3. a) Pro $\xi = -1$ platí $\vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$, **b)** pro $\xi = 6$ platí $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, **c)** taková hodnota ξ neexistuje. **6.1.5. a)** Ano, $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, **b)** ano, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, **c)** ne, **d)** ano, $\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$.

6.1.6. a) $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c} + 8\vec{d}$, **b)** $\vec{a} + \vec{b} = 5(\vec{c} + \vec{d})$. **6.1.7. a)** Pro $d \neq 0$ je hodnost 4, pro $d = 0$ je 3, **b)** hodnost je 3, **c)** hodnost je 3. **6.1.8. a)** $X^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = X$, $Y^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -Y$. **b)** Matice $X = A + A^T$ je symetrická a matice $Y = A - A^T$ je antisymetrická. Přitom $A = \frac{1}{2}(X + Y)$.

d) $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -9 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1.9. $F(\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$, kde vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ chápeme jako sloupcový vektor, tj. matici typu $(3, 1)$. **6.1.11.** První řádek matice BA je součtem všech řádků matice A, pro $j > 1$ je j-tý řádek matice BA roven j-tému řádku matice A. V případě matice CA je její j-tý řádek součtem řádku j-tého a k-tého matice A, ostatní řádky matice CA se shodují s příslušnými řádky matice A.

6.1.12. a) $$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $P_1 + P_2 + P_3 = I$, $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$, pro $j \neq k$ jsou matice $P_j P_k$ nulové.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. **e)** Pro každé j je $V_j^T W_j = W_j^T V_j = (1)$. To je matice typu $(1, 1)$, tedy skalár. Pro $j \neq k$ je $V_j^T W_k = W_j^T V_k = (0)$. **6.1.13.** Vzhledem k předpokladům na vektory $\vec{f}_1$ a $\vec{f}_2$ platí, že složky β_1, β_2 vektoru $\vec{f}_2$ se dají vyjádřit pomocí složek α_1, α_2 vektoru $\vec{f}_1$ takto: $(\beta_1, \beta_2) = \kappa(\alpha_2, -\alpha_1)$, kde $\kappa = \pm 1$, proto $Q = (a + d)$. **6.1.14. a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ A^k je nulová matice pro $k > 3$, **b)** $$B^k = \begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} \\ 0 & 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{k}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2.1. a) -2, **b)** 5, **c)** $a^2 + b^2$, **d)** $x^2 + 1$, **e)** -64, **f)** -30, **g)** -63, **h)** -13, **i)** 0, **j)** $3a^2 - 3b^2 - 8a + 10b$, **k)** $xy(x - 1)(y - 1)(y - x)$, **l)** $a^2 + 3b^2 - 10ab + 10a - 4b$, **m)** $\frac{13}{5}$, **n)** $-\frac{11}{8}$, **o)** 1, **p)** $-\frac{7}{36}$, **q)** $a(a - b)(b - c)$, **r)** $-abc(a - b)(a - c)(b - c)$, **s)** $2abc - a^2 - b^2 - c^2 + 1$, **t)** 0. **6.2.2. a)** $-\alpha\beta\gamma\delta$, **b)** 60, **c)** 146, **d)** 16, **e)** $2(abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1)$, **f)** 0, **g)** $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$, **h)** $\left(1 - (a + b)^2\right)\left(1 + (a - b)^2\right) = -(a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4ab - 1)$. **6.2.3.** Násobte j-tý řádek x_j a převrácenou hodnotu x_j napište před determinant pro každé $j = 1, 2, 3$. Potom se zaměřte na první sloupec. **6.2.4. a)** $(x + y + z)^3$, **b)** $abcd + abc + abd + acd + bcd$.

6.2.6. a) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -21 & -47 & 22 \\ 0 & -3 & 2 \\ -14 & -33 & 15 \end{pmatrix}$, **c)** $\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -19 & 10 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **6.2.7. a)** Pro $a^2 + b^2 - ab \neq 0$, tj. pro $(a, b) \neq (0, 0)$, je

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 - ab}\begin{pmatrix} a - b & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$ **b)** pro $a \neq 0$ je $$B^{-1} = \frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} a^2 - 1 & -a & 1 \\ a & a^2 & -a \\ -1 & -a & a^2 + 1 \end{pmatrix},$$

c) pro $a \neq -2$ je $C^{-1} = \dfrac{1}{a+2}\begin{pmatrix} a & -a & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **6.2.8.** Pro hodnoty $u = 1$, $v = -1$, $w = 1$ jsou matice inverzní. Při řešení je nejlepší vyjít ze vztahu $BA = I$.

6.2.9. a) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 1)$, **b)** $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, -2)$, **c)** $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 6)$.

6.2.10. a) $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, **b)** $X = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$.

6.2.11. a) Pro součin G^TG platí $G^TG = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$. Proto první řádek transponované matice dělíme 81, druhý 9 a třetí 36. Inverzní matice má tedy tvar $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{2}{27} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$.

b) Pro součin HH^T platí $HH^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. Proto první sloupec transponované matice dělíme 9, druhý 36 a třetí 81. Inverzní matice má tedy tvar $H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{27} \end{pmatrix}$.

6.2.12. a) $A^k = V\,D^k\,V^{-1}$. **b)** $A^k = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\,V^{-1}$.

6.3.2. a) $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = (3,1)$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{v}_2 = (1,1)$, **b)** $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = -3$, $\vec{v}_2 = (1,3)$, **c)** $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = (1,-1)$, $\lambda_2 = -2$, $\vec{v}_2 = (2,-3)$, **d)** $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\vec{v}_1 = (1,-\mathrm{i})$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$, $\vec{v}_2 = (1,\mathrm{i})$.

6.3.4. a) $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{v}_3 = (1,1,0)$,
b) $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (2,-1,-1)$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{v}_3 = (1,-1,-1)$,
c) $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (0,1,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (1,2,3)$, $\lambda_3 = -2$, $\vec{v}_3 = (1,3,3)$,
d) $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (2,1,1)$, $\lambda_3 = -3$, $\vec{v}_3 = (1,-2,-1)$.

6.3.5. a) $t = -3$, $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (1,-2,-1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$, $\lambda_3 = -2$, $\vec{v}_3 = (0,1,1)$,
b) $t = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$, $\lambda_2 = 2$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{v}_3 = (1,-1,0)$,
c) $t = 7$, $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (2,-2,-5)$, $\lambda_2 = 3$, $\vec{v}_2 = (3,-2,-1)$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{v}_3 = (1,-1,-3)$,
d) $t = -3$, $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = (2,1,1)$, $\lambda_2 = 2$, $\vec{v}_2 = (1,-1,0)$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{v}_3 = (2,0,1)$.

6.3.6. a) $\lambda_1 = -1$, $\vec{v}_1 = (2,0,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (2,1,2)$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{v}_3 = (1,1,1)$,
b) $\lambda_1 = -2$, $\vec{v}_1 = (2,1,1)$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)$, $\lambda_3 = 1$, $\vec{v}_3 = (1,1,1)$,
c) $\lambda_1 = -1$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = (1,1,1)$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{v}_3 = (0,2,1)$,
d) $\lambda_1 = -2$, $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{v}_2 = (1,1,1)$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{v}_3 = (1,0,1)$.

6.3.7. a) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$, každý nenulový vektor je vlastním vektorem, **b)** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, každý nenulový vektor je vlastním vektorem.

6.3.8. a) $\lambda_1 = 5$ s vlastním vektorem $\vec{v}_1 = (1,0,0)$; pro zbývající dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ se najde pouze jeden vlastní vektor $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = (0,1,0)$, **b)** pro trojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ je k dispozici pouze jeden vlastní vektor $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = (1,0,0)$.

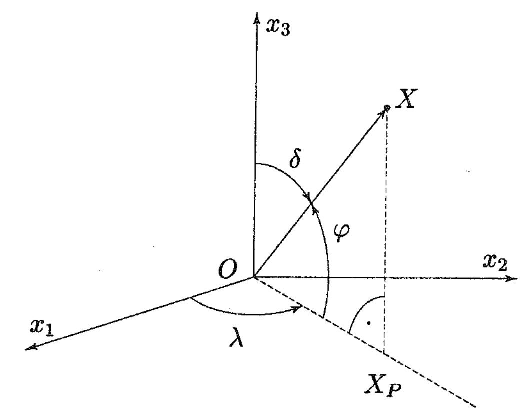
6.3.9. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Matice V, $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ a V^{-1} mají tvar

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

GEOGRAFICKÉ APLIKACE

7.1. Sférické souřadnice a vzdálenost bodů na kulové ploše

7.1.1. V E^3 je dána kartézská (pravotočivá) souřadná soustava s počátkem O a osami x_1, x_2, x_3. Bod X je obecný bod z E^3 se souřadnicemi (x_1, x_2, x_3). Kolmý průmět bodu X do roviny obsahující osy x_1 a x_2 označíme X_P, souřadnice tohoto bodu jsou $(x_1, x_2, 0)$. Úhly φ a λ chápeme jako orientované; kladná orientace je vyznačena na obrázku 1.



Obr. 1.

Úhly φ a λ budeme brát takové, že

$$\varphi \in \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi \rangle, \quad \lambda \in (-\pi, \pi\rangle. \tag{1}$$

Označíme R vzdálenost bodu X od počátku O souřadné soustavy, tj. $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Trojici čísel (R, φ, λ) nazýváme sférickými souřadnicemi bodu X. Kartézské souřadnice (x_1, x_2, x_3) lze vyjádřit pomocí sférických souřadnic (R, φ, λ) těmito vztahy:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\,\cos\lambda\,, \\ x_2 &= R\cos\varphi\,\sin\lambda\,, \\ x_3 &= R\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Pro které body X jsou trojice souřadnic (R, φ, λ) splňující (1) určeny jednoznačně?

7.1.2. Sféru s poloměrem R a se středem O označíme σ_R. O bodech $P_S = (0,0,R)$ a $P_J = (0,0,-R)$ na sféře σ_R mluvíme jako o pólech. Na sféře σ_R vezmeme dále dva libovolné body B a C různé od pólů. Ty jsou určeny dvojicemi souřadnic (φ_B, λ_B) a (φ_C, λ_C). Pro souřadnice vektorů $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ platí

$$\begin{aligned} x_1^B &= R\cos\varphi_B\,\cos\lambda_B\,, & x_1^C &= R\cos\varphi_C\,\cos\lambda_C\,, \\ x_2^B &= R\cos\varphi_B\,\sin\lambda_B\,, & x_2^C &= R\cos\varphi_C\,\sin\lambda_C\,, \\ x_3^B &= R\sin\varphi_B\,, & x_3^C &= R\sin\varphi_C\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Situace je ilustrována na obrázku 2. Vyznačte příslušné úhly φ_B, λ_B, φ_C, λ_C.

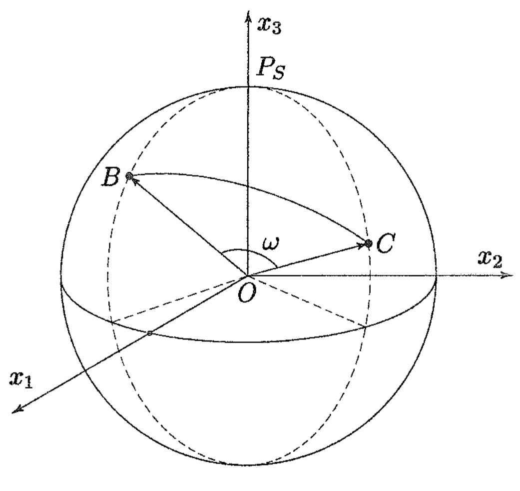
7.1.3. Zajímáme se o velikost úhlu ω, který svírají vektory $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$. Úhel leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a jeho kosinus splňuje vztah

$$\cos\omega = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}. \tag{4}$$

Dosadíme za vektory jejich vyjádření ze (3) a po snadné úpravě získáme

$$\cos\omega = \sin\varphi_B \sin\varphi_C + \cos\varphi_B \cos\varphi_C \cos(\lambda_B - \lambda_C)\,. \tag{5}$$

Proveďte detailně úpravy vedoucí k (5).



Obr. 2.

7.1.4. Povšimněte si, že výraz na pravé straně vztahu (5) se záměnou bodů B a C – tedy vzájemnou výměnou úhlu φ_B s úhlem φ_C a λ_B s λ_C – nemění.

7.1.5. Poznámka. Jakmile $B \neq C$ a O není středem úsečky BC, je body BCO určena rovina τ. Průnik roviny τ a sféry σ_R je kružnice poloměru R, která se nazývá **hlavní kružnicí**. Body B a C rozdělí tuto hlavní kružnici na dva oblouky. Kratší oblouk označíme $\widehat{BC}$. Jeho délka je rovna $R\omega$, pokud úhel ω je vyjádřen v radiánech (v obloukové úhlové míře).

7.1.6. V jakém intervalu se pohybují veličiny $\varphi_B + \varphi_C$, $\varphi_B - \varphi_C$ a $|\varphi_B - \varphi_C|$, pokud se body B a C pohybují po sféře σ_R včetně pólů?

7.1.7. Jaký interval vyplňují hodnoty $\lambda_B - \lambda_C$ a $|\lambda_B - \lambda_C|$, když body B a C probíhají sféru σ_R?

7.1.8. Vezmeme bod B s $\lambda_B = -\frac{1}{2}\pi$ a $\varphi_B = 0$ a bod C s $\lambda_C = \pi$ a $\varphi_C = 0$. Kolik je $\lambda_B - \lambda_C$ a kolik je $|\lambda_B - \lambda_C|$? Kolik je $\cos\omega$? Čemu se rovná ω? Srovnejte s výsledkem následující úlohy.

7.1.9. Vezmeme bod B s $\varphi_B = 0$ a bod C s $\varphi_C = 0$. Kolik je $\cos\omega$? Vyjádřete ω pomocí λ_B a λ_C.

7.1.10. Najděte ω výpočtem ze vztahu (5) v těchto případech (a potom objasněte geometricky):

a) $\lambda_B = \lambda_C\,,$ **b)** $|\lambda_B - \lambda_C| = \pi\,.$

7.1.11. Dokažte, že pokud body B a C mají stejnou zeměpisnou šířku φ, splňuje úhel ω vztah

$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos\varphi \sin\frac{|\lambda_B - \lambda_C|}{2}\,.$$

Řešení. **7.1.1.** Pro každý bod $X = (x_1, x_2, x_3)$, pro který platí $x_1^2 + x_2^2 > 0$. **7.1.6.** $\langle -\pi, \pi\rangle$, $\langle -\pi, \pi\rangle$ a $\langle 0, \pi\rangle$. **7.1.7.** $(-2\pi, 2\pi)$ a $\langle 0, 2\pi)$. **7.1.8.** $\lambda_B - \lambda_C = -\frac{3}{2}\pi$, $|\lambda_B - \lambda_C| = \frac{3}{2}\pi$, $\cos\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$. **7.1.9.** Poněvadž $\cos\omega = \cos(\lambda_B - \lambda_C) = \cos|\lambda_B - \lambda_C| = \cos(2\pi - |\lambda_B - \lambda_C|)$, dostáváme odsud vztahy pro ω, které závisí na velikosti $|\lambda_B - \lambda_C|$. Pro $|\lambda_B - \lambda_C| \le \pi$ je $\omega = |\lambda_B - \lambda_C|$, pro $|\lambda_B - \lambda_C| > \pi$ je $\omega = 2\pi - |\lambda_B - \lambda_C|$. **7.1.10. a)** $\omega = |\varphi_B - \varphi_C|$, neboť potom $\cos\omega = \cos(\varphi_B - \varphi_C) = \cos|\varphi_B - \varphi_C|$ a přitom $0 \le |\varphi_B - \varphi_C| \le \pi$, **b)** $\omega = \pi - |\varphi_B + \varphi_C|$, neboť nyní $\cos\omega = -\cos(\varphi_B + \varphi_C) = -\cos|\varphi_B + \varphi_C| = \cos(\pi - |\varphi_B + \varphi_C|)$ a přitom $0 \le \pi - |\varphi_B + \varphi_C| \le \pi$.

7.1.11. Použije se vztahu $\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}$ a vztahu $\cos(\lambda_B - \lambda_C) = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda_B - \lambda_C}{2}$ pro úpravu příslušných výrazů v relaci $\cos\omega = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos(\lambda_B - \lambda_C)$, kterou dostaneme, když v (5) budeme místo φ_B a φ_C psát φ. Jednoduchou úpravou dostaneme výraz, jehož odmocněním získáme hledaný vztah.

7.2. Eulerův sférický trojúhelník, kosinová věta pro stranu a pro úhel

7.2.1. Poznámka. Trojúhelník na kulové ploše (sféře) nazýváme **sférickým**, jestliže jeho strany jsou tvořeny oblouky hlavních kružnic. Pokud délky těchto oblouků jsou menší než πR, kde R je poloměr sféry, mluvíme o **Eulerově sférickém trojúhelníku.**

Aby úvahy nebyly závislé na poloměru sféry, která je z hlediska obecných úvah pouze parametrem, za délku strany v Eulerově sférickém trojúhelníku se označuje příslušný úhel průvodičů koncových bodů oblouku tvořícího stranu. Je to totéž, jako bychom pracovali na sféře s poloměrem jedna. Důsledkem toho, že strana sférického trojúhelníku je měřena velikostí úhlu v radiánech, je, že strany Eulerova sférického trojúhelníku jsou menší než π.

7.2.2. Poznámka. Co rozumíme úhlem, který svírají dvě strany Eulerova sférického trojúhelníku? Každé dvě strany (jakožto oblouky hlavních kružnic) leží v rovinách, jejichž průniky se sférou vytvářejí příslušné hlavní kružnice. Právě úhel těchto dvou rovin považujeme za úhel svíraný dvěma stranami Eulerova sférického trojúhelníku. O tomto úhlu se pro zdůraznění mluví jako o vnitřním úhlu sférického trojúhelníku. V Eulerově sférickém trojúhelníku je každý vnitřní úhel menší než π.

7.2.3. Jak vypadá sférický trojúhelník, který není Eulerův?

7.2.4. Pro popis polohy bodu na sféře lze místo dvojice (φ, λ) použít dvojice (δ, λ), kde úhel δ je tzv. doplňkový úhel, který je definován vztahem

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \tag{6}$$

Poněvadž $\varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, úhel δ splňuje $\delta \in \langle 0, \pi\rangle$. Na obrázku 2 vyznačte úhly δ_B a δ_C a s pomocí (2) odvoďte, že souřadnice (x_1, x_2, x_3) a (R, δ, λ) bodu sféry jsou svázány vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\delta\,\cos\lambda\,,\\ x_2 &= R\sin\delta\,\sin\lambda\,,\\ x_3 &= R\cos\delta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

7.2.5. Poznámka. Pro úvahy o obecném Eulerově sférickém trojúhelníku ABC je výhodné trojúhelník speciálně usadit na sféru. V terminologii geografické přesuneme bod A do severního pólu a bod B se souřadnicemi (δ_B, λ_B) na oblouk, který tvoří greenwichský poledník. Potom souřadnice λ_B bude splňovat $\lambda_B = 0$. Můžeme dokonce předpokládat, že $\lambda_C > 0$ prostě proto, že bychom v případě $\lambda_C < 0$ označení bodů B a C vzájemně vyměnili. Je zřejmé, že při popsaném umístění bodů A, B, C platí pro kartézské souřadnice vektorů $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ tyto relace

$$\begin{aligned} x_1^B &= R\sin\delta_B\,, & x_1^C &= R\sin\delta_C\,\cos\lambda_C\,,\\ x_2^B &= 0\,, & x_2^C &= R\sin\delta_C\,\sin\lambda_C\,,\\ x_3^B &= R\cos\delta_B\,, & x_3^C &= R\cos\delta_C\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Úhel ω, který svírají vektory $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ (a který je v terminologii sférické trigonometrie považován za stranu a Eulerova sférického trojúhelníku), splňuje (vzorec (4))

$$\cos\omega = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}\,.$$

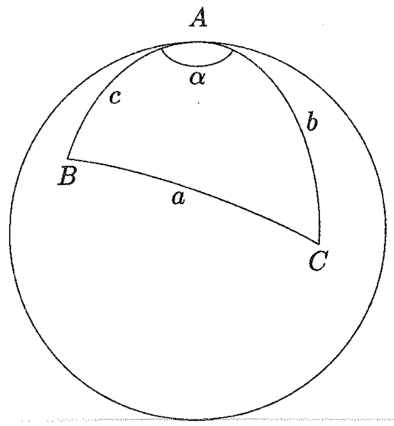
Ukažte, že po výměně ω za a a po dosazení z (8) dostaneme vztah

$$\cos a = \cos\delta_B \cos\delta_C + \sin\delta_B \sin\delta_C \cos\lambda_C\,. \tag{9}$$

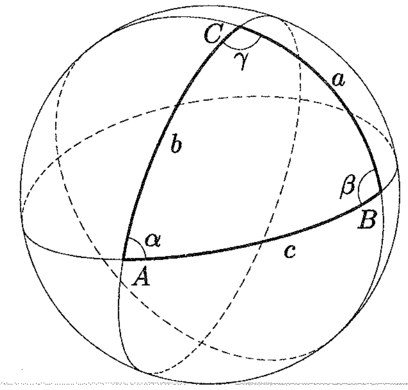
7.2.6. Na obrázku 3 a obrázku 2 doplněném o označení úhlů, vidíme, že oblouku $\widehat{AB}$, který představuje stranu c, přísluší úhel δ_B a oblouku $\widehat{AC}$, který je stranou b, přísluší úhel δ_C. Úhel α u vrcholu A je za našich předpokladů na umístění bodu B roven úhlu λ_C. Je to úhel svíraný rovinami, na kterých leží strany b a c. Nyní můžeme zapsat vztah (9) pomocí veličin a, b, c a α popisujících Eulerův sférický trojúhelník ABC. Odvoďte, že platí

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \,. \tag{10}$$

Tento vztah se nazývá **kosinová věta pro stranu** a Eulerova sférického trojúhelníku. Vztah (10) jsme odvodili pro případ, kdy sférický trojúhelník je umístěn jako na obrázku 3, kde bod A byl posazen do severního pólu. Samotný vztah (10) však už nenese žádné stopy po souřadném systému, který jsme použili k jeho odvození. Platí tedy i v obecné situaci, kdy bod A už nemusí být situován do severního pólu, ale je – stejně jako celý sférický trojúhelník – umístěn na sféře libovolně.



Obr. 3.



Obr. 4.

Obecným umístěním míníme případ, který může vypadat jako na obrázku 4. Tam jsou body a úhly trojúhelníku ABC označeny tak, jak jsme zvyklí z rovinné geometrie.

7.2.7. Cyklickou záměnou ve formuli (10) napište tvar kosinové věty sférické trigonometrie pro strany b a c.

7.2.8. Polární zobrazení Eulerova sférického trojúhelníku. Eulerův sférický trojúhelník je dán svými vrcholy. Budeme nyní definovat zobrazení, které danému trojúhelníku ABC přiřadí jiný trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, o kterém se mluví jako o polárním trojúhelníku.

Strana c trojúhelníku ABC – kratší z oblouků hlavní kružnice s koncovými body A, B – leží v rovině τ_c, která prochází středem sféry. Rovina τ_c rozdělí prostor na dva poloprostory. Označíme T_c^- ten z poloprostorů, který neobsahuje bod C. Polopřímka vycházející kolmo k rovině τ_c ze středu sféry do poloprostoru T_c^- protne sféru v bodě, který označíme $\tilde{C}$. Podobně, když vyjdeme ze strany b (resp. a), definujeme body $\tilde{B}$ (resp. $\tilde{A}$). Tím je trojúhelníku ABC přiřazen trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Jeho strany jsou označovány $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ a úhly $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$.

7.2.9. Eulerův sférický trojúhelník ABC umístíme „osvědčeným" způsobem tak, že bod A bude v severním pólu. Rozmyslete si, že vrcholy $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ leží na rovníku a bod $\tilde{A}$ leží na „jižní" polosféře. Ukažte, že pro stranu $\tilde{a}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ platí $\tilde{a} = \pi - \alpha$. Závěr této úvahy platí obecně: strany polárního trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ splňují

$$\tilde{a} = \pi - \alpha\,, \quad \tilde{b} = \pi - \beta\,, \quad \tilde{c} = \pi - \gamma\,. \tag{11}$$

7.2.10. Stejně jako jsme vytvořili polární trojúhleník ke sférickému trojúhelníku ABC, můžeme pokračovat a přiřadit polární trojúhelník ke trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Ten je určen vrcholy $\tilde{\tilde{A}}$, $\tilde{\tilde{B}}$ a $\tilde{\tilde{C}}$. Jeho strany označme $\tilde{\tilde{a}}$, $\tilde{\tilde{b}}$, $\tilde{\tilde{c}}$ a úhly $\tilde{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$. Podle (11), pouze s jednou vlnkou navíc, dostáváme

$$\tilde{\tilde{a}} = \pi - \tilde{\alpha}\,, \quad \tilde{\tilde{b}} = \pi - \tilde{\beta}\,, \quad \tilde{\tilde{c}} = \pi - \tilde{\gamma}\,. \tag{12}$$

7.2.11. Uvažujme opět o situaci, kdy bod A je v severním pólu. Viděli jsme v 7.2.9, že body $\tilde{B}$ a $\tilde{C}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ (tedy strana $\tilde{a}$ tohoto trojúhelníku) leží na rovníku. A poněvadž bod $\tilde{A}$ leží na „jižní" polosféře, lehko nahlédneme, že bod $\tilde{\tilde{A}}$ musí být totožný s bodem A. Tento závěr platí pro všechny strany trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, nejen pro stranu $\tilde{a}$. Proto je sférický trojúhelník $\tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{C}}$, který je polárním trojúhelníkem k $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, vlastně původním trojúhelníkem ABC. Tím vztahy (12) mezi elementy trojúhelníku a trojúhelníku k němu polárního získávají tuto podobu:

$$a = \pi - \tilde{\alpha}\,, \quad b = \pi - \tilde{\beta}\,, \quad c = \pi - \tilde{\gamma}\,. \tag{13}$$

Nyní napíšeme kosinovou větu pro polární trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$

$$\cos \tilde{a} = \cos \tilde{b} \cos \tilde{c} + \sin \tilde{b} \sin \tilde{c} \cos \tilde{\alpha}$$

a použijeme vztahů (11) a prvního vztahu ve (13) k náhradě vlnkovaných veličin. Ukažte, že se tím předcházející formule změní na

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a\,. \tag{14}$$

Tento vztah se nazývá **kosinová věta pro úhel** α. Napište další dva vztahy, které se dostanou ze (14) cyklickou záměnou.

7.2.12. Najděte velikosti všech stran a úhlů těchto Eulerových sférických trojúhelníků:

a) $b = 120°$, $c = 60°$, $\alpha = 30°$,
b) $a = 20°$, $b = 30°$, $c = 40°$,
c) $a = 50°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 110°$,
d) $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 80°$.

Řešení.

7.2.7. Kosinová věta pro strany b a c má tvar:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta\,,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma\,.$$

7.2.11. Při odvozování vztahu (14) použijeme identit $\cos(\pi - x) = -\cos x$ a $\sin(\pi - x) = \sin x$. Kosinová věta pro zbývající dva úhly β a γ má tvar:

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b\,,$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c\,.$$

7.2.12. a) $\beta \doteq 151°48'48''$, $\gamma \doteq 28°11'12''$, $a \doteq 66°27'7''$,

b) $\alpha \doteq 30°43'31''$, $\beta \doteq 48°19'27''$, $\gamma \doteq 106°12'54''$,

c) $\alpha \doteq 57°37'31''$, $b \doteq 116°42'56''$, $c \doteq 121°32'3''$,

d) $a \doteq 53°2'8''$, $b \doteq 40°38'39''$, $c \doteq 56°51'48''$.

7.3. Mercatorovo zobrazení, loxodroma

7.3.1. Začneme jednoduchým zobrazením sféry σ_R do roviny. Jestliže si nevšímáme pólů, je každému bodu na sféře jednoznačně přiřazena dvojice $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\lambda \in (-\pi, \pi\rangle$. Vezmeme libovolnou funkci Φ spojitou a rostoucí na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. S její pomocí přiřadíme každému bodu (φ, λ) sféry bod v rovině se souřadnicemi (y, λ) tím, že položíme $y = \Phi(\varphi)$. Osy y, λ umístíme tak, že tvoří levotočivou souřadnou soustavu – na rozdíl od obvyklého systému os x, y, které v tomto pořadí tvoří soustavu pravotočivou. Obraz rovníku (bodů s $\varphi = 0$) je v našem zobrazení rovnoběžný s osou λ. Jaké vlastnosti musí mít funkce Φ, aby obraz rovníku padl na osu λ a aby se dvojice bodů na sféře symetricky umístěných vzhledem k rovníku zobrazila do takových bodů v rovině, které jsou symetricky umístěny vzhledem k ose λ?

7.3.2. Teď odpovíme na otázku, jaké vlastnosti musí mít funkce Φ, aby popsané zobrazení bylo konformní. Z bodu P, který odpovídá (φ, λ), vyrazíme na sféře pod azimutem α do bodu P', jehož souřadnice (φ', λ') jsou „blízké“ souřadnicím (φ, λ). To zachytíme zápisem

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi\,, \quad \lambda' = \lambda + \Delta\lambda\,,$$

kde přírůstky souřadnic $\Delta\varphi$ a $\Delta\lambda$ jsou „velmi malé“ a jsou svázány vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha \doteq \frac{R\cos\varphi\,\Delta\lambda}{R\,\Delta\varphi} = \cos\varphi\,\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\,, \tag{15}$$

v němž α označuje azimut. Veličina $\operatorname{tg}\alpha$ je uvedeným vztahem aproximována tím přesněji, čím je bod P' blíže bodu P. Později využijeme také vzdálenosti $|PP'|$ těchto blízkých bodů, pro kterou lehko odvodíme vyjádření

$$|PP'|^2 \doteq R^2(\Delta\varphi)^2 + R^2\cos^2\varphi\,(\Delta\lambda)^2 = R^2\Big(1 + \cos^2\varphi\,\Big(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\Big)^2\Big)\,(\Delta\varphi)^2\,.$$

Když s pomocí (15) poslední výraz zjednodušíme, dostaneme

$$|PP'|^2 \doteq R^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,(\Delta\varphi)^2 = \frac{R^2}{\cos^2\alpha}\,(\Delta\varphi)^2\,. \tag{16}$$

Při zobrazení do roviny je obrazem bodu $P = (\varphi, \lambda)$ bod se souřadnicemi (y, λ) a obrazem blízkého bodu $P' = (\varphi', \lambda')$ je bod se souřadnicemi (y', λ'). Označíme-li

$$\Delta y = y' - y\,,$$

můžeme pro azimut α' směru určeného v rovině body (y, λ) a (y', λ') psát

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Delta\lambda}{\Delta y}\,. \tag{17}$$

Mají-li se při zobrazení zachovávat úhly, musí platit $\alpha = \alpha'$. To znamená $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$. Srovnáním vztahů (15) a (17) dostaneme

$$\cos\varphi\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \doteq \frac{\Delta\lambda}{\Delta y}\,.$$

Krátíme $\Delta\lambda$ a upravíme na tvar

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi} \doteq \frac{1}{\cos\varphi}\,,$$

který – jak jsme se zmínili – platí tím přesněji, čím je $\Delta\varphi$ blíže k nule. Proto necháme $\Delta\varphi$ konvergovat k nule, čímž poslední přibližný vztah přejde na přesnou relaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\,.$$

Z úlohy 4.2.6 víme, že

$$y(\varphi) = \ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\big) + c\,.$$

Pokud chceme, aby se rovník $\varphi = 0$ zobrazil na osu $y = 0$, volíme $c = 0$. Dostaneme funkci

$$q(\varphi) = \ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\big)\,,$$

která se nazývá isometrická šířka. Zobrazení sféry do roviny dané vztahem

$$(\varphi, \lambda) \to (y, \lambda) \equiv (q(\varphi), \lambda)$$

nazveme Mercatorovo zobrazení. Toto zobrazení – jak jsme viděli – zachovává úhly. Dokažte, že q je lichá funkce na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, a spočítejte $\lim_{\varphi\to\frac{1}{2}\pi_-} q(\varphi)$, $\lim_{\varphi\to-\frac{1}{2}\pi_+} q(\varphi)$.

7.3.3. Rovnice loxodromy. Loxodroma – křivka, která protíná poledníky stále pod stejným úhlem – se Mercatorovým zobrazením zobrazí na přímku v rovině (y, λ), která svírá s osou y úhel α. Proto rovnice obrazu loxodromy v souřadnicích (y, λ), která prochází bodem (y_0, λ_0), má rovnici

$$\lambda - \lambda_0 = (y - y_0)\,\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Dosazením zjistíme, že v geografických souřadnicích (φ, λ) má loxodroma rovnici

$$\lambda - \lambda_0 = \big(\ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\big) - \ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \tfrac{1}{4}\pi\big)\big)\,\operatorname{tg}\alpha\,,$$

kde φ_0 a y_0 jsou svázány vztahem $y_0 = q(\varphi_0)$. Jestliže z posledního vztahu vypočítáme proměnnou λ jako funkci $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, zjistíme s pomocí výsledku předcházejícího cvičení, že jakmile se φ dostatečně vzdálí od φ_0, hodnota λ opustí interval $(-\pi, \pi\rangle$, který jsme pro hodnoty λ vyhradili. Vadí to?

7.3.4. Pro $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ se pro $\varphi \to \frac{1}{2}\pi_-$ pohybujeme po loxodromě k severnímu pólu. Kolikrát je severní pól oběhnut při tomto pohybu po loxodromě?

7.3.5. Napište rovnici loxodromy s azimutem $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, která protíná rovník v bodě s $\lambda = \lambda_0$.

7.3.6. Délka loxodromy. Odmocněním (16) získáme výraz pro vzdálenost dvou blízkých bodů PP' loxodromy s azimutem α ve tvaru

$$|PP'| = \frac{R}{|\cos\alpha|}\,|\Delta\varphi|\,.$$

Proto vzdálenost bodů $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$ a $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ ležících na loxodromě s azimutem α je rovna

$$\frac{R}{\cos\alpha}\,|\varphi_2 - \varphi_1|\,.$$

7.3.7. Jaká je délka loxodromy s azimutem α mezi rovníkem a pólem?

7.3.8. Na sféře poloměru R spočítejte α a délku loxodromy, která prochází body (φ_1, λ_1) a (φ_2, λ_2), když $\varphi_1 = 8°$, $\lambda_1 = -80°$ a $\varphi_2 = 50°$, $\lambda_2 = 0°$. Nyní se vraťte na začátek a pomocí vztahu (5) ze 7.1.3 spočítejte také délku ortodromy mezi danými body.

Řešení. **7.3.1.** Funkce Φ musí být lichá. Pak se rovník dostane na osu $y = 0$ a body symetricky umístěné na sféře vzhledem k rovníku jsou zobrazeny do bodů symetricky umístěných podle osy λ. **7.3.2.** Lichost vyplývá z toho, že součin $\operatorname{tg}\big(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\big)$ a $\operatorname{tg}\big(-\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\big)$ je roven jedné. Limity jsou ∞, $-\infty$. **7.3.3.** Bod na sféře je určen jednoznačně, ať λ má jakoukoliv hodnotu. Pouze k bodu na sféře není λ určeno jednoznačně, pokud neurčíme interval, z něhož se λ bere. Proto jsme požadovali $\lambda \in (-\pi, \pi\rangle$. **7.3.4.** Počet oběhů je nekonečný, přesto, jak uvidíme, je délka loxodromy konečná. **7.3.5.** Rovnice je $\lambda - \lambda_0 = (\operatorname{tg}\alpha)\,\ln\operatorname{tg}\big(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\big)$. **7.3.7.** Délka je rovna $\frac{1}{2}\pi R/\cos\alpha$. **7.3.8.** $\alpha \doteq 58°3'20''$, délka loxodromy je přibližně rovna $1.395452\,R$ a přibližná délka ortodromy je $1.351907\,R$.