OPAKOVÁNÍ A ROZŠÍŘENÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1.1. Opakování

1.1.1. Výrazy zjednodušte a najděte hodnoty proměnné, pro které mají smysl:

a) $\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x\right), a>0,$ b) $\sqrt{z}\cdot\dfrac{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-1}+\dfrac{z-z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{z}},$

c) $\dfrac{\sqrt{a^4-x^4}}{x}\left(\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}-\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\right),\ a>0,$ d) $\dfrac{v^{\frac{1}{2}}-v^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{v}(v^{\frac{1}{2}}-1)}-\dfrac{v-v^{\frac{1}{2}}}{v\sqrt{v}},$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+1)-\left(1-\sqrt{2x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)\right).$

1.1.2. Najděte všechna reálná čísla, která vyhovují nerovnici:

a) $\dfrac{1}{2x+3}\le\dfrac{1}{x-5},$ b) $\dfrac{1}{x-1}\ge\dfrac{1}{x+2}-1,$

c) $\dfrac{5(x+6)}{x+3}\le x+6,$ d) $x+2\le\dfrac{3(x+2)}{x-3},$

e) $\dfrac{x+3}{x+2}\le\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{2}{(x+2)(3-x)},$ f) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2}{x-3}\le\dfrac{2}{(x+1)(3-x)}.$

1.1.3. Za základ logaritmů můžeme vzít libovolné kladné číslo a různé od jedné. Pro obecný základ logaritmů a (a tedy speciálně pro $a=10$ nebo pro $a=\mathrm{e}$) platí tento (definiční) vztah:

$$a^{\log_a x}=x \quad \text{(speciálně } 10^{\log x}=x \text{ nebo } \mathrm{e}^{\ln x}=x\text{)} \quad \text{pro každé } x>0\,.$$

Použijte zmíněných relací a jejich logaritmováním dokažte, že:

a) $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10},\ x>0,$ b) $\ln x=\dfrac{\log x}{\log \mathrm{e}},\ x>0,$ c) $\log \mathrm{e}=\dfrac{1}{\ln 10}.$

1.1.4. Najděte všechna reálná čísla, která splňují:

a) $\log(2x+9)-\log(x+1)=\log(x+6)-\log(x-2),$ b) $\log(x+5)+\log(11-3x)=1+\log(1-x),$

c) $\log(3-x)+\log(x+6)=\log 5+\log(\frac{3}{5}-x),$ d) $x^{2(1+\log x)}=1000\,x^7.$

1.1.5. Najděte všechna reálná čísla, která splňují:

a) $\log|x-10|\le 1,$ b) $\log_2(|x|-3)\le 1,$ c) $\log(x+3)\le\frac{1}{2}\log(6x+25),$

d) $\dfrac{1+\log x}{1-\log x}\ge 0,$ e) $\log_2\dfrac{x}{x-1}\le 1,$ f) $\log_3\dfrac{x+1}{x-1}\le 1.$

1.1.6. Najděte explicitní vyjádření těchto posloupností zadaných rekurentně:

a) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n,\ a_1=1, a_2=11,$ b) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n,\ a_0=2, a_1=1,$

c) $a_{n+2}=\frac{1}{2}(3a_{n+1}+2a_n),\ a_0=1, a_1=7,$ d) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\ a_3=8, a_4=6.$

1.1.7. Dokažte, že pro každé reálné číslo $q \neq 1$ a každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Odtud odvoďte, že pro $|q| < 1$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a pro její součet platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Najděte součet těchto řad (pokud obsahují parametr, určete, pro jaké hodnoty parametru konvergují):

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots,$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots,$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z+2}\right)^k,$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{z^2-z+1}\right)^k.$

1.2. Goniometrie a komplexní čísla

1.2.1. S pomocí identit

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

odvoďte vztahy

a) $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x\,,$ b) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x\cos x\,.$

c) Najděte všechna $x \in (-\pi, \pi\rangle$, pro která $\sin 3x + \sin x = \sin 2x\,.$

d) Najděte všechna $x \in (-\pi, \pi\rangle$, pro která $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \cos 3x + \cos 2x + \cos x\,.$

1.2.2. Využijte toho, že $105° = 60° + 45°$, $15° = 60° - 45°$, a s pomocí vztahů z předcházejícího cvičení odvoďte přesné hodnoty pro

a) $\cos 105°\,,$ b) $\sin 105°\,,$ c) $\cos 15°\,,$ d) $\sin 15°\,.$

1.2.3. Využijte vztahů

$$1 - \cos x = 2\sin^2\tfrac{x}{2}\,, \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2}\,, \quad \sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}$$

a najděte (v prvních dvou úlohách bez použití kalkulačky) všechny body x z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ (a ty potom přepočítejte na úhly z intervalu $\langle 0°, 360°)$), které splňují rovnici:

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1\,,$ b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1\,,$

c) $\cos x + 5\sin x = 1\,,$ d) $\cos x - 3\sin x = -1\,.$

1.2.4. Jsou-li na kalkulačce nastaveny radiány, potom funkce vyvolaná stiskem Shift následovaným stiskem klávesy tan přiřazuje každému číslu y číslo $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ takové, že $\operatorname{tg} x = y$. Pro tuto funkci se používá označení arctg. Postupem předcházejícího cvičení vyjádřete pomocí funkce arctg řešení rovnice (A, B jsou parametry, pro něž $AB \neq 0$):

a) $A\cos x + B\sin x = A\,,$ b) $A\cos x + B\sin x = -A\,.$

1.2.5. Lehko si uvědomíme, že ke každé dvojici čísel A, B takové, že $A^2 + B^2 > 0$, existuje $\bar{x} \in (-\pi, \pi\rangle$, pro které platí

$$\cos\bar{x} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \quad \sin\bar{x} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Proto můžeme rovnici

$$A\cos x + B\sin x = F \qquad (*)$$

(po dělení $\sqrt{A^2+B^2}$ a náhradě výrazů na levé straně) přepsat do tvaru

$$\cos x\cos\bar{x} + \sin x\sin\bar{x} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Pokud na pravé straně je výraz v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné, přepíšeme rovnici $(*)$ do tvaru

$$\cos(x - \bar{x}) = \cos\tilde{x}\,, \qquad (**)$$

kde $\tilde{x}$ vybereme tak, že

$$\cos\tilde{x} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Ze vztahu $(**)$ vyplývá, že každé řešení x rovnice $(*)$ splňuje

$$x = \bar{x} + \tilde{x} + 2\pi k \quad \text{nebo} \quad x = \bar{x} - \tilde{x} + 2\pi k \quad \text{pro nějaké} \quad k \in Z\,.$$

To nemusí být dvě různá řešení. Kdy? Užijte tohoto postupu a najděte (v prvních čtyřech úlohách bez použití kalkulačky) všechny body x z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ (a ty potom přepočítejte na úhly z intervalu $\langle 0°, 360°)$), které splňují rovnici:

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}\,,$ b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{2}\,,$

c) $\cos x + \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}\,,$ d) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$

e) $8\cos x + 6\sin x = 9\,,$ f) $4\cos x + 3\sin x = 2\,,$

g) $3\cos x - 4\sin x = -2\,,$ h) $7\cos x - 3\sin x = -4\,.$

1.2.6. Při řešení předcházející úlohy můžeme postupovat tak, že vezmeme bod $\bar{\bar{x}} \in (-\pi, \pi\rangle$, který splňuje

$$\cos\bar{\bar{x}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,, \quad \sin\bar{\bar{x}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Potom rovnici 1.2.5.$(*)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\sin x\cos\bar{\bar{x}} + \cos x\sin\bar{\bar{x}} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Pokud najdeme bod $\tilde{\bar{x}} \in (-\pi, \pi\rangle$, který splňuje

$$\sin\tilde{\bar{x}} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,$$

můžeme rovnici 1.2.5.$(*)$ dát tvar

$$\sin(x + \bar{\bar{x}}) = \sin\tilde{\bar{x}}\,.$$

Z této rovnice odvoďte takové dva vztahy, že každý bod x, který je řešením 1.2.5.$(*)$, vyhovuje alespoň jednomu z nich. Kdy vyhovuje oběma vztahům?

1.2.7. Hodnoty $\cos x$ a $\sin x$ můžeme vyjádřit pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, když postupujeme takto:

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,,$$

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,.$$

Pro jaké body x platí uvedená vyjádření hodnot $\sin x$ a $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

1.2.8. Předpokládejte, že $A + F \neq 0$, a pomocí vzorců z předcházejícího cvičení převeďte rovnici

$$A\cos x + B\sin x = F$$

na kvadratickou rovnici pro $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Vyřešte ji a pomocí funkce arctg napište vyjádření všech čísel x z intervalu $(-\pi, \pi)$, která rovnici vyhovují. Jak se na odvozeném vzorci pozná, že v daném intervalu má rovnice jediné řešení? Vraťte se k některé úloze cvičení 1.2.5. a řešte ji právě popsaným způsobem.

1.2.9. Hledáme komplexní čísla z_1, z_2 v algebraickém tvaru taková, že vyhovují soustavě rovnic:

a) $$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 + 2\mathrm{i}, \\ \mathrm{i}z_1 + z_2 &= \mathrm{i}, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} z_1 + 3\mathrm{i}z_2 &= \mathrm{i}, \\ (1+\mathrm{i})z_1 + 2\mathrm{i}z_2 &= 4\mathrm{i}, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3z_1 + (2+\mathrm{i})z_2 &= 3 + 2\mathrm{i}, \\ (1+\mathrm{i})z_1 - \mathrm{i}z_2 &= -2, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \mathrm{i}z_1 - (2+\mathrm{i})z_2 &= -2 + 3\mathrm{i}, \\ (2+\mathrm{i})z_1 + 3z_2 &= 1, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \mathrm{i}z_1 + (1-\mathrm{i})z_2 &= -2, \\ (2-\mathrm{i})z_1 + 3z_2 &= 3 - 2\mathrm{i}, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 3z_1 + (2-\mathrm{i})z_2 &= 1, \\ (2-\mathrm{i})z_1 + \mathrm{i}z_2 &= 2 + 3\mathrm{i}. \end{aligned}$$

1.3. Geometrie v E^2 a E^3

1.3.1. Skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ z E^3 je číslo definované vztahem

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,.$$

Délka $|\vec{a}|$ vektoru $\vec{a}$ se dá vyjádřit pomocí skalárního součinu takto:

$$|a| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

Ověřte tyto vlastnosti skalárního součinu (α, β_1, β_2 jsou skaláry):

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

b) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

c) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b} + \vec{a}_2\cdot\vec{b}$,

d) $\vec{a}\cdot(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \beta_1(\vec{a}\cdot\vec{b}_1) + \beta_2(\vec{a}\cdot\vec{b}_2)$,

e) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$,

f) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

1.3.2. Ukážeme, že pro dva vektory $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ platí vztah

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi\,, \qquad (*)$$

v němž φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, a $|\vec{a}|$ (resp. $|\vec{b}|$) označuje velikost vektoru $\vec{a}$ (resp. $\vec{b}$). Úhel φ leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Označíme O počátek souřadného systému. Jestliže bod A je takový, že $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ a bod B takový, že $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, je vzdálenost $|AB|$ bodů A, B rovna $|\vec{b} - \vec{a}|$. Proto můžeme psát

$$|AB|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\,.$$

Poněvadž $|OA| = |\vec{a}|$ a $|OB| = |\vec{b}|$, vidíme, že mezi stranami trojúhelníku OAB a skalárním součinem platí vztah

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\,.$$

Podle kosinové věty rovinné trigonometrie vyjádříme velikost $|AB|$ strany AB trojúhelníku OAB pomocí stran trojúhelníku $|OA|$, $|OB|$ a úhlu φ, který tyto strany svírají, vztahem

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,|OA|\,|OB|\,\cos\varphi\,.$$

Porovnáním posledních dvou vztahů dostáváme $(*)$ okamžitě, poněvadž $|OA| = |\vec{a}|$ a $|OB| = |\vec{b}|$.

1.3.3. Vektorový součin $\vec{a}\times\vec{b}$ dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ z E^3 je číslo definované vztahem

$$\vec{a}\times\vec{b} = \big(a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1\big)\,,$$

který se dá přehledněji zapsat ve tvaru

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right),$$

v němž je užito determinantu – zobrazení, které čtveřici čísel A, B, C, D přiřazuje číslo podle předpisu

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC\,.$$

Ověřte tyto vlastnosti vektorového součinu (α, β_1, β_2 jsou skaláry):

a) $(\alpha\vec{a})\times(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = (\alpha\beta_1)\,(\vec{a}\times\vec{b}_1) + (\alpha\beta_2)\,(\vec{a}\times\vec{b}_2)$,

b) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$, c) $\vec{a}\times\vec{a} = (0,0,0) \equiv \vec{0}$, d) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$, e) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$,

f) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

Pro dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ užijte výsledek cvičení **f)** a ukažte, že platí vztah

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi\,,$$

v němž φ je úhel svíraný vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. To dává vektorovému součinu geometrický význam.

1.3.4. V trojúhelníku ABC s vrcholy $A = (3,-2)$, $B = (-5,2)$, $C = (-4,-1)$, najděte obecné rovnice přímek p_a, p_b, p_c, na nichž leží strany trojúhelníku, a obecné rovnice přímek v_a, v_b, v_c, na nichž leží výšky. Dále najděte souřadnice bodu V, který je průsečíkem výšek, souřadnice těžiště T a obsah S zadaného trojúhelníku.

1.3.5. Výpočtem najděte souřadnice bodu B, který odpovídá bodu $A = (5,-3)$ v osové symetrii vzhledem k přímce s rovnicí $2y = 3x + 5$.

1.3.6. Najděte obsah trojúhelníku ABC s vrcholem C, pro jehož souřadnice platí $C = (-2,3)$, a s vrcholy A a B, které leží ve vzdálenosti 4 délkových jednotek na přímce s rovnicí $3y = 4x + 2$.

1.3.7. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $P = (6,5)$ a průsečíkem přímek, jejichž obecné rovnice jsou $q_1 : x + y - 4 = 0$ a $q_2 : 3x - 5y + 4 = 0$.

1.3.8. Napište středovou rovnici kružnice, na které leží body $A = (5,3)$ a $B = (-2,2)$ a jejíž střed leží na přímce $x - 2y - 4 = 0$.

1.3.9. Úhel α je odchylkou přímek s rovnicemi $y = 2x + 3$ a $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Kolik je $\operatorname{tg}\alpha$ a $\cos\alpha$?

1.3.10. Na přímce zadané parametricky vektorovým vztahem $X = P + t\,\vec{s}$, $t \in (-\infty, \infty)$, vezmeme dva body X_1 a X_2, které odpovídají hodnotám parametru t_1 a t_2. Jaká je vzdálenost $d(X_1, X_2)$ bodů X_1 a X_2, když směrový vektor $\vec{s}$ má jednotkovou délku.

1.3.11. Najděte obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží bod $P = (1,-1,2)$ a která je kolmá na dvě roviny, jejichž rovnice jsou $x + y - z - 3 = 0$ a $z = 2y$.

1.3.12. Najděte obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží bod $P = (2,3,2)$ a která obsahuje přímku s parametrickými rovnicemi $x = 1 + t$, $y = 5 + t$, $z = -2 + t$, $t \in (-\infty, \infty)$.

1.3.13. Najděte obsah trojúhelníku ABC a obecnou rovnici roviny ρ, ve které trojúhelník leží, když $A = (1,2,3)$, $B = (4,3,-1)$, $C = (2,4,5)$.

1.3.14. V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ jsou souřadnice vrcholu A a tří sousedních vrcholů B, D, E dány takto: $A = (-1,2,3)$, $B = (3,-1,1)$, $D = (2,0,1)$, $E = (0,2,-3)$. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu, obsah jeho stěny ležící v rovině ρ určené body A, B, D a obecnou rovnici roviny ρ.

1.3.15. Najděte vzdálenost vrcholu krychle o hraně a od roviny proložené sousedními třemi vrcholy.

1.3.16. Najděte obecné rovnice rovin, které jsou rovnoběžné s rovinou $2x - 2y + z = 0$ a dotýkají se kulové plochy $x^2 - 4x + y^2 + 8y + z^2 - 8z = 0$.

1.3.17. Trojúhelník má vrcholy v bodech, v nichž rovina $6x + 3y + 2z = 6$ protíná souřadnicové osy. Jaký je jeho obsah?

1.3.18. Najděte vzdálenost bodu A od přímky p v E^3, když

a) $A = (2,-2,3)$, $p : x = 8 + 5t$, $y = t$, $z = 4 + 3t$, $t \in (-\infty,\infty)$,

b) $A = (1,-3,4)$, $p : x = 8 + 2t$, $y = -7 - 2t$, $z = -1 - t$, $t \in (-\infty,\infty)$.

Řešení.

1.1.1. a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$, **b)** $2\sqrt{z}$ pro $z \in (0,1) \cup (1,\infty)$, **c)** $2\sqrt{a^2+x^2}$ pro $x \in (-a,0) \cup (0,a)$, **d)** $\dfrac{2}{v}$ pro $v \in (0,1) \cup (1,\infty)$, **e)** $2x$ pro $x \in (0,\infty)$.

1.1.2. a) $x \in \langle -8,-\frac{3}{2}) \cup (5,\infty)$, **b)** $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$, **c)** $x \in \langle -6,-3) \cup \langle 2,\infty)$, **d)** $x \in (-\infty,-2\rangle \cup (3,6\rangle$, **e)** $x \in \langle -3,-2) \cup \langle 1,3)$, **f)** $x \in \langle -2,-1) \cup \langle 1,3)$.

1.1.4. a) $x = 6$, **b)** $x = -3$, **c)** $x = -3$, **d)** $x_1 = 10^3$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

1.1.5. a) $x \in \langle 0,10) \cup (10,20\rangle$, **b)** $x \in \langle -5,-3) \cup (3,5\rangle$, **c)** $x \in (-3,4\rangle$, **d)** $x \in \langle \frac{1}{10},10)$, **e)** $x \in (-\infty,0) \cup \langle 2,\infty)$, **f)** $x \in (-\infty,-1) \cup \langle 2,\infty)$. **1.1.6. a)** $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$, **b)** $a_n = 2^n + (-1)^n$, **c)** $a_n = 3 \cdot 2^n + (-1)^{n+1} \cdot 2^{1-n}$, **d)** $a_n = 10 - 2^{n-2}$. **1.1.7. a)** 1, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** pro $z \in (-1,\infty)$ konverguje k součtu $\frac{1}{2}(z+2)$, **d)** pro $z \neq 1$ konverguje k součtu $\dfrac{z}{z^2+1}$.

1.2.1. c) $x \in \{-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi\}$ **d)** $x \in \{-\frac{7}{8}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$.
1.2.2. a) $\cos 105° = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$, **b)** $\sin 105° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$, **c)** $\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$, **d)** $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$. **1.2.3. a)** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi$ ($x_1 = 0°$, $x_2 = 120°$), **b)** $x_1 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \pi$ ($x_1 = 300°$, $x_2 = 180°$), **c)** $x_1 = 0$, $x_2 \doteq 2.746802$ ($x_1 = 0°$, $x_2 \doteq 157°22'48''$), **d)** $x_1 \doteq 0.643501$, $x_2 = \pi$ ($x_1 \doteq 36°52'12''$, $x_2 = 180°$). **1.2.4. a)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{B}{A}$, **b)** $x_1 = \pi$, $x_2 = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{A}{B}$.
1.2.5. a) $x_1 = \frac{1}{12}\pi$, $x_2 = \frac{7}{12}\pi$ ($x_1 = 15°$, $x_2 = 105°$), **b)** $x_1 = -\frac{11}{12}\pi$, $x_2 = \frac{7}{12}\pi$ ($x_1 = 195°$, $x_2 = 105°$), **c)** $x_1 = \frac{1}{12}\pi$, $x_2 = \frac{5}{12}\pi$ ($x_1 = 15°$, $x_2 = 75°$), **d)** $x_1 = -\frac{7}{12}\pi$, $x_2 = \frac{1}{12}\pi$ ($x_1 = 255°$, $x_2 = 15°$), **e)** $x_1 \doteq 0.192474$, $x_2 \doteq 1.094528$ ($x_1 \doteq 11°1'41''$, $x_2 \doteq 62°42'43''$), **f)** $x_1 \doteq -0.515778$, $x_2 \doteq 1.802781$ ($x_1 \doteq 330°26'53''$, $x_2 \doteq 103°17'30''$), **g)** $x_1 \doteq -2.909608$, $x_2 \doteq 1.055018$ ($x_1 \doteq 193°17'30''$, $x_2 \doteq 60°26'53''$), **h)** $x_1 \doteq -2.528668$, $x_2 \doteq 1.718885$ ($x_1 \doteq 215°7'5''$, $x_2 \doteq 98°29'5''$). **1.2.6.** Každý bod, který vyhovuje rovnici 1.2.5.(*), splňuje $x = \tilde{\tilde{x}} - \bar{\bar{x}} + 2\pi k$ nebo $x = \pi - \tilde{\tilde{x}} - \bar{\bar{x}} + 2\pi k$ pro nějaké $k \in Z$. **1.2.7.** Pro každé x takové, že $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, tj. $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
1.2.8. Jediné řešení je pro $|F| = \sqrt{A^2+B^2}$, což je ve shodě se vztahem $x_{1,2} = \dfrac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-F^2}}{A+F}$.
1.2.9. a) $z_1 = 2 + \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, **b)** $z_1 = 3 + \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, **c)** $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, **d)** $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$, **e)** $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$, **f)** $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1.3.4. $p_a : 3x + y + 13 = 0$, $p_b : x + 7y + 11 = 0$, $p_c : x + 2y + 1 = 0$, $v_a : x - 3y - 9 = 0$, $v_b : 7x - y + 37 = 0$, $v_c : 2x - y + 7 = 0$, $V = (-6,-5)$, $T = (-2,-\frac{1}{3})$, $S = 10$ plošných jednotek.
1.3.5. $B = (-7,5)$. **1.3.6.** Obsah trojúhelníku je 6 plošných jednotek. **1.3.7.** $3x - 4y + 2 = 0$.
1.3.8. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. **1.3.9.** $\mathrm{tg}\,\alpha = 7$, $\cos\alpha = \frac{1}{10}\sqrt{2}$. **1.3.10.** $d(X_1,X_2) = |t_1 - t_2|$.
1.3.11. Obecná rovnice roviny ρ je $x + y + 2z - 4 = 0$. **1.3.12.** Obecná rovnice roviny ρ je $2x - y - z + 1 = 0$. **1.3.13.** Obsah trojúhelníku je $\frac{15}{2}$ plošné jednotky a obecná rovnice roviny ρ je $2x - 2y + z - 1 = 0$. **1.3.14.** Objem je roven 4 objemovým jednotkám, obsah stěny jsou 3 plošné jednotky a obecná rovnice roviny ρ je $2x + 2y + z - 5 = 0$. **1.3.15.** Vzdálenost je $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ délkových jednotek. **1.3.16.** Rovnice rovin jsou $2x - 2y + z - 34 = 0$ a $2x - 2y + z + 2 = 0$. **1.3.17.** Obsah trojúhelníku je $\frac{7}{2}$ plošných jednotek. **1.3.18. a)** Vzdálenost je $\sqrt{6}$ délkových jednotek; souřadnice bodu přímky p, který je nejblíže bodu A, jsou $(3,-1,1)$. **b)** Vzdálenost je 3 délkové jednotky; souřadnice bodu přímky p, který je nejblíže bodu A, jsou $(2,-1,2)$.

JEDNODUCHÉ FUNKCE A JEDNODUCHÉ LIMITY

2.1. Jednoduché funkce

2.1.1. Určete definiční obor a načrtněte grafy funkcí:

a) $x \to (x+2)^2$, b) $x \to \ln(x-2)$, c) $x \to e^{x-1}$,

d) $x \to \dfrac{1}{e^x}$, e) $x \to \dfrac{x+2}{x+1}$, f) $x \to \ln|x-2|$,

g) $x \to 2 - |x|$, h) $x \to 2|x+1|$, i) $x \to \dfrac{|x|-x}{x}$,

j) $x \to \sqrt{2x - x^2 - 1}$, k) $x \to |x-1| + |x|$, l) $x \to \ln(4x - x^2 - 4)$.

2.1.2. Najděte definiční obor a určete, zda je funkce f lichá nebo sudá, když

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, b) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^4 + 2x^2 + 1}$, c) $f(x) = \dfrac{(x^4 - x^2)\cos 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

2.1.3. Najděte definiční obor $D(f)$ funkce f a určete, zda funkce f je na něm rostoucí či klesající, když

a) $f(x) = 3x^3 + 2x$, b) $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$, c) $f(x) = e^{-x} - e^x$,

2.1.4. Najděte největší interval I obsahující bod x_0, na kterém je zadaná funkce g monotónní. Označte f funkci s definičním oborem $D(f) = I$, pro kterou $f(x) = g(x)$. Rozhodněte, zda je funkce f v intervalu I klesající či rostoucí, najděte inverzní funkci f^{-1} a její definiční obor $D(f^{-1}) = H(f)$, když

a) $g(x) = x^2 + 4x + 1$, $x_0 = 0$, b) $g(x) = |x| + 1$, $x_0 = -2$,

c) $g(x) = 2|x-1| + |x-3|$, $x_0 = -1$, d) $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, $x_0 = -1$.

2.1.5. Najděte obor hodnot $H(f)$ funkce f dané vztahem ($x \in (-\infty,\infty)$):

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, b) $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Řešení.

2.1.1. a) $(-\infty,\infty)$, **b)** $(2,\infty)$, **c)** $(-\infty,\infty)$, **d)** $(-\infty,\infty)$, **e)** $(-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$, **f)** $(-\infty,2) \cup (2,\infty)$, **g)** $(-\infty,\infty)$, **h)** $(-\infty,\infty)$, **i)** $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, **j)** definiční obor D obsahuje jediný bod, číslo 1, proto $D = \{1\}$, **k)** $(-\infty,\infty)$, **l)** definiční obor D neobsahuje žádný bod, je to prázdná množina, proto $D = \emptyset$.

2.1.2. a) $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je lichá, **b)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je sudá, **c)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je sudá.

2.1.3. a) $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm rostoucí, **b)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm rostoucí, **c)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm klesající.

2.1.4. a) $I = \langle -2,\infty)$, $f^{-1}(y) = -2 + \sqrt{y+3}$, $D(f^{-1}) = \langle -3,\infty)$, **b)** $I = (-\infty,0\rangle$, $f^{-1}(y) = 1 - y$, $D(f^{-1}) = \langle 1,\infty)$, **c)** $I = (-\infty,1\rangle$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(5-y)$, $D(f^{-1}) = \langle 2,\infty)$, **d)** $I = (-\infty,2)$, $f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{y-1}$, $D(f^{-1}) = (-\infty,1)$.

2.1.5. a) $H(f) = (0,1\rangle$, **b)** $H(f) = \langle \frac{1}{4},\infty)$, **c)** $H(f) = \langle 0,\infty)$.

2.1.6. Ukažte, že funkce g definovaná vztahem

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

splňuje $g(g(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru. Najděte definiční obor $D(g)$ funkce g, obor hodnot $H(g)$ a vyjádření inverzní funkce g^{-1}.

2.1.7. Ukažte, že funkce h definovaná vztahem

$$h(x) = \frac{ax+c}{bx-a},$$

v němž a, b, c jsou parametry, které vyhovují podmínkám $b \neq 0$, $a^2 + bc \neq 0$, splňuje $h(h(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru.

2.1.8. Funkce inverzní k funkci f_{tg} definované vztahem $f_{\mathrm{tg}}(x) = \operatorname{tg} x$ pro ty hodnoty proměnné x, které patří do definičního oboru $D(f_{\mathrm{tg}}) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, je funkce arctg. Funkce inverzní k funkci f_{cotg} definované vztahem $f_{\mathrm{cotg}}(x) = \operatorname{cotg} x$ pro ty hodnoty proměnné x, které patří do definičního oboru $D(f_{\mathrm{cotg}}) = (0, \pi)$, je funkce arccotg.

a) Vyjádřete pomocí arctg inverzní funkci k funkci g, která má definiční obor $D(g) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, na němž pro hodnoty funkce g platí $g(x) = 3 \operatorname{tg} x$.

b) Vyjádřete pomocí arccotg inverzní funkci k funkci h, která má definiční obor $D(h) = (4\pi, 5\pi)$, na němž pro hodnoty funkce h platí $h(x) = 2 \operatorname{cotg} x$.

c) Ukažte, že pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

d) Ukažte, že pro všechna reálná $x \neq 0$ je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{pro } x > 0\,, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{pro } x < 0\,. \end{cases}$$

Řešení.

2.1.6. $D(g) = H(g) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} \equiv g(x)$. **2.1.8. a)** $D(g^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $g^{-1}(y) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}y$. **b)** $D(h^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $h^{-1}(y) = 4\pi + \operatorname{arccotg} \frac{1}{2}y$.

c) Hodnotu $\operatorname{arctg} x$ označíme φ, tj.

$$\operatorname{arctg} x = \varphi\,. \tag{$*$}$$

Potom je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$. Protože $\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (0, \pi)$ a $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi = x$, je

$$\operatorname{arccotg} x = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \tag{$**$}$$

Sečtením $(*)$ a $(**)$ dostaneme výsledek.

d) Hodnotu $\operatorname{arctg} x$ označíme φ, tj.

$$\operatorname{arctg} x = \varphi\,. \tag{$*$}$$

Probereme případ $x > 0$. Potom je $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$. Protože $\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, je

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{x}\,.$$

Máme tedy

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \tag{$**$}$$

Sečtením $(*)$ a $(**)$ dostaneme výsledek. V případě $x < 0$ je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, 0)$. Poněvadž pro takové φ platí $-\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, 0)$ a také

$$\operatorname{tg}(-\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = -\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi + \varphi)}{\cos(\frac{1}{2}\pi + \varphi)} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{x}\,,$$

je odtud možné učinit závěr

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,.$$

V tomto vztahu místo φ napíšeme $\operatorname{arctg} x$, tím je výsledek dokázán i pro $x < 0$.

2.2. Jednoduché limity

2.2.1. Spočítejte tyto limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2x^2 - 5)\,,$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}\,,$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-x}\,,$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x}{x}\,,$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}\,,$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3-7\cos x}{2-\sqrt{x}}\,,$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4-2x^3-x}{2x^3+3x^2+2x}\,,$ **h)** $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}\,,$ **i)** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-2x-4}{x^2+x-6}\,,$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+2}{7-4x^3}\,,$ **k)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^5+4x+1}\,,$ **l)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2-5x^4}{3x^3+2x}\,,$

m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3x^4}{2x-3x^2+4x^4}\,,$ **n)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}\,,$ **o)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5-2x-1}{3x^3+2x^2+x}\,,$

p) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}\,,$ **q)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,,$ **r)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,,$

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}\,,$ **t)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x\cos x\,,$ **u)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,.$

2.2.2. Použijte těchto dvou limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

a spočítejte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}\,,$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x}\,,$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}\,,$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}\,,$ **e)** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\,,$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}\,,$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}\,,$ **h)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2}\,,$ **i)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{cotg} x\,.$

2.2.3. Jestliže limita neexistuje, spočítejte limity jednostranné (pokud existují):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2-x}\,,$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x-1)^4}\,,$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to-5}\frac{x+11}{(x+5)^3}\,,$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\,,$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x-2}}\,,$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x+1}{x^2+4x+4}\,,$ **h)** $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1-2x}{x^2-2x-3}\,,$ **i)** $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\,,$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\,,$ **k)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\,,$ **l)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sin x}\,.$

Řešení.

2.2.1. a) 3, **b)** 0, **c)** 0, **d)** $\frac{1}{\pi}$, **e)** 2, **f)** 0, **g)** $-\frac{1}{2}$, **h)** 4, **i)** $\frac{6}{5}$, **j)** $-\frac{1}{2}$, **k)** 0, **l)** ∞, **m)** $-\frac{3}{4}$, **n)** 0, **o)** ∞, **p)** -9, **q)** 1, **r)** -1, **s)** 0, **t)** 0, **u)** -1.

2.2.2. a) $\frac{3}{7}$, **b)** $\frac{1}{5}$, **c)** 9, **d)** 1, **e)** e^x, **f)** 3, **g)** $\frac{4}{9}$, **h)** -1, **i)** -1.

2.2.3. a) limita zleva je $-\infty$, zprava ∞, **b)** $-\infty$, **c)** limita zleva je $-\infty$, zprava ∞, **d)** limita zleva je 0, zprava ∞, **e)** limita zprava je ∞, funkce není definována v levém okolí bodu 0, **f)** e, **g)** limita je $-\infty$, **h)** limita zleva je ∞, zprava $-\infty$, **i)** limita zleva je ∞, zprava $-\infty$, **j)** neexistuje limita zleva, ani limita zprava, **k)** limita zleva je 0, limita zprava neexistuje, **l)** limita zleva je -1, zprava 1.

2.2.4. Spočítejte tuto limitu (která se nazývá derivace funkce f)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

pro funkci f danou takto:

a) $f(x)=x^2$, b) $f(x)=x^3$, c) $f(x)=x^4$,

d) $f(x)=\frac{1}{x}$, e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, f) $f(x)=\sqrt{x}, x>0$.

2.2.5. Dvě funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\,,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=B\ ,\text{ přičemž }\ A,B\in(-\infty,\infty)\,,\ A<B\,.$$

a) Ukažte, že potom existuje číslo a takové, že $x\in(a,\infty)\ \Rightarrow\ f(x)<g(x)$.

b) Ukažte, že potom pro každé číslo D, které splňuje $D<B-A$, existuje číslo b takové, že

$$x\in(b,\infty)\ \Rightarrow\ f(x)+D<g(x)\,.$$

c) Ukažte, že pro dosti velká čísla x platí

$$\frac{3x^2+x\sqrt{x}+(5x+3)\sin 7x}{2x^2-x-2}<\frac{4x^2-x-19e^{-5x}}{x^2+5x+3|x+50|}\,.$$

2.3. Bolzanova věta

2.3.1. Bolzanova věta. Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $-\infty<a<b<\infty$. Pro každý bod y ležící v intervalu, jehož krajními body jsou hodnoty $f(a)$, $f(b)$, existuje bod $x\in\langle a,b\rangle$ takový, že $f(x)=y$. Ukažte, že funkce f má v daném intervalu $\langle a,b\rangle$ aspoň jeden bod x takový, že platí $f(x)=y$, když

a) $f(x)=(x-2)e^{-x}+x^2\,,\ a=0\,,\ b=2\,,\ y=1\,,$

b) $f(x)=x-2\sin x\,,\ a=\frac{1}{6}\pi\,,\ b=\pi\,,\ y=2\,,$

c) $f(x)=x^5-3x^2+1\,,\ a=0\,,\ b=1\,,\ y=0\,,$

d) $f(x)=x^4-3x^2-x+1\,,\ a=0\,,\ b=2\,,\ y=0\,.$

2.3.2. Spočítejte a potom vysvětlete, proč pro funkci $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ neexistuje v intervalu $\langle 0,2\rangle$ bod x takový, že $f(x)=y$, kde y je libovolný bod z intervalu $(0,4)$, i když v krajních bodech intervalu platí $f(0)=0$ a $f(2)=4$.

Řešení.

2.2.4. a) $2x$, b) $3x^2$, c) $4x^3$, d) $-\frac{1}{x^2}$, e) $-\frac{2}{x^3}$, f) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2.5. a) Označíme $\varepsilon=\frac{1}{2}(B-A)$. Z definice limity funkce f vyplývá, že existuje číslo a_f takové, že pro každé $x\in(a_f,\infty)$ je $f(x)<A+\varepsilon$. Z definice limity funkce g vyplývá, že existuje číslo a_g takové, že pro každé $x\in(a_g,\infty)$ je $f(x)>B-\varepsilon$. Jestliže označíme a větší z hodnot a_f, a_g je (vzhledem k tomu, že $A+\varepsilon=B-\varepsilon$) splněna nerovnost $f(x)<g(x)$ pro všechna $x\in(a,\infty)$.
b) Úvaha je stejná jako při řešení předcházející úlohy, pouze volíme $\varepsilon=\frac{1}{2}(B-A-D)$.
c) Limita funkce stojící na levé straně nerovnosti v nevlastním bodě ∞ je $\frac{3}{2}$, limita funkce vpravo je 4; proto pro velká x nerovnost platí.

2.3.1. a) $f(0)=-2$, $f(2)=4$, proto existuje bod $x\in(0,2)$ takový, že $f(x)=1$, b) $f(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{6}\pi-1$, $f(\pi)=\pi$, proto existuje bod $x\in(\frac{1}{6}\pi,\pi)$ takový, že $f(x)=2$, c) $f(0)=1$, $f(1)=-1$, proto existuje $x\in(0,1)$ takový, že $f(x)=0$, d) $f(0)=1$, $f(2)=3$, musíme zkusit další body uvnitř intervalu $\langle 0,2\rangle$: $f(1)=-2$, proto existuje $x_1\in(0,1)$ a $x_2\in(1,2)$ tak, že $f(x_1)=f(x_2)=0$.

2.3.2. Funkce není spojitá v intervalu $\langle 0,2\rangle$. Později si nakreslete graf funkce f.

DERIVACE

3.1. Výpočet derivací, diferenciál

3.1.1. Spočítejte derivaci, uveďte největší otevřený interval, na kterém je derivace spočítána, a zjistěte hodnoty funkce a derivace v bodě $x=1$:

a) $f(x)=3(x^2-2x+1)-5\ln x+2\sqrt{x}$, b) $g(x)=\sin 2x+\cos 2x$,

c) $h(x)=9x^{\frac{5}{3}}+\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}$, d) $j(x)=\sqrt{x\sqrt{x^3}}$,

e) $k(x)=2^x$, f) $l(x)=\log x\equiv\log_{10}x$.

3.1.2. Spočítejte derivaci a uveďte největší otevřené intervaly, na kterých vztahy platí:

a) $f(x)=\sin\bigl(\cos(e^{1-2x})\bigr)$, b) $f(x)=(x^2-4x+24)\sqrt{x+3}$,

c) $f(x)=(x+1)^3(x^2-1)^2$, d) $f(x)=\frac{1}{4(x^4+4)}$,

e) $f(x)=e^{-3x}\cos 2x$, f) $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$,

g) $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, h) $f(x)=\frac{3+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$, i) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,

j) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, k) $f(x)=\operatorname{tg}^2 2x$, l) $f(x)=\frac{3-x}{5x+2}$,

m) $m(x)=e^{\frac{x-1}{2x+1}}$, n) $f(x)=\arcsin\frac{x+2}{2}$, o) $g(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$,

p) $f(x)=x^x$, q) $f(x)=\cos^2\sqrt{1+x^2}$, r) $g(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2x-1}$.

3.1.3. Při úpravě výrazu vzniklého derivováním je třeba včas vytknout vše, co vytknout lze. Například

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x^2-3)^4}{(x^2+2)^3}&=\frac{4(x^2-3)^3 2x(x^2+2)^3-(x^2-3)^4 3(x^2+2)^2 2x}{(x^2+2)^6}\\&=\frac{2x(x^2-3)^3(x^2+2)^2\bigl(4(x^2+2)-3(x^2-3)\bigr)}{(x^2+2)^6}\\&=\frac{2x(x^2-3)^3(x^2+17)}{(x^2+2)^4}\,.\end{aligned}$$

Podobně postupujte u těchto funkcí:

a) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-2)^4}$, b) $f(x)=\frac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$, c) $f(x)=\frac{(x^3+2)^3}{(x^2+1)^2}$.

3.1.4. Funkci zapište pomocí záporného exponentu; potom dvakrát derivujte:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2(x^2+1)}$, b) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^3}$,

c) $f(x)=\frac{1}{x^2+2+\sin x}$, d) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

3.1.5. Spočítejte první a druhou derivaci funkce:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$, $a > 0$,

b) $f(x) = \dfrac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}$, $a > 0$, c) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

3.1.6. Spočítejte první a druhou derivaci funkce:

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Postupujte přímým výpočtem.

b) Povšimněte si, že $f(x) = g(x)g'(x)$, kde pro stručnost je použito označení $g(x) = \arcsin x$. Potom ukažte, že platí (pro zkrácení proměnnou x nevypisujeme)

$$f' = g\,g'' + (g')^2,$$
$$f'' = g\,g''' + 3g'g''.$$

Poněvadž se snadno odvodí, že

$$g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad g'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

dostaneme výsledek pouhým dosazováním do předcházejících vztahů.

3.1.7. Funkce f, g a h mají na otevřeném intervalu I potřebné derivace, funkce f je na tomto intervalu nenulová. Spočítejte

a) $\left(\frac{f'}{f}\right)'$, b) $\left(\frac{f'}{f}\right)''$, c) $(fgh)'$, d) $\left(\frac{gh}{f}\right)'$.

3.1.8. Funkce f a g mají na $(-\infty,\infty)$ potřebné derivace, a je pevná konstanta. Spočítejte

a) $\dfrac{d^k}{dx^k}f(3-2x)$, $k = 1,2,\dots$, b) $\dfrac{d^k}{dx^k}\left(f(x)g(a-x)\right)$, $k = 1,2$,

c) $\dfrac{d^k}{dx^k}\dfrac{(x-a)^n}{n!}$, $k = 1,\dots,n$, d) $\dfrac{d^k}{dx^k}\dfrac{1}{(x-a)^3}$, $k = 1,2,\dots$,

e) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f}{1+f^2}$, f) $\dfrac{d}{dx}(f^6g^4)$.

3.1.9. Pro všechna x platí $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Derivujeme jako složenou funkci a dostaneme vztah

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}\,\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = 1.$$

Označíme-li $\varphi = \operatorname{arctg} x$, je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$; poněvadž $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$, dostáváme

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podobně spočítejte první dvě derivace funkce $x \to y(x)$ (nazývané implicitně zadaná funkce) v určeném bodě x:

a) $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$, $x \in (-R, R)$, b) $x\ln y + 2y = x^2 - 2$ v bodě $x = 2$ (kde $y(2) = 1$).

3.1.10. Vše, co bude řečeno, se týká funkce f, která má derivaci na otevřeném intervalu I. Pro takovou funkci označuje

$$df = f'(x)\,dx$$

diferenciál funkce f v bodě $x \in I$, přičemž dx označuje velikost přírůstku nezávisle proměnné x – diferenciál nezávisle proměnné x. Někdy je třeba pro označení diferenciálu psát $df(x, dx)$, abychom zachytili jak bod x, v němž se diferenciál bere, tak i velikost přírůstku dx. Proto například

$$df(x_0, h) = f'(x_0)h$$

znamená diferenciál v bodě x_0 s přírůstkem nezávisle proměnné vyjádřeným veličinou h.

Naproti tomu přírůstkem $\Delta f(x,h)$ se rozumí přesný přírůstek hodnot funkce f, proto se definuje

$$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x).$$

a) Ukažte, že $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x,h) - df(x,h)}{h} = 0$.

b) Nová veličina y (závisle proměnná y) je zavedena vztahem $y = f(x)$. Jak definujeme diferenciál proměnné y? Co takový vztah vyjadřuje?

3.1.11. Porovnejte $\Delta g(x_0,h)$ a $dg(x_0,h)$ tím, že spočítáte $\Delta g(x_0,h) - dg(x_0,h)$ pro obecnou hodnotu přírůstku h nezávisle proměnné; ověřte, že tento výraz (i po dělení přírůstkem h nezávisle proměnné) konverguje k nule, když $h \to 0$:

a) $g(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$, b) $g(x) = x^3$ v bodě $x_0 = 2$,

c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 2$, d) $g(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

3.1.12. Porovnejte $\Delta m(x,h)$ a $dm(x,h)$ tím, že spočítáte $\Delta m(x,h) - dm(x,h)$ pro vybrané hodnoty přírůstku h nezávisle proměnné pro funkci:

a) $m(x) = e^{2x}$ v bodě $x = 0$ a pro tyto hodnoty přírůstku h: $1, 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

b) $m(x) = \cos x$ v bodě $x = \frac{1}{6}\pi$ a pro tyto hodnoty přírůstku h: $1, 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

Řešení.

3.1.1. **a)** $f'(x) = 6(x-1) - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D(f) = (0,\infty)$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -4$,
b) $g'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x)$, $D(f) = (-\infty,\infty)$, $g(1) = \sin 2 + \cos 2 \doteq 0.5$, $g'(1) = 2(\cos 2 - \sin 2) \doteq -2.7$,
c) $h'(x) = 15x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-\frac{5}{2}} \equiv 15x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{4}{x\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^2\sqrt{x}}$, $D(f) = (0,\infty)$, $h(1) = 13$, $h'(1) = 17$,
d) $j'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} \equiv \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$, $D(j) = (0,\infty)$, $j(1) = 1$, $j'(1) = \frac{5}{4}$,
e) $k'(x) = 2^x\ln 2$, $D(k) = (-\infty,\infty)$, $k(1) = 2$, $k'(1) = 2\ln 2 \doteq 1.4$,
f) $l'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10} \equiv \dfrac{\log e}{x}$, $D(l) = (0,\infty)$, $l(1) = 0$, $l'(1) = \frac{1}{\ln 10} \equiv \log e \doteq 0.4$.

3.1.2. **a)** $f'(x) = 2e^{1-2x}\cos\left(\cos(e^{1-2x})\right)\sin(e^{1-2x})$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $f'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x+3}}$ na $(-3,\infty)$,
c) $f'(x) = (x+1)^4(x-1)(7x-3)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $f'(x) = \dfrac{-x^3}{(x^4+4)^2}$ na $(-\infty,\infty)$,
e) $f'(x) = -e^{-3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)$ na $(-\infty,\infty)$, **f)** $f'(x) = \operatorname{arctg} x$ na $(-\infty,\infty)$,
g) $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$, **h)** $f'(x) = \dfrac{10\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2} \equiv \dfrac{5\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}$ na $(-\infty,\infty)$,
i) $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, **j)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ na $(-\infty,\infty)$,
k) $f'(x) = \dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$ na $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $\frac{1}{2}\pi k$, k celé číslo,
l) $f'(x) = \dfrac{-17}{(5x+2)^2}$ na $(-\infty,-\frac{2}{5})\cup(-\frac{2}{5},\infty)$,
m) $m'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}e^{\frac{x-1}{2x+1}} \equiv \dfrac{3m(x)}{(2x+1)^2}$ pro $x \neq -\frac{1}{2}$, **n)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$ na $(-4,0)$,
o) $g'(x) = \dfrac{-(x+1)^2e^{-x}}{(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{-(x+1)^2}{x^2+1}g(x)$ na $(-\infty,\infty)$,

p) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ na $(0, \infty)$, **q)** $f'(x) = \dfrac{-x \sin 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ na $(-\infty, \infty)$, **r)** $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$ na $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

3.1.3. a) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)^2(x+10)}{(x-2)^5}$ pro $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{(x-2)^4(2x+21)}{(x+3)^4}$ pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$,

c) $f'(x) = \dfrac{x(x^3+2)^2(5x^3+9x-8)}{(x^2+1)^3}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

3.1.4. a) $f'(x) = \dfrac{-2(2x^2+1)}{x^3(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(10x^4+9x^2+3)}{x^4(x^2+1)^3}$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)(x+3)}{x^4}$, $f''(x) = \dfrac{2(x^2+6x+6)}{x^5}$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

c) $f'(x) = \dfrac{-(2x+\cos x)}{(x^2+2+\sin x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{(6+\sin x)x^2 + 8x\cos x + \cos^2 x - 3}{(x^2+2+\sin x)^3}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

d) $f'(x) = \dfrac{x^3+3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x) = \dfrac{3x(x-3)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

3.1.5. a) $f'(x) = \sqrt{x^2+a^2}$, $f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{ax+b}}$, $f''(x) = \dfrac{ax+2b}{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$,

c) $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

3.1.6. a) $f'(x) = \dfrac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{1-x^2}$, $f''(x) = \dfrac{(2x^2+1)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{3x}{(1-x^2)^2}$ pro $x \in (-1, 1)$.

3.1.7. a) $\left(\dfrac{f'}{f}\right)' = \dfrac{ff'' - (f')^2}{f^2}$, **b)** $\left(\dfrac{f'}{f}\right)'' = \dfrac{f^2f''' - 3ff'f'' + 2(f')^3}{f^3}$, **c)** $f'gh + fg'h + fgh'$,

d) $\dfrac{fg'h + fgh' - f'gh}{f^2}$. **3.1.8. a)** $(-2)^k f^{(k)}(3-2x)$, **b)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)g(a-x)\big) =$ $f'(x)g(a-x) - f(x)g'(a-x)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(f(x)g(a-x)\big) = f''(x)g(a-x) - 2f'(x)g'(a-x) + f(x)g''(a-x)$,

c) $\dfrac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}$, **d)** $\dfrac{(-1)^k(k+2)!}{2!(x-a)^{k+3}}$, **e)** $\dfrac{(1-f^2)f'}{(1+f^2)^2}$, **f)** $2f^5g^3(3f'g + 2fg')$.

3.1.9. a) $y'(x) = \dfrac{-x}{y(x)}$, $y''(x) = \dfrac{-R^2}{y^3(x)}$, **b)** $y'(2) = 1$, $y''(2) = \frac{1}{2}$.

3.1.10. b) Vztah má tvar $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ a vyjadřuje, jak veliká je změna nové proměnné y, když se původní proměnná x mění o „malé hodnoty" $\mathrm{d}x$.

3.1.11. a) h^2, **b)** $(6+h)h^2$, **c)** $\dfrac{h^2}{4(2+h)}$, **d)** $\dfrac{(1-\sqrt{1+h})h}{2(1+\sqrt{1+h})}$.

3.1.12. a)

$h =$	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\Delta m(0,h) \doteq$	6.389056	1.718282	0.221403	0.020201	0.002002	0.00020002
$\mathrm{d}m(0,h) =$	2	1	0.2	0.02	0.002	0.0002

b)

$h =$	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\Delta m(\frac{1}{6}\pi, h) \doteq$	−0.818845	−0.345729	−0.054243	−0.005043	−0.0005004	−0.000050004
$\mathrm{d}m(\frac{1}{6}\pi, h) =$	−0.5	−0.25	−0.05	−0.005	−0.0005	−0.00005

3.2. Užití derivací

Definice a význam derivace

3.2.1. PŘÍKLAD. Pravděpodobnost dožití se věku x je pro narozeného jedince popsána funkcí $p(x)$. Jak interpretovat funkci μ, která je definována výrazem

$$\mu(x) = -\frac{1}{p(x)} \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\,?$$

Podle definice derivace pro malé kladné h uvedený vztah přibližně vyjadřuje (tím „přesněji", čím je h „menší")

$$\mu(x) \doteq -\frac{1}{p(x)} \frac{p(x+h) - p(x)}{h}.$$

Násobíme h, a zlomek vpravo rozšíříme číslem N_0, které vyjadřuje počet narozených; dostaneme

$$\mu(x)\,h \doteq \frac{N_0 p(x) - N_0 p(x+h)}{N_0 p(x)}.$$

V posledním výrazu $N_0 p(x)$ představuje počet jedinců, kteří dosáhli věku x, a $N_0 p(x+h)$ je počet jedinců, kteří dosáhli věku $x+h$. Rozdíl $N_0 p(x) - N_0 p(x+h)$ udává tedy počet zemřelých ve věku, který je větší než x a je menší než $x+h$. Tedy podíl stojící na pravé straně poslední rovnosti vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec, který se dožil věku x, zemře před dosažením věku $x+h$. Funkce μ se nazývá intenzita úmrtnosti a veličina $\mu(x)\,h$ pro „malá" h odpovídá pravděpodobnosti úmrtí ve věku z intervalu $(x, x+h)$.

3.2.2. Poloha bodu při oscilačním pohybu na přímce je popsána funkcí $x(t) = A\cos\omega t$, kde A, ω jsou kladné konstanty. Najděte výraz pro rychlost $v(t)$ pohybu a najděte místa, kde je rychlost největší. Dále najděte výraz pro zrychlení $a(t)$ pohybu a najděte místa, kde je zrychlení oscilačního pohybu největší.

3.2.3. Veličinou $P(t)$ je vyjádřena velikost populace v závislosti na čase t. Vysvětlete, proč výrazy

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{1}{P(t)} \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}$$

je rozumné nazývat rychlost růstu populace a relativní rychlost růstu populace. Spočítejte, že pokud populace je popsána funkcí $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$, v níž P_0 a α jsou konstanty, potom relativní rychlost růstu populace je α.

Tečna

3.2.4. Napište obecnou rovnici tečny ke křivce $y = 8 - 2x - x^2$ v bodech $(-1, ?)$, $(0, ?)$ a $(3, ?)$.

3.2.5. Napište vektor, který má směr tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $x = a$, v němž existuje derivace funkce f. Napište pro tento bod vektor normály ke křivce, jenž směřuje do míst „jižnějších", než je bod $(a, f(a))$. Jaký je vektor normály směřující do „severnějších" míst?

3.2.6. Je dána funkce f, která má na otevřeném intervalu I derivaci. Najděte vyjádření pro funkci q, která popisuje y-ovou souřadnici bodu, v němž tečna v bodě x ke křivce $y = f(x)$ protíná osu y.

3.2.7. Je dána funkce f, která má na otevřeném intervalu I nenulovou derivaci. Najděte vyjádření pro funkci p, která popisuje x-ovou souřadnici bodu, v němž tečna v bodě x ke křivce $y = f(x)$ protíná osu x.

3.2.8. Funkce f je lichá funkce na $(-\infty, \infty)$ a $y = kx + q$ je tečna v bodě se souřadnicí $x = a$. Jakou rovnici má tečna v bodě se souřadnicí $x = -a$?

3.2.9. Funkce f je sudá funkce na $(-\infty, \infty)$ a $y = kx + q$ je tečna v bodě se souřadnicí $x = a$. Jakou rovnici má tečna v bodě se souřadnicí $x = -a$?

3.2.10. Rovnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v jistém bodě se souřadnicí $x = a$ je $y = kx + q$. Jaká je rovnice tečny v bodě se souřadnicí $x = a$ ke křivce $y = \alpha f(x)$, kde α je libovolná konstanta?

3.2.11. Funkce f je libovolná funkce, která má na otevřeném intervalu I derivaci. Pro libovolný nenulový reálný parametr α sestrojíme funkci f_α předpisem

$$f_\alpha(x) = \alpha f(x) \quad \text{pro} \quad x \in I\,.$$

V bodě se souřadnicí $x = a \in I$, v němž derivace funkce f není rovna nule, sestrojíme tečnu ke grafu funkce f a označíme b bod, v němž tečna protíná osu x. V bodě se stejnou souřadnicí $x = a$ sestrojíme také tečnu ke grafu funkce f_α a označíme b_α bod, v němž tato tečna protíná osu x.

a) Odvoďte vztah mezi b a b_α pouhou úvahou, bez počítání.

b) Napište rovnice tečen a průsečíky b, b_α s osou x spočítejte.

Taylorův vzorec

3.2.12. Pro každou funkci f, která má na otevřeném intervalu I derivace (pro jednoduchost) všech řádů, můžeme pro každý bod $x \in I$ a pro libovolné přirozené číslo n a libovolný bod $x_0 \in I$ psát

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)\,, \end{aligned}$$

kde pro veličinu $R_{n+1}(x)$, kterou nazýváme zbytek, platí vztah

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,$$

v němž bod ξ je nějaký bod z intervalu s krajními body x a x_0. Řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazýváme formální Taylorovou řadou se středem v bodě x_0. Často se pomocí této řady dá vyjádřit hodnota funkce $f(x)$.

a) Napište Taylorovu řadu se středem v bodě $x_0 = 2$ pro funkci $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 8$. Vypište všechny nenulové členy řady. Přesvědčte se, že zadaný polynom je roven odvozené Taylorově řadě.

b) Stejně jako v předcházející úloze: střed v bodě $x_0 = -1$, funkce $f(x) = x^5 - 2x + 1$.

c) Napište formální Taylorovy řady pro funkce $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \cos x$ a $f_3(x) = \sin x$ se středem v bodě $x_0 = 0$. Tyto řady vyjadřují hodnoty funkcí pro každé x – dokonce i komplexní.

d) Najděte přibližné hodnoty pro e a e^{-1} sečtením prvních pěti členů odvozené řady. Srovnejte s hodnotou, kterou najdete na kalkulačce.

e) Najděte přibližné hodnoty $\sin 6°$ a $\cos 10°$ sečtením prvních dvou členů odvozených řad. Velikost úhlu vyjádříme v radiánech a pak dosadíme. Porovnejte s údajem kalkulačky.

Funkce rostoucí, klesající, minimum, maximum

3.2.13. Pomocí Rolleovy věty určete bez počítání disjunktní (bez společných bodů) otevřené intervaly délky jedna, v nichž leží kořeny derivace polynomu $p(x) = x(x^2-1)(x^2-4)$.

3.2.14. PŘÍKLAD. Funkce $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ má zápornou derivaci v každém bodě svého definičního oboru $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Proto je funkce klesající na intervalu $(-\infty, 1)$ a také na intervalu $(1, \infty)$. Nelze říci, že funkce klesá na svém definičním oboru, neboť $0 < 2$ a přitom $f(0) = -1 < f(2) = 3$.

3.2.15. Najděte intervaly, na nichž je funkce $h(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+2)^3}$ monotónní.

3.2.16. Na kterých intervalech je funkce $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$ klesající?

3.2.17. Buď $f(x) = x^3(4-x)$. Ukažte, že pro každé číslo $A < 27$ existuje jediná dvojice bodů (a, b) taková, že $a < 3 < b$ a $f(a) = f(b) = A$.

3.2.18. Dokažte, že funkce g je na svém definičním oboru kladná, když $g(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$.

3.2.19. Najděte maximum a minimum funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$ na intervalu $I = \langle -1, 4 \rangle$.

3.2.20. Najděte maximum a minimum funkce $g(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ na intervalu $I = \langle 0, \infty)$.

3.2.21. Najděte minimum a maximum funkce $h(x) = x^2 - 2x - 4|x-2| + 1$ na intervalu $I = \langle -2, 3 \rangle$.

3.2.22. Najděte minimum a maximum funkce $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ na množině M bodů (x,y) v rovině, když $M = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 3\}$. Množina M se dá zachytit (parametrizovat) jedinou proměnnou, například t; můžeme psát $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$.

3.2.23. Jako v předcházející úloze pro funkci $g(x,y) = 10x^2 + 6xy + 2y^2$ a $M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3.2.24. Najděte mezi kladnými čísly takové, že je pro něj součet druhé a třetí mocniny zmenšený o přirozený logaritmus jeho páté mocniny nejmenší.

3.2.25. Najděte rozměry obdélníka s obvodem $L > 0$, který má největší obsah.

3.2.26. Najděte poloměr základny r a výšku v válce největšího objemu, který se vejde do koule poloměru R. Objem vyjádřete jako funkci výšky $v \in \langle 0, 2R \rangle$.

3.2.27. Jako v předcházející úloze pro kužel s poloměrem základny r a výškou v.

3.2.28. Náklady na provoz jisté lodi se dají rozdělit na paušální a ty, které jsou svázány s rychlostí pohybu lodě. Tyto náklady rostou se třetí mocninou rychlosti a při rychlosti 10 km/h jsou 40 Kč/h. Paušální náklady jsou 640 Kč/h. Při jaké rychlosti jsou náklady na jeden kilometr plavby nejnižší?

3.2.29. Cena $C(x)$ komodity klesá se vzdáleností x od města podle vztahu $C(x) = \dfrac{c_0}{1+\alpha x}$, kde c_0 a α jsou kladné konstanty. Dopravní náklady $D(x)$ rostou lineárně se vzdáleností od města x podle vztahu $D(x) = ax + b$, kde a, b jsou kladné konstanty. Za jakých podmínek na parametry c_0, α, a, b jsou celkové náklady $N(x) = C(x) + D(x)$ nejmenší pro nějakou vzdálenost $x_0 > 0$? Podmínku interpretujte graficky.

3.2.30. Aritmetický průměr. Jsou dána reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$. Najděte bod absolutního (globálního) minima funkce

$$f_A(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2\,.$$

3.2.31. Geometrický průměr. Jsou dána kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$. Najděte bod absolutního (globálního) minima funkce

$$f_G(x) = \sum_{j=1}^{n} (\ln x - \ln x_j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} \ln^2 \frac{x}{x_j}\,.$$

3.2.32. Harmonický průměr. Jsou dána kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$.

a) Najděte bod x_H absolutního (globálního) minima funkce $f_H(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_j}\Big)^2$.

b) Proč stačí hledat minimum mezi kladnými čísly?

c) Spočítejte $f''(x_H)$.

3.2.33. Vyšetřujte minimum vzdálenosti bodu Q a bodů křivky. Odvoďte podmínku, pro x-ovou souřadnici bodu P na křivce $y = x^2$, který je nejblíže bodu $Q = (1, 0)$. Ukažte, že spojnice bodu P s bodem Q je normálou křivky v bodě P.

3.2.34. Dokažte využitím konkávnosti, že funkce $g(\varphi) = 2\varphi + \pi\cos\varphi - \pi$ je nezáporná pro $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Ukažte, že na žádném větším intervalu už tato funkce nezáporná není.

l'Hospitalovo pravidlo

3.2.35. POZNÁMKA. Výrazy, které se mají derivovat při aplikaci l'Hospitalova pravidla, jsou někdy složité a lze je zjednodušit tím, že z nich vypreparujeme části, které mají nenulovou a konečnou limitu. Například

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(5-\cos x)}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\ \lim_{x\to0}(5-\cos x) = 4\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\\ &= 4\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\ \lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\\ &= \frac{4}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Někdy je třeba výraz pro použití l'Hospitalova pravidla připravit. Pak stačí pouze trocha trpělivosti, abychom z úprav, které se nabízejí, vybrali tu správnou. Například, pro výpočet limity $\lim\limits_{x\to0+} x^3\ln x$ vybereme poslední výraz z těchto:

$$\lim_{x\to0+} x^3\ln x = \lim_{x\to0+}\frac{x^3}{(\ln x)^{-1}} = \lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x^{-3}},$$

poněvadž prostřední výraz se užitím l'Hospitalova pravidla komplikuje. Zkuste to.

3.2.36. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-6}{4x^2-8x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+2x^2-x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-4x+1}{6x^3+7x^2-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2\operatorname{tg}x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$, k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$, l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg}x}$,

m) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin x}{\operatorname{tg}3x}$, n) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x-\operatorname{tg}4x)\sin x}{x^4}$, o) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$,

v těchto úlohách označuje $p(x)$ polynom libovolného stupně v proměnné x:

p) $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$, q) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)e^{-\alpha x^2}$, r) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)e^{-\alpha x^2}$.

3.2.37. Nejprve upravte, pak pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{x}{10}}-5x^3-3x^2-1)$, c) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{4}{x\sqrt{x}}+\ln x\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to0+} x^x$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$,

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg}x\right)$, h) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\ln 2x}-\dfrac{2x}{2x-1}\right)$, i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.2.38. POZNÁMKA. Někdy je rozumné ještě před použitím l'Hospitalova pravidla změnit proměnnou. Například přejdeme-li od proměnné x, $x\to0+$ k proměnné $y=\frac{1}{x}$, máme $y\to\infty$, a proto

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} = \lim_{y\to\infty} y^5e^{-y} = \lim_{y\to\infty}\frac{y^5}{e^y} = 0.$$

Pokud nezačneme úpravou, každé užití l'Hospitalova pravidla vede ke stále složitějším výrazům.

Řešení.

3.2.2. Pro rychlost platí $v(t) = -A\omega\sin\omega t$, největší v bodech, kde je $x(t)=0$. Pro zrychlení platí $a(t) = -A\omega^2\cos\omega t \equiv -\omega^2x(t)$, největší je v bodech, kde je $x(t)$ extremální. **3.2.4.** $y-9=0$, $2x+y-8=0$, $8x+y-17=0$. **3.2.5.** Tečný vektor: $\big(1, f'(a)\big)$; normálový vektor mířící severněji: $\big(-f'(a), 1\big)$, normálový vektor mířící jižněji: $\big(f'(a), -1\big)$. **3.2.6.** $q(x) = f(x) - x\,f'(x)$. **3.2.7.** $q(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. **3.2.8.** $y = kx-q$. **3.2.9.** $y=-kx+q$. **3.2.10.** $y=\alpha(kx+q)$.

3.2.11. a) $b=b_\alpha$. **b)** $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, $y-\alpha f(a)=\alpha f'(a)(x-a)$, $b\equiv b_\alpha = a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

3.2.12. a) $f(x) = (x-2)^3-(x-2)^2-(x-2)+2$.
b) $f(x) = (x+1)^5-5(x+1)^4+10(x+1)^3-10(x+1)^2+3(x+1)+2$.
c) $e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$, $\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots$, $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots$,

3.2.13. Derivace je polynom stupně čtyři. Jeho čtyři kořeny leží v intervalech: $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$. **3.2.15.** Derivace je

$$h'(x) = \frac{2x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+2)^4}.$$

Funkce h roste na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 0,1\rangle$, klesá na $\langle -1,0\rangle$ a na $\langle 1,\infty)$.

3.2.16. Pro derivaci platí

$$f'(x) = \frac{-(3x^4+1)}{x^2(x^2-1)^2}.$$

Derivace je tedy záporná pro všechny body definičního oboru. Funkce f klesá na každém z těchto intervalů: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. **3.2.17.** Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty,3\rangle$ a klesající na $\langle 3,\infty)$, přitom $f(3)=27$.

3.2.18. Minimum funkce g na definičním oboru $(0,\infty)$ je v bodě $x=1$; poněvadž $g(1)=1$, je dokonce $g(x)\ge1$ pro každé $x\in(0,\infty)$. **3.2.19.** Minimum na intervalu I je $f(-1)=f(2)=-7$, maximum je $f(4)=13$. **3.2.20.** Minimum na intervalu I je $g(1)=1-\frac{1}{2}\pi$, maximum neexistuje, funkce není shora omezená. **3.2.21.** Minimum na intervalu I je $h(-1)=-8$, maximum je $h(2)=1$. Derivace funkce h v bodě $x=2$ neexistuje. **3.2.22.** Minimum na množině M je 3, maximum je 18. **3.2.23.** Minimum na množině M je 1, maximum je 11. **3.2.24.** $x=1$. **3.2.25.** Čtverec o straně $\frac{1}{4}L$. **3.2.26.** $r=\frac{\sqrt6}{3}R$, $v=\frac{2\sqrt3}{3}R$. **3.2.27.** $r=\frac{2\sqrt2}{3}R$, $v=\frac{4}{3}R$. **3.2.28.** Jde o minimum funkce $F(v)=\frac{4v^3+64000}{v}$. Nejnižší náklady jsou při rychlosti 20 km/h. **3.2.29.** Derivace funkce $N(x)$ je rovna nule v bodě $x>0$, když $a(1+\alpha x)^2=\alpha c_0$. To je možné pouze za podmínky $\frac{\alpha c_0}{a}>1$, což je totéž jako podmínka $N'(0)<0$.

3.2.30. Funkce f_A je definována na $(-\infty,\infty)$. Limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ jsou ∞. Poněvadž je derivace funkce f_A rovna nule pouze v bodě x_A, pro který platí

$$x_A = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j \quad \text{(aritmetický průměr čísel } x_1,\ldots,x_n\text{)},$$

je tento bod absolutním minimem funkce f_A na $(-\infty,\infty)$.

3.2.31. Funkce f_G je definována na $(0,\infty)$. Limity v nule zprava a v nevlastním bodě ∞ jsou ∞. Poněvadž je derivace funkce f_G rovna nule pouze v bodě x_G, pro který platí

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \equiv (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad \text{(geometrický průměr čísel} \quad x_1, \dots, x_n)\,,$$

je tento bod absolutním minimem funkce f_G na $(0,\infty)$.

3.2.32. a) Funkce f_H budeme vyšetřovat na $(0,\infty)$. Pro limitu zprava v nule a pro limitu v $+\infty$ platí

$$\lim_{x\to 0+} f_H(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to +\infty} f_H(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\,.$$

Jakmile je x větší než největší z čísel $x_1, \dots, x_n$, je

$$f(x) < \lim_{x\to\infty} f_H(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\,.$$

Proto existuje bod, ve kterém funkce f_H nabývá minima na intervalu $(0,\infty)$. Tento bod musí být bodem x_H, bodem v němž derivace funkce f_H je rovna nule. Takový bod x_H je jenom jeden a splňuje relaci

$$\frac{1}{x_H} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \quad (x_H \ \text{je harmonický průměr čísel} \quad x_1, \dots, x_n)\,.$$

c) $\dfrac{2n}{x_H^4}$.

3.2.33. Souřadnice x nejbližšího bodu splňuje $2x^3 + x - 1 = 0$. Vektor $\vec{t}_P$, který je tečným vektorem ke křivce $y = x^2$ v bodě $P = (x, x^2)$, má tvar $\vec{t}_P = (1, 2x)$. Poněvadž $\overrightarrow{QP} = (x-1, x^2)$, je jejich skalární součin $\vec{t}_P \cdot \overrightarrow{QP} = 2x^3 + x - 1 = 0$. Proto je $\overrightarrow{QP}$ normálou.

3.2.34. Funkce má hodnotu nula v krajních bodech intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Poněvadž $g''(x) = -\pi\cos\varphi$, funkce je konkávní na $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, a graf leží nad osou x pro hodnoty z vnitřku vyšetřovaného intervalu. Poněvadž $g'(0) = 2 > 0$ a $g'(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \pi < 0$, interval nejde rozšířit.

3.2.36. a) $\frac{7}{4}$, **b)** -6, **c)** $-\frac{3}{10}$, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** $\frac{1}{6}$, **f)** $\frac{1}{2}$, **g)** 0, **h)** 0, **i)** 0, **j)** $\frac{\ln 2}{\ln 3}$, **k)** $\ln\frac{a}{b}$, **l)** 1, **m)** -2, **n)** $-\frac{64}{3}$, **o)** e^2, **p)** 0, **q)** 0, **r)** 0.

3.2.37. a) ∞, píšeme $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$, výsledek je důsledkem $\frac{\ln x}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$,

b) ∞, píšeme

$$e^{\frac{x}{10}} - 5x^3 - 3x^2 - 1 = x^3\Big(\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x^3} - 5 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\Big)\,;$$

podle l'Hospitalova pravidla je limita prvního výrazu v závorce nekonečno,

c) ∞, píšeme

$$\frac{4}{x\sqrt{x}} + \ln x = \frac{1}{x\sqrt{x}}\Big(4 + \frac{\ln x}{x^{-\frac{3}{2}}}\Big)\,;$$

podle l'Hospitalova pravidla je limita druhého výrazu v závorce nula,

d) 1, píšeme $x^x = e^{x\ln x}$ a výsledek je důsledkem $x\ln x \to 0$ pro $x \to 0+$,

e) e, **f)** e^{-2}, **g)** 0, **h)** $-\frac{1}{2}$, **i)** $-\frac{1}{2}$.

3.3. Průběh funkce

3.3.1. Vyšetřete průběh funkce, v inflexních bodech – pokud souřadnice bodu, v němž má funkce inflexi, je snadno vyjádřitelná – spočítejte obecnou rovnici tečny (grafy jsou na konci sekce):

a)	$f(x) = (x+3)^2(x-3)\,,$	b)	$f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}\,,$	c)	$f(x) = \dfrac{6x^2}{x^2+1}\,,$
d)	$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\,,$	e)	$g(x) = \Big(\dfrac{x-1}{x+1}\Big)^2\,,$	f)	$f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}\,,$
g)	$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-a^2}\,,\ a>0\,,$	h)	$f(x) = (x-3)\sqrt{x}\,,$	i)	$f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}\,,$
j)	$f(x) = x^2 e^{-x}\,,$	k)	$m(x) = \dfrac{1}{1-e^x}\,,$	l)	$p(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}\,,$
m)	$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}\,,$	n)	$f(x) = \dfrac{e^x}{x-a}\,,\ a \in R\,,$	o)	$f(x) = ax - \ln x\,,\ a>0\,,$
p)	$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\,,$	q)	$f(x) = 5x^2\ln x\,,$	r)	$h(x) = \ln\Big(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\Big), a>0\,.$

3.3.2. Použijte pouze první derivaci a načrtněte graf funkce $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. Využijte periodicity funkce. V tištěném grafu odhadněte polohu inflexních bodů a jejich x-ových souřadnic. Potom tyto hodnoty spočtěte a výsledky porovnejte. (Graf je na konci sekce.)

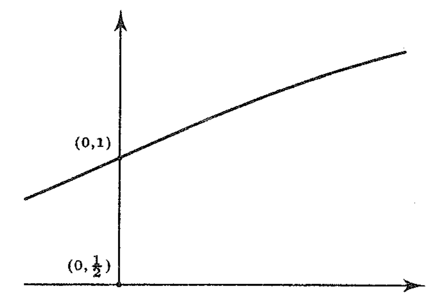
3.3.3. Ukažte, že funkce f a g v úlohách 3.3.1.d a 3.3.1.e splňují $g(x) = f(-x)$ pro $x \in D(g)$. Odvoďte graf a vlastnosti funkce g z grafu a vlastností funkce f.

3.3.4. Ukažte, že funkce m a p v úlohách 3.3.1.k a 3.3.1.l splňují $p(x) = 1 - 2m(x)$ pro $x \in D(p)$. Odvoďte vlastnosti funkce p z vlastností funkce m.

3.3.5. Na obrázku je část grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3}$$

pro hodnoty proměnné x vzaté z jistého (vám zatajeného) okolí bodu $x = 0$. Na ose x je vzdálenost bodu $x = 1$ od počátku X_m milimetrů a na ose y je vzdálenost bodu $y = 1$ od počátku Y_m milimetrů. Kolik je poměr X_m/Y_m, když víte, že je vyjádřitelný jako poměr dvou malých celých čísel?



Řešení.

3.3.1. a) $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce se rovná nule v bodech $x = -3$ a $x = 3$, je záporná na $(-\infty,-3) \cup (-3,3)$, kladná na $(3,\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$, funkce roste na $(-\infty,-3\rangle$ a na $\langle 1,\infty)$, klesá na $\langle -3,1\rangle$, $f''(x) = 6(x+1)$, funkce je konkávní na $(-\infty,-1\rangle$, konvexní na $\langle -1,\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -1$, rovnice tečny v inflexním bodě $(-1,-16)$ je $12x + y + 28 = 0$,

b) $D(f) = (-\infty,\infty)$, lichá funkce, funkce je záporná (resp. kladná) na $(-\infty,0)$ (resp. $(0,\infty)$), $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 1,\infty)$, roste na $\langle -1,1\rangle$, $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle 0,\sqrt{3}\rangle$ konvexní na $\langle -\sqrt{3},0\rangle$ a na $\langle \sqrt{3},\infty)$, funkce má inflexi v bodech $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, tečny v příslušných inflexních bodech mají postupně tyto rovnice $x + 2y + 3\sqrt{3} = 0$, $y = 4x$, $x + 2y - 3\sqrt{3} = 0$,

c) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná sudá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 6$, $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$, roste na $\langle 0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{12(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty)$, konvexní na $\langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$, funkce má inflexi v bodech $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ a $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, rovnice tečny v příslušných inflexních bodech jsou $9\sqrt{3}x + 4y + 3 = 0$ a $9\sqrt{3}x - 4y - 3 = 0$,

d) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = -1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle -1, 1)$, $f''(x) = \dfrac{8(x+2)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -2\rangle$, konvexní na $\langle -2, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -2$ a rovnice tečny v bodě $(-2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x + 27y + 5 = 0$,

e) $D(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to -1} g(x) = \infty$, $g'(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$, funkce roste na $(-\infty, -1)$ a na $\langle 1, \infty)$, klesá na $(-1, 1\rangle$, $g''(x) = \dfrac{-8(x-2)}{(x+1)^4}$, funkce je konvexní na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, 2\rangle$, konkávní na $\langle 2, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = 2$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x - 27y - 5 = 0$,

f) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, funkce se rovná nule pouze pro $x = \frac{1}{2}$, je záporná v $(-\infty, \frac{1}{2})$, kladná v $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle 0, 1)$, minimum f je $f(0) = -1$, $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9})$ má rovnici $8x + 27y + 28 = 0$,

g) $D(f) = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, \infty)$, lichá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, funkce je záporná v $(-\infty, -a) \cup (0, a)$ a kladná v $(-a, 0) \cup (a, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -a+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, přímka $y = x$ je asymptotou v obou nevlastních bodech $\pm\infty$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3a^2)}{(x^2-a^2)^2}$, funkce roste na $(-\infty, -\sqrt{3}a\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}a, \infty)$, klesá na $\langle -\sqrt{3}a, -a)$, na $(-a, a)$ a na $(a, \sqrt{3}a\rangle$, $f(\sqrt{3}a) = -f(-\sqrt{3}a) = \frac{3}{2}\sqrt{3}a$, $f''(x) = \dfrac{2a^2x(x^2+3a^2)}{(x^2-a^2)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -a)$ a na $\langle 0, a)$, konvexní na $(-a, 0\rangle$ a na (a, ∞), funkce má inflexi v bodě $x = 0$ a tečnou v inflexním bodě $(0, 0)$ je osa x.

h) $D(f) = \langle 0, \infty)$, funkce se rovná nule pouze v bodech $x = 0$ a $x = 3$, je záporná na $(0, 3)$ a kladná na $(3, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$, funkce klesá na $\langle 0, 1\rangle$, roste na $\langle 1, \infty)$, minimum je $f(1) = -2$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f''(x) = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}$, funkce je konvexní na $\langle 0, \infty)$,

i) $D(f) = (-\infty, \infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 2$, je kladná na $(2, \infty)$ a záporná na $(-\infty, 2)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, funkce klesá na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, roste na $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$, minimum je $f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5}$, $f''(x) = \dfrac{2-3x-4x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$, funkce má inflexi ve dvou bodech:

$x_1 = \frac{1}{8}(-3-\sqrt{41}) \doteq -1.2$, $x_2 = \frac{1}{8}(-3+\sqrt{41}) \doteq 0.4$, je konkávní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konvexní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

j) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$, roste na $\langle 0, 2\rangle$, $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, funkce má inflexi ve dvou bodech: $x_1 = (2-\sqrt{2}) \doteq 0.6$, $x_2 = (2+\sqrt{2}) \doteq 3.4$, je konvexní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konkávní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

k) $D(m) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, v žádném bodě není funkce rovna nule, funkce je kladná na $(-\infty, 0)$ – je ovšem hned vidět, že na tomto intervalu je větší než 1 –, funkce je záporná na $(0, \infty)$, $\lim_{x\to-\infty} m(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} m(x) = 0$, $\lim_{x\to 0-} m(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} m(x) = -\infty$, $m'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce roste na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $m''(x) = \dfrac{-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3} \equiv \dfrac{(1+e^x)e^x}{(1-e^x)^3}$, v žádném bodě funkce nemá inflexi, je konvexní na $(-\infty, 0)$ a konkávní na $(0, \infty)$, křivka $y = m(x)$ je středově symetrická vzhledem k bodu $(0, \frac{1}{2})$,

l) $D(p) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, lichá funkce, záporná na $(-\infty, 0)$, kladná na $(0, \infty)$ – je vidět, že v absolutní hodnotě jsou hodnoty funkce větší než 1 –, v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to 0-} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} p(x) = \infty$, $p'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $p''(x) = \dfrac{2(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

m) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, funkce kladná ve všech bodech definičního oboru, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2} \equiv \dfrac{-f(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to 0-} f'(x) = 0$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{(2x+1)e^{\frac{x+1}{x}}}{x^4} \equiv \dfrac{(2x+1)f(x)}{x^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a na $(0, \infty)$, funkce má inflexi bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v bodě $(-\frac{1}{2}, e^{-1}) \approx (-\frac{1}{2}, 0.4)$ je $4x + ey + 1 = 0$, poněvadž $f(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$, lze s funkcí zadanou pracovat jako s násobkem funkce h, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

n) $D(f) = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$, funkce je záporná na $(-\infty, a)$, kladná na (a, ∞), v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{(x-a-1)e^x}{(x-a)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, a)$ a na $(a, a+1\rangle$, roste na $\langle a+1, \infty)$, $f(a+1) = e^{a+1}$, $f''(x) = \dfrac{((x-a-1)^2+1)e^x}{(x-a)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, a)$, konvexní na (a, ∞), funkce v žádném bodě nemá inflexi,

o) $D(f) = (0, \infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{ax-1}{x}$, funkce klesá na $(0, \frac{1}{a}\rangle$, roste na $\langle \frac{1}{a}, \infty)$, minimum funkce je $f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$, funkce je konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

p) $D(f) = (0,\infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, funkce roste na $(0,\mathrm{e}\rangle$, klesá na $\langle \mathrm{e},\infty)$, maximum funkce je $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \doteq 0.4$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$, funkce je konkávní na $(0,\mathrm{e}^{\frac32}\rangle$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{\frac32},\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{\frac32}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{\frac32}, \frac32\mathrm{e}^{-\frac32}) \approx (4.5, 0.3)$ je $x + 2\mathrm{e}^3 y - 4\mathrm{e}^{\frac32} = 0$,

q) $D(f) = (0,\infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = 5x(2\ln x + 1)$, funkce klesá na $(0,\mathrm{e}^{-\frac12}\rangle \approx (0, 0.6)$, roste na $\langle \mathrm{e}^{-\frac12},\infty)$, minimum funkce je $f(\mathrm{e}^{-\frac12}) = \dfrac{-5}{2\mathrm{e}} \doteq -0.9$, $\lim_{x\to0+} f'(x) = 0$, $f''(x) = 5(2\ln x + 3)$, funkce je konkávní na $(0,\mathrm{e}^{-\frac32}\rangle$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{-\frac32},\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{-\frac32}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{-\frac32}, -\frac{15}{2}\mathrm{e}^{-3}) \approx (0.2, 0.4)$ je $20\mathrm{e}^{\frac32}x + 2\mathrm{e}^3 y - 5 = 0$,

r) $D(h) = (-a,a)$, sudá a nekladná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to-a+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a-} h(x) = -\infty$, $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2-a^2} \equiv \dfrac{-2x}{a^2-x^2}$, funkce roste na $(-a,0\rangle$, klesá na $\langle 0,a)$, $h''(x) = \dfrac{-2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}$, funkce je konkávní na $(-a,a)$, v žádném bodě nemá inflexi.

3.3.2. Funkce $x \to 2\sin x + \cos 2x$ je definována pro všechna reálná čísla a je periodická s periodou 2π, proto stačí vyšetřit vlastnosti funkce na nějakém intervalu délky 2π. Zvolili jsme interval $\langle 0, 2\pi)$. Poněvadž $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x \equiv 2\cos x(1 - 2\sin x)$, je derivace je nulová pro tyto body z intervalu $\langle 0, 2\pi)$: $x = \frac16\pi$, $x = \frac12\pi$, $x = \frac56\pi$, $x = \frac32\pi$. Hodnoty funkce v těchto bodech jsou $f(\frac16\pi) = f(\frac56\pi) = \frac32$, $f(\frac12\pi) = 1$, $f(\frac32\pi) = -3$, funkce roste na $\langle 0, \frac16\pi\rangle$, na $\langle \frac12\pi, \frac56\pi\rangle$ a na $\langle \frac32\pi, 2\pi)$, klesá na $\langle \frac16\pi, \frac12\pi\rangle$ a na $\langle \frac56\pi, \frac32\pi\rangle$. Pro začátek a konec grafu na $\langle 0, 2\pi)$ využijeme hodnoty $f'(0) = f'(2\pi) = 2$. Poněvadž $f''(x) = -2(\sin x + 2\cos 2x) \equiv 2(4\sin^2 x - \sin x - 2)$, body inflexe splňují $\sin x = \frac18(1 \pm \sqrt{33})$, odtud se získají tyto body inflexe z intervalu $\langle 0, 2\pi)$: $x_1 \doteq 1$, $x_2 \doteq 2.1$, $x_3 \doteq 3.8$, $x_4 \doteq 5.6$. Křivka $y = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in (-\infty,\infty)$, je symetrická vzhledem k osám představovaným přímkami $x = \frac12\pi$ a $x = \frac32\pi$.

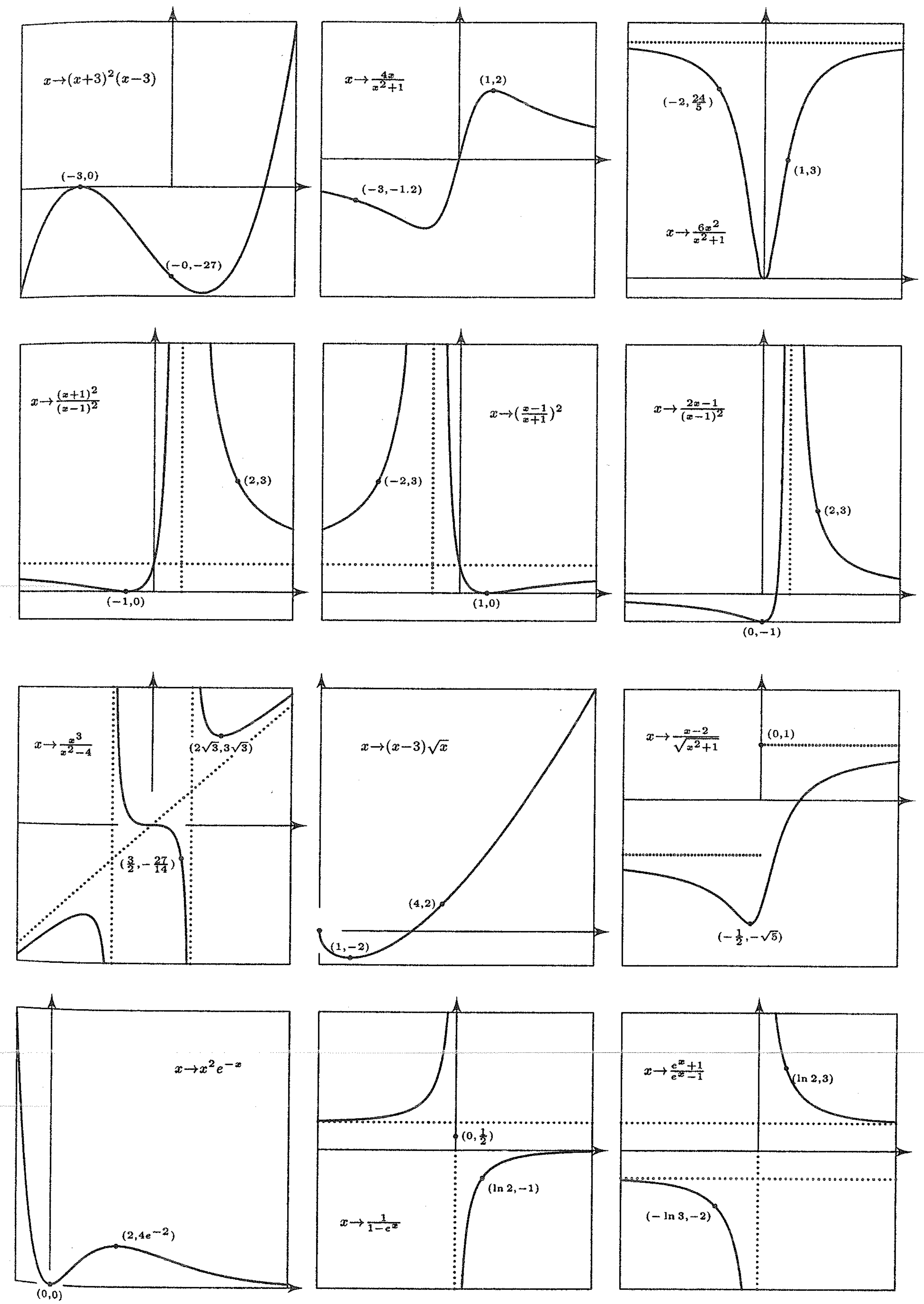
3.3.3. $g'(x) = -f'(-x)$, $g''(x) = f''(-x)$. **3.3.4.** $p'(x) = -2m'(x)$, $p''(x) = -2m''(x)$.

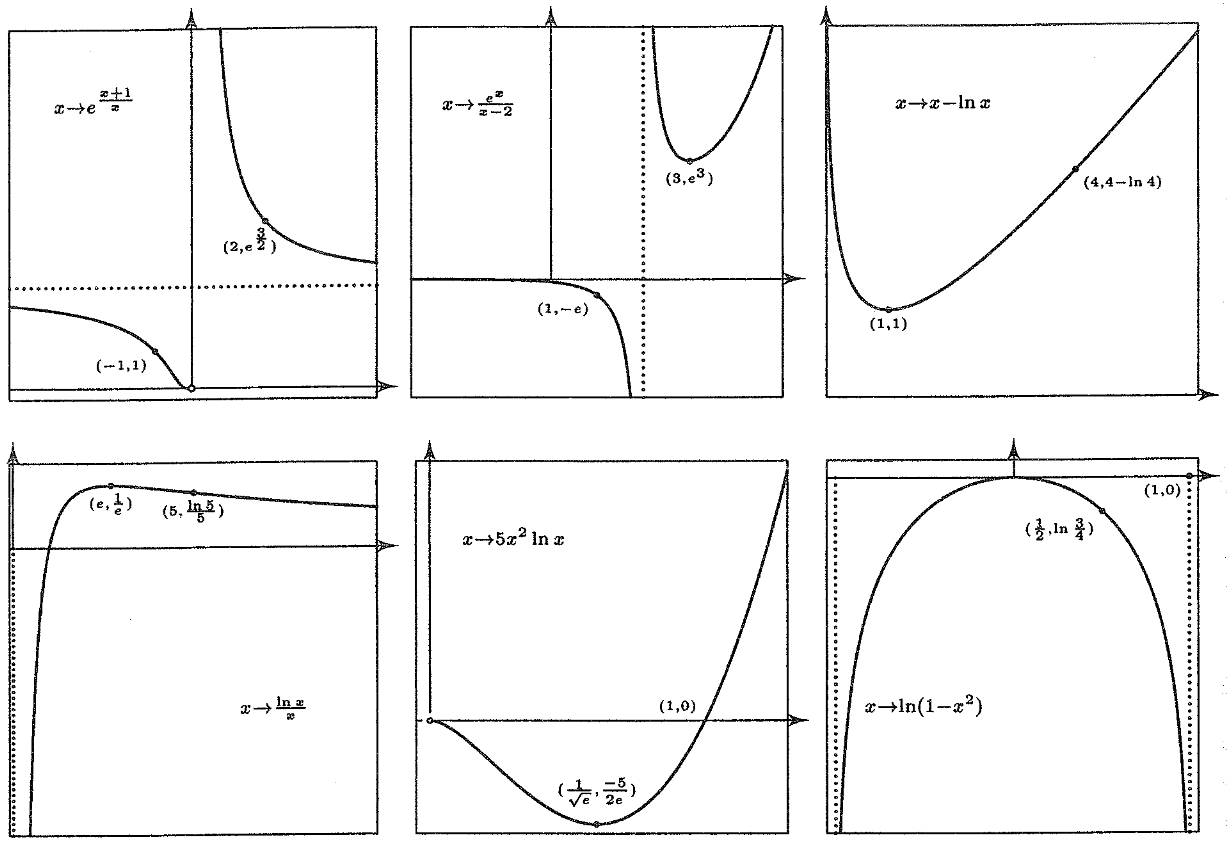
3.3.5. $\dfrac{X_m}{Y_m} = \dfrac32$. Zjistíme, že $f'(0) = \frac23$. Proto nakreslíme do obrázku tečnu v bodě $(0,1)$ a na tečně odměříme přírůstek Δy, který odpovídá přírůstku Δx. Poněvadž musí platit

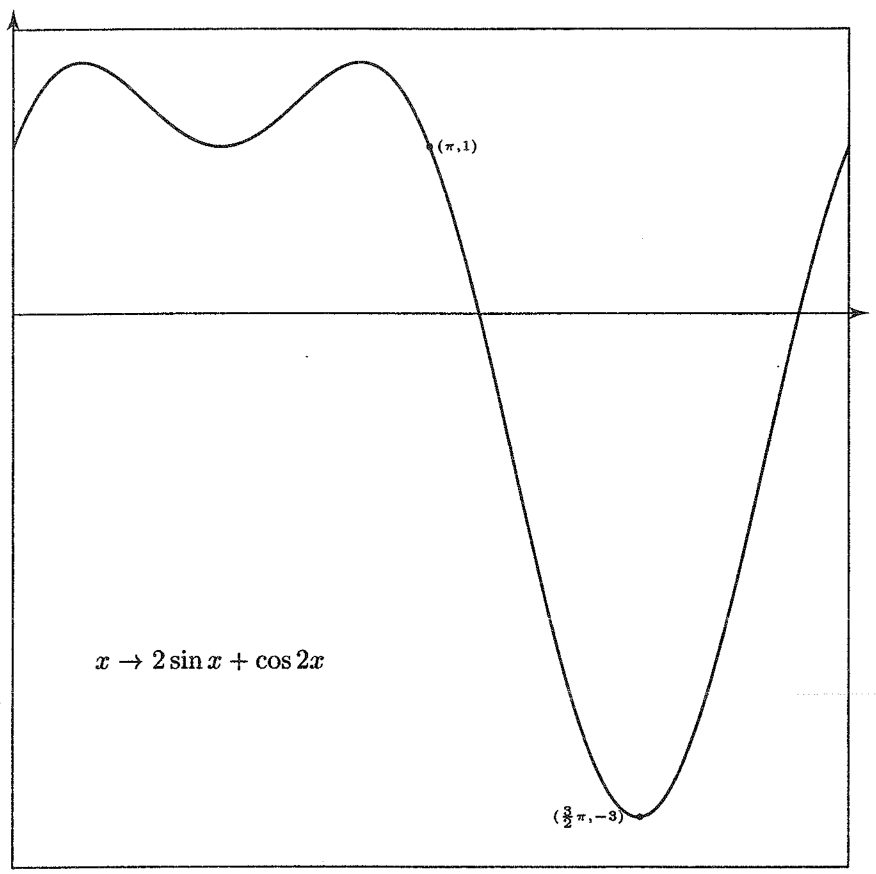
$$\frac{\Delta y}{Y_m} : \frac{\Delta x}{X_m} = \frac23,$$

máme vztah pro výpočet X_m/Y_m.

Schematické grafy funkcí ze cvičení 3.3.1. a 3.3.2.







INTEGRÁL FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

4.1. Neurčitý integrál, část I

4.1.1. POZNÁMKA. Úkolem je pro zadanou spojitou reálnou funkci f na otevřeném intervalu (a,b), $a<b$, nalézt funkci F takovou, že derivace funkce F v každém bodě x intervalu (a,b) je rovna $f(x)$, tj.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (a,b).$$

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f. Také se pro funkci F používá termín neurčitý integrál funkce f, poněvadž se obvykle označuje

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Výraz na pravé straně čteme: Integrál funkce f podle proměnné x. Funkce f je uzavřena mezi symboly $\int$ (integrál) a $\mathrm{d}x$ (diferenciál proměnné x) a mluví se o ní jako o integrované funkci. Někdy se pro její označení používá termín integrand. Snadno uvěříme tomuto základnímu pravidlu

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha,\beta \in (-\infty,\infty),$$

ve kterém f a g jsou dvě libovolné spojité funkce na stejném otevřeném intervalu.

4.1.2. POZNÁMKA. S posledním vztahem je však spojena i jistá těžkost, s níž se ovšem každý rychle vypořádá. Je-li F jedna primitivní funkce k funkci f spojité na (a,b), je také funkce F_1, která se liší od funkce F o konstantu, primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b). Zmíněný vzorec se tedy musí chápat jako návod k postupu při hledání primitivních funkcí. Vzorec použijeme, když jednu ze tří primitivních funkcí v tomto vzorci vystupujících chceme vyjádřit pomocí zbývajících dvou.

4.1.3. POZNÁMKA. V jednoduchých případech dostanene primitivní funkci ze vzorce pro derivování. Pro $n = 0,1,2,3,\ldots$, máme

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n,$$

tento vzorec pro $n = 0$ má tvar $\int 1\,\mathrm{d}x \equiv \int \mathrm{d}x = x + c$. Dále,

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c \qquad \text{pro } x \in (0,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x},$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,0), \text{ neboť} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = \frac{1}{x};$$

poslední dva vztahy se obvykle zapisují jako jeden

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,0) \text{ a pro } x \in (0,\infty).$$

Tím je nalezena primitivní funkce k x^n pro $n=-1$; pro ostatní záporná celá čísla n, $n<-1$, platí

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,0) \text{ a pro } x \in (0,\infty).$$

Pokud a není celé číslo, a tedy přirozeně $a \neq -1$, je

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \text{pro } x \in (0,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{1}{a+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{a+1} = x^a.$$

Dále

$$\int e^x \, dx = e^x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x ,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x ,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c \qquad \text{pro } x \in (-1, 1), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

ale je možné také psát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + c \qquad \text{pro } x \in (-1, 1), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

I zde jsou dvě možnosti:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccotg} x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2} .$$

4.1.4. PŘÍKLAD. Ověřte, že

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

na každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod x takový, že $x = k\pi$ pro nějaké $k \in Z$. Dále ukažte, že

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

na každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod x takový, že $x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ pro nějaké $k \in Z$.

4.1.5. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \left(x^4 - \frac{3}{x^3} - \frac{4-x^4}{x^2}\right) dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{4}} + 2x^2 - e^{\frac{1}{3}\ln x}}{\sqrt{x}} \, dx$, c) $\displaystyle\int (1 + u + \sqrt{u})^2 \, du$.

4.1.6. PŘÍKLAD. Někdy je třeba nejprve upravit výraz, který se má integrovat. Například

$$\int \operatorname{tg}^2 w \, dw = \int \frac{1-\cos^2 w}{\cos^2 w} \, dw = \int \frac{1}{\cos^2 w} \, dw - \int dw = \operatorname{tg} w - w + c ,$$

na intervalech, na kterých je definovaná funkce tg.

4.1.7. POZNÁMKA. Konstantu c, kterou na každém intervalu můžeme k vybrané primitivní funkci přičíst, nebudeme zpravidla dále uvádět. Ukažte, že každé dvě primitivní funkce na intervalu se liší o konstantu.

4.1.8. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x}} \, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{2 - x^2 e^x - x}{x^2} \, dx$.

4.1.9. POZNÁMKA. V mnoha jednodušších případech primitivní funkci prostě uhodneme (a později uvidíme, že k výsledku se dá dopracovat i formálním postupem – substitucí) a derivováním se přesvědčíme, že odhad je správný. Například,

a) $\displaystyle\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$ na $(-\infty, \infty)$, b) $\displaystyle\int e^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$ na $(-\infty, \infty)$,

c) $\displaystyle\int \sin(3x-2) \, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-2)$ na intervalu $(-\infty, \infty)$,

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3} \, dx = \ln|x+3|$ na intervalu $(-\infty, -3)$ a na intervalu $(-3, \infty)$.

4.1.10. POZNÁMKA. Primitivní funkci dokážeme uhodnout i ve složitějších případech, kdy integrand je roven – snad až na numerický faktor – výrazu, v němž lze rozeznat součin funkcí tvaru $f(g(x))\,g'(x)$. Jestliže najdeme funkci $F(x)$, která splňuje $F'(x) = f(x)$, vidíme, že

$$\int f(g(x))\,g'(x) \, dx = F(g(x)) + c , \qquad (*)$$

neboť vzorec pro derivaci složené funkce dává $\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$. Přirozeně, aby složené funkce vůbec byly definovány, je třeba si při obecné formulaci představit, že existuje otevřený interval I takový, že

$$H(g) \subset I \subset D(F) \equiv D(f) .$$

4.1.11. PŘÍKLAD. Na intervalu $(-1, \infty)$ lze psát

$$\int x^2 \sqrt{x^3+1} \, dx = \frac{1}{3} \int (x^3+1)^{\frac{1}{2}} \, 3x^2 \, dx = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c ,$$

poněvadž jsme vzali $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ a $g(x) = x^3 + 1$.

4.1.12. Spočítejte

a) $\displaystyle\int x e^{x^2} \, dx$, b) $\displaystyle\int e^x \cos e^x \, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$.

Řešení. **4.1.5.** **a)** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{x} + \frac{1}{3}x^3 + c$ na intervalech $(0, \infty)$ a $(-\infty, 0)$, **b)** $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + c$ na $(0, \infty)$, **c)** $u + \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + c$ na $(0, \infty)$. **4.1.8.** **a)** $x - 2e^x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$, **b)** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ na intervalech, které jsou posunutím intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ o $k\pi/2$, $k \in Z$, **c)** $-(\frac{2}{x} + e^x + \ln|x|)$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. **4.1.12.** **a)** $\frac{1}{2}e^{x^2}$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $\sin e^x$ na $(-\infty, \infty)$, **c)** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ na $(-\infty, \infty)$.

4.1.13. PŘÍKLAD. **Substituce v neurčitém integrálu.** Formální kabát výše uvedeného postupu se nazývá substituce a spočívá v náhradě proměnné integrandu proměnnou jinou, ve které je integrand buď jednodušší, nebo je typu, u kterého existuje jasný návod jak postupovat dále. Obvykle novou proměnnou zavedeme za výraz, v němž vidíme derivaci vnitřní funkce zbývající části výrazu, který máme integrovat. Například si všimneme, že v integrálu

$$\int x^2 \sqrt[4]{8-x^3} \, dx$$

se x^2 až na konstantu shoduje s $\frac{d}{dx}(8-x^3)$. Proto zavedeme novou proměnnou y vztahem $y = 8 - x^3$. Spočítáme diferenciály obou stran. Dostaneme vztah $dy = -3x^2 \, dx$, který při záměně proměnné x za proměnnou y využijeme pro náhradu diferenciálu dx za diferenciál dy. Postupně potom dostáváme (na intervalu $(-\infty, 2)$ pro proměnnou x a na $(0, \infty)$ pro proměnou y)

$$\int x^2 \sqrt[4]{8-x^3} \, dx = -\frac{1}{3} \int y^{\frac{1}{4}} \, dy = -\frac{4}{15} y^{\frac{5}{4}} + c = -\frac{4}{15}(8-x^3)^{\frac{5}{4}} + c ,$$

neboť součástí výpočtu je také návrat k původní proměnné x.

4.1.14. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x-2} \, dx$, b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \, dx$,

d) $\displaystyle\int (u+3)^2 \, du$, e) $\displaystyle\int \left(6(t-4)^5 + 4(3-2t)^3\right) dt$, f) $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$.

4.1.15. POZNÁMKA. Jestliže funkce f je nenulová na intervalu (a, b) a má v každém bodě tohoto intervalu derivaci, přesvědčíme se snadno derivováním, že na tomto intervalu platí vztah

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c\,.$$

Pokud zavedeme novou proměnnou y vztahem $y = f(x)$, tj. pro diferenciály dostaneme $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme snadno výsledek odvodit pomocí substituce – ne pouze ověřit derivováním.

4.1.16. PŘÍKLAD. Proto máme

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(x^4+2) + c \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

4.1.17. Podobně spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{x}{4x^2+5}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{x+e^x}{2e^x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.1.18. PŘÍKLAD. Integrál

$$\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x\,,$$

v němž p a q jsou celá čísla taková, že $p+q$ je liché číslo, zkoušíme jednou ze substitucí

$$u = \sin x\,,\ v = \cos x$$

převést na integrál, který goniometrické funkce neobsahuje.

V následujícím výpočtu se integrand nejprve mírně upraví a potom se použije substituce $v = \cos x$ ($\mathrm{d}v = -\sin x\,\mathrm{d}x$). Postupně dostáváme

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int (1-v^2)\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{3}v^3 - v + c = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c\,.$$

4.1.19. Podobně si počínejte v těchto úlohách:

a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.1.14. a)** $\frac{1}{3}\ln|3x-2|$ na $(-\infty, \frac{2}{3})$ a na $(\frac{2}{3}, \infty)$, **b)** $\frac{1}{4}\sin^4 x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $\frac{1}{3}(u+3)^3$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $(t-4)^6 - \frac{1}{2}(2t-3)^4$ na $(-\infty,\infty)$, **f)** $\frac{1}{2}\sin^2 x$ na $(-\infty,\infty)$. **4.1.17. a)** $\frac{1}{4}\ln|4x+3|$ na $(-\infty,-\frac{3}{4})$ a na $(-\frac{3}{4},\infty)$, **b)** $\ln(2+\sin^2 x)$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{8}\ln(4x^2+5)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $\ln\sqrt{x^2+2x+3}$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $-\ln|\cos x|$ na intervalech, na kterých je hodnota $\cos x$ nenulová, **f)** $\frac{1}{2}\ln(2e^x+x^2) \equiv \ln\sqrt{2e^x+x^2}$ na $(-\infty,\infty)$. **4.1.19. a)** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty,\infty)$.

4.1.20. PŘÍKLAD. **Integrace per partes v neurčitém integrálu.** Pro dvě funkce f a g, které na intervalu (a,b) mají derivace, podle pravidla pro derivování součinu funkcí platí $f\,g' = (f\,g)' - f'\,g$. Tento výraz, vyjádřený v termínech primitivních funkcí (či neurčitých integrálů), dává

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (*)$$

Tohoto vztahu lze použít k postupu (označovaného jako integrace per partes), kterým se integrand zpravidla zjednodušuje.

Zvolíme-li $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, je $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ (konstanta c ve funkci g je vynechána) a můžeme (ve shodě se vztahem 4.1.20.(*)) postupně psát

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int 1\cdot e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

na intervalu $(-\infty,\infty)$.

4.1.21. Jak se změní výpočet, když v předcházejícím postupu konstantu c u funkce g nevynecháme a vezmeme $g(x) = e^x + c$?

4.1.22. Postup vyjádřený vzorcem 4.1.20.(*) lze uplatnit v případech, kdy integrand je součinem dvou funkcí, z nichž jedna se derivováním zjednodušuje a ke druhé (relativně snadno) najdeme primitivní funkci. Čekáme, že integrál, k němuž dojdeme, bude jednodušší, než integrál, kterým jsme začali. Tento postup uplatněte u těchto úloh:

a) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (x-1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int (2x-5)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

4.1.23. PŘÍKLAD. Někdy je třeba uplatnit integraci per partes vícekrát. Například

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x &= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2\Big(x\cos x - \int \cos x\,\mathrm{d}x\Big)\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + c\end{aligned}$$

na intervalu $(-\infty,\infty)$.

4.1.24. Tyto úlohy se dají řešit vícenásobným použitím integrace per partes:

a) $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (x-1)^2\sin x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

4.1.25. PŘÍKLAD. Někdy je postup založen na umělém obratu. Zde za jednu z funkcí vezmeme konstatní funkci rovnou jedné; máme

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x \equiv \int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c$$

na intervalu $(0,\infty)$.

4.1.26. Podobně postupujete v těchto úlohách:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.1.21.** Postup se komplikuje, konstanta c ale vypadne a výsledek je týž. **4.1.22. a)** $-x\cos x + \sin x$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $(2-x)e^{-2x}$ na $(-\infty,\infty)$. **4.1.24. a)** $(x^2-2x+2)e^x$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $(1+2x-x^2)\cos x + 2(x-1)\sin x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{27}x^3(9\ln^2 x - 6\ln x + 2)$ na $(0,\infty)$. **4.1.26. a)** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$ na $(-1,1)$, **c)** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ na $(0,\infty)$, **d)** $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$, **f)** $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$ na $(-1,1)$.