



Kartografické modelování

II – Mapová algebra – obecné základy a lokální funkce

jaro 2015

Petr Kubíček

kubicek@geogr.muni.cz

**Laboratory on Geoinformatics and Cartography (LGC)
Institute of Geography
Masaryk University
Czech Republic**

Kartografické modelování – historie

- Tomlin (1983) – Map Algebra
- Berry (1987) – Map-matics
- Ustanovili kartografické modelování jako přijatou metodiku pro zpracování geografických dat.



Dana Tomlin



Joseph Berry



Kartografické modelování – základní pojmy

Kartografické modelování je základní způsob vyjádření a organizace metod, jejichž způsobem jsou prostorové proměnné (data) a prostorové operace (funkce) vybírány a používány v GIS.

KM založeno na konceptech datových **vrstev, operací a postupů.**

Nová vrstva je vytvořena ze stávajících vrstev pomocí operací mezi nimi, které jsou spojovány do postupů.

Tomlin (1991) states:

"The fundamental conventions of cartographic modelling are not those of any particular GIS. On the contrary, they are generalized conventions intended to relate to as many systems as possible"

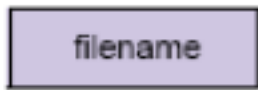
- **KM je implementováno v řadě GIS SW balíčků – ArcGIS, ERDAS, GeoMedia GRID, GRASS, Idrisi.**

Kartografické modelování



Konvence v kartografickém modelování

- **Odlišné datové soubory jsou reprezentovány různým tvarem – rastr, vektor, atributy, tabulky. Názvy jsou uvedeny uvnitř tvarů. Spojení vstupů.**



Raster Image Files



Vector Files



Attribute Values Files



Tabular Data

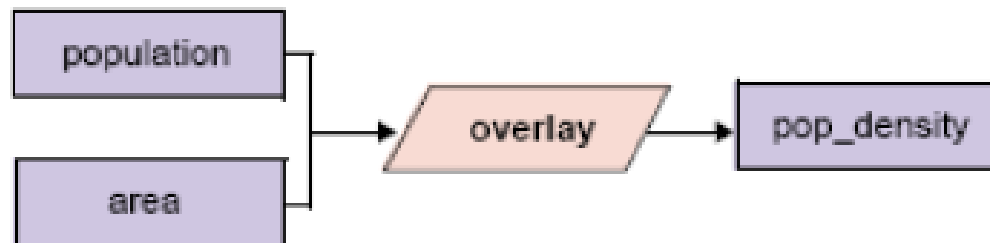
Přirozený jazyk

"If a user can express in words the actions that he wishes to perform on the geographical data, why should s/he not be able to express that action in similar terms to the computer?"

Burrough (1986)

Tomlin – rozpoznal roli přirozeného jazyka pro vyjádření logiky v prostorové analýze. Každá prostorová operace je sloveso, název (jméno) reprezentuje mapovou vrstvou.

Př. Mapa obyvatelstva (jméno 1) je překryta (overlay – sloveso) mapou administrativních jednotek (jméno 2) a vzniká mapa hustoty obyvatelstva (jméno 3 – výsledek).



Kartografické modelování

Příklady použití

- **Termíny nejsou obecně akceptovány – závisí na konkrétní implementaci v GIS balíku.**

Table 1. Examples of natural language verbs.

Operation	Verb	Description
Make a corridor from a linear data set	SPREAD	Renumber all loci with a value reflecting their distance from a given starting point or line
Intersect two polygon networks	OVERLAY	Lay two polygon networks over each other and produce new polygon net
Select according to a condition	EXTRACT	Select specified values and / or ranges of values from one layer to make a new layer

Implementace kartografického modelu v GIS

- **Identifikace požadované mapové vrstvy nebo datové sady.**
- **Použijte logický nebo přirozený jazyk a popište proces vytvoření výsledného modelu (data – výsledek).**
- **Reprezentujte postup graficky, aby zahrnoval navrhované operace a postupy.**
- **Popište grafický postup případnými příkazy, které používá příslušný GIS balík.**

Umístění supermarketu

Vyber místo vhodné pro umístění supermarketu, které leží:

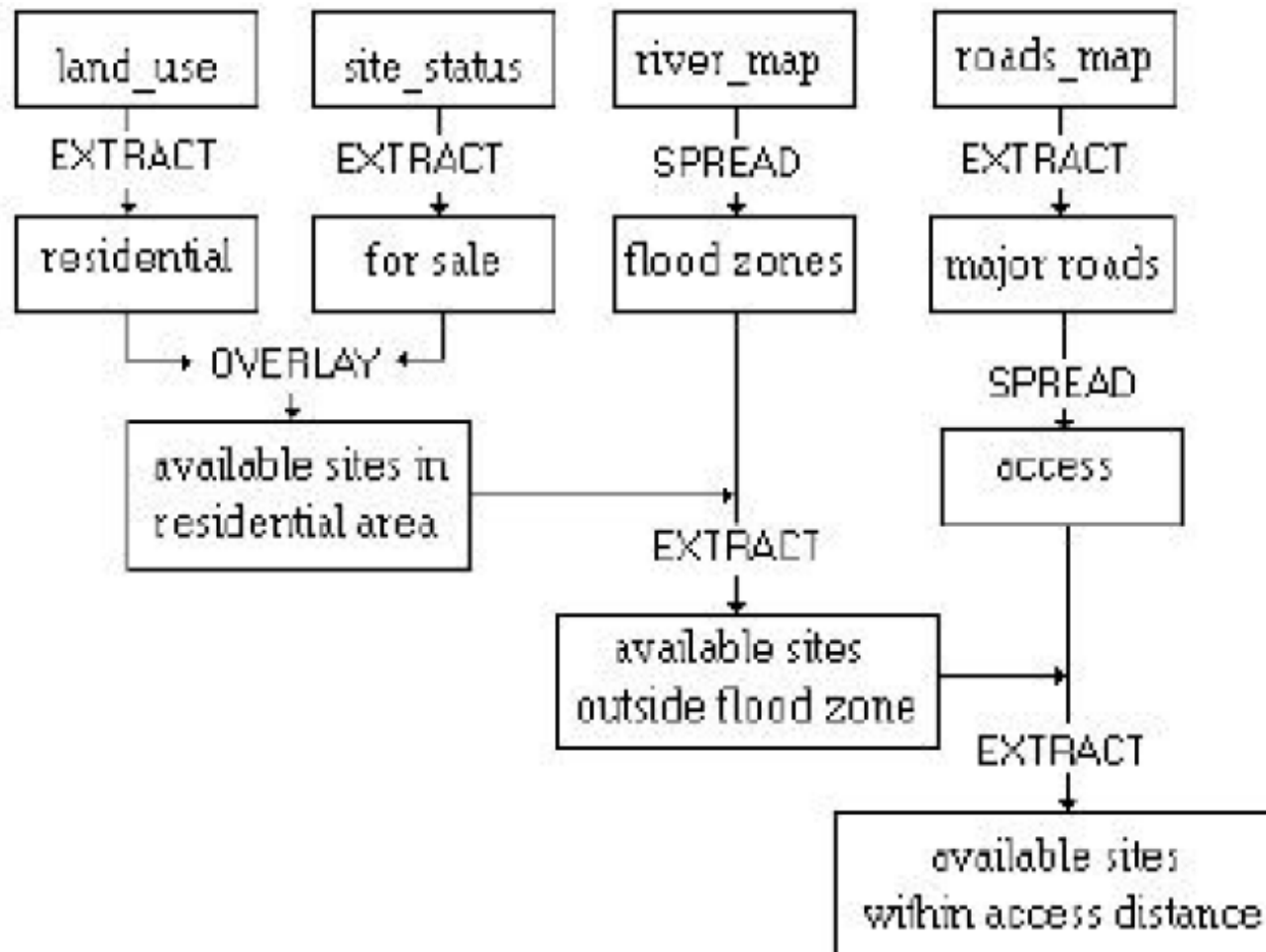
- V obydlené oblasti (intravilán)
- Je na prodej
- Neleží v záplavové zóně
- Je v dosahu 200 m od hlavní silnice

Čtyři datové vrstvy

- **Land_use**
- **Site_status**
- **River_map**
- **Roads_map**

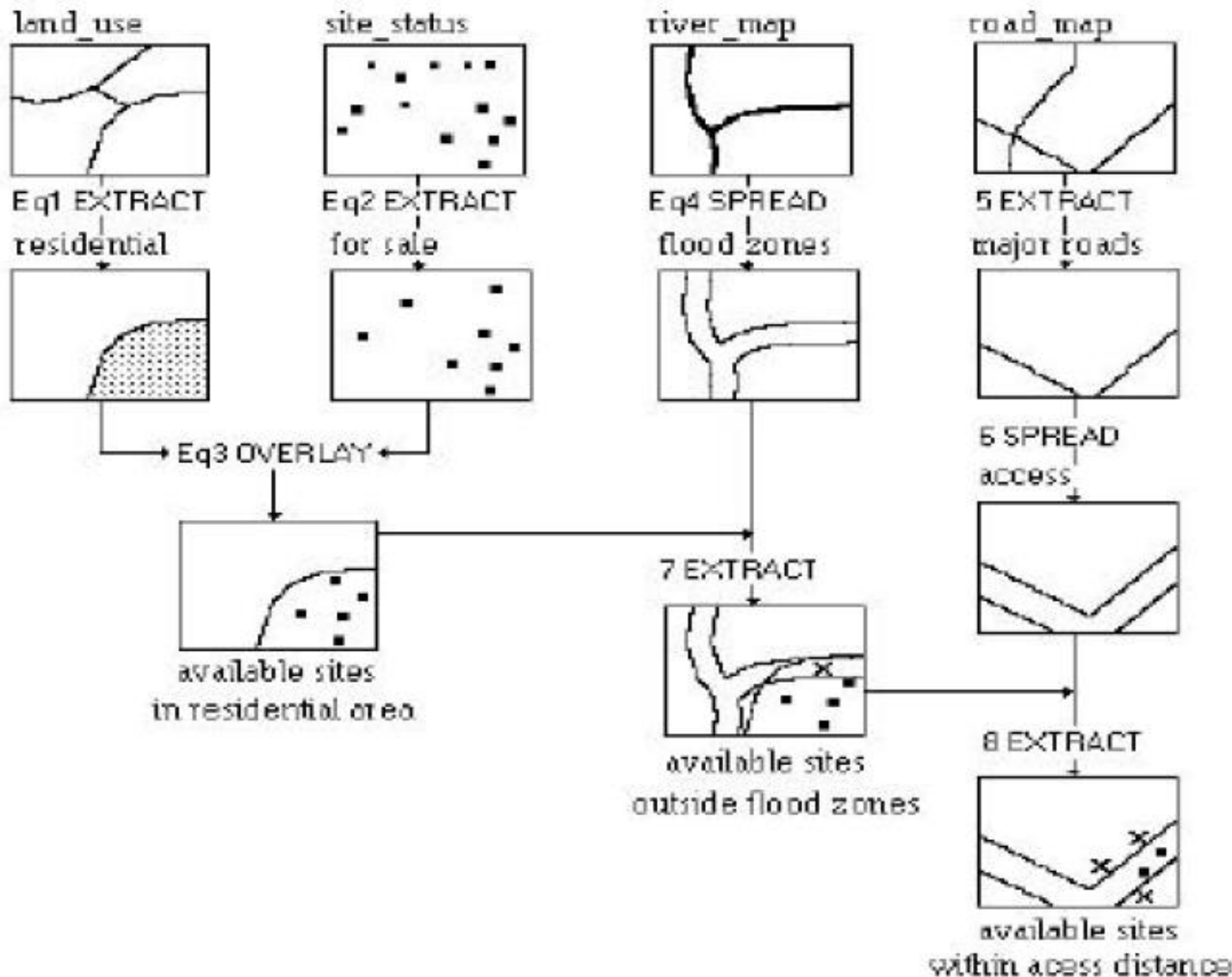
Popis procesu přirozeným jazykem

Table 2 presents four of the equations it would be necessary to solve as part of the process of finding a suitable site for the supermarket.





Grafická reprezentace vhodného místa



Algebraické operace pro GIS

Table 2. Algebraic equations from Figure 5.

From LAND_USE 'extract' RESIDENTIAL

Eq 1 $a - b = c$

where:

a = land_use map

b = non residential zone

c = residential

From SITE_STATUS 'extract' FOR_SALE

Eq 2 $d - e = f$

where:

d = site_status map

e = sites not for sale

f = sites for sale

'Overlay' RESIDENTIAL and FOR_SALE

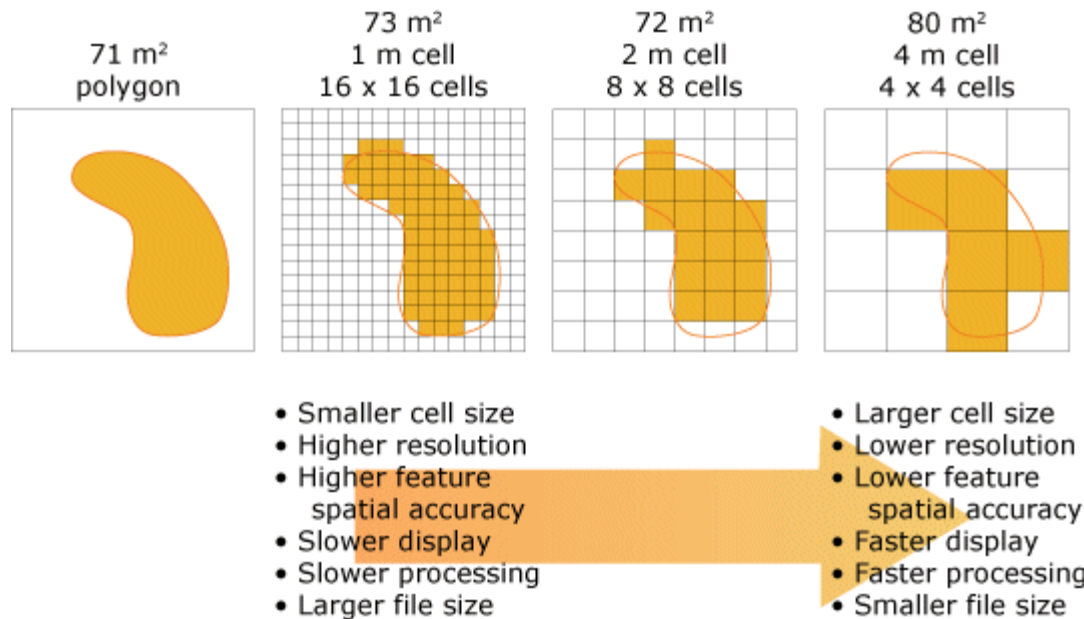
Eq 3 $c * f = g$

where:

g = residential sites for sale

Předpoklady – podmínky užití

- Pravoúhlá soustava čtvercových buněk
- Kategorie, bool, celá čísla, reálná, vektory
- No data

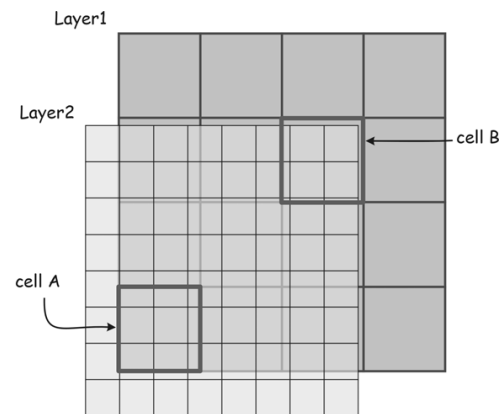


No Data

- Pokud je hodnota buňky definována jako prázdná (NoData), znamená to, že tato **buňka nenes**e žádnou informaci o **prostoru**, který reprezentuje. Zacházení s tímto druhem hodnot se podstatně liší. Buňky s prázdnou hodnotou mohou být zpracovány dvojím způsobem:
 - Přiřazením **prázdné hodnoty buňce výstupního rastru**, pokud existuje prázdná hodnota této polohy v jakémkoli vstupním rastru. **V tomto případě se to týká vstupních rastrů zpracovaných lokálními funkcemi**. V případě fokálních funkcí se prázdná hodnota objeví v místech, kde se v okolí zpracovávané buňky vyskytuje prázdná hodnota. V případě zonálních funkcí by se jednalo o zónu.
 - Druhou možností je **ignorování prázdné hodnoty** a provedení výpočtu pouze s existujícími hodnotami. Tato možnost neše určité riziko, protože výstupní hodnoty nesou určitou nepřesnost plynoucí z toho faktu, že nemáme žádné informace o buňce nesoucí prázdnou hodnotu.
- **0 je validní hodnota**
- **999 obvykle použito pro No data**

Změna velikosti buňky - resampling

- **Resamplování – harmonizace buněk (velikost, poloha)**
 - Nejbližší soused (nearest 1) – ztráta, diskrétní
 - Převládající (majority 1) – zhlazení, diskrétní
 - Bilineární (4) – zhlazení, souvislá
 - Kubická konvoluce (16) – zhlazení, souvislá.



Spojení gridů

- **Spojení gridů - merge, mosaic**



ASCII to Grid

- NCOLS xxx
- NROWS xxx
- XLLCORNER xxx
- YLLCORNER xxx
- CELLSIZE xxx
- NODATA_VALUE xxx
- row 1
- row 2
- .
- .
- row n

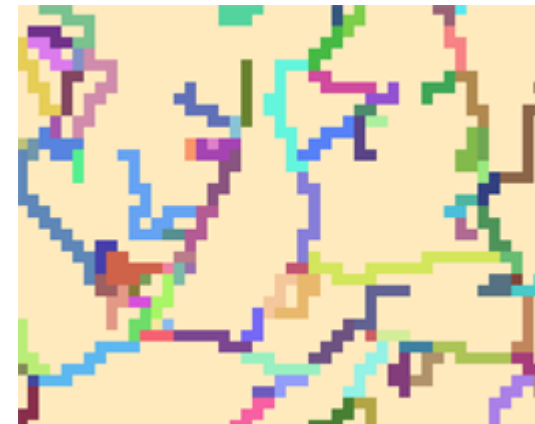


Konverze mezi vektorem a rastrem

Vstup (vektor)



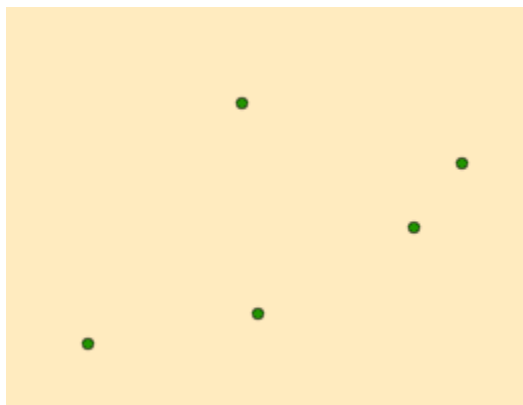
výstup (rastr)



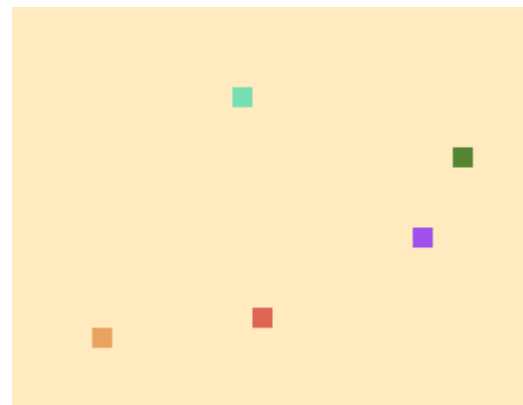
Kartografické modelování

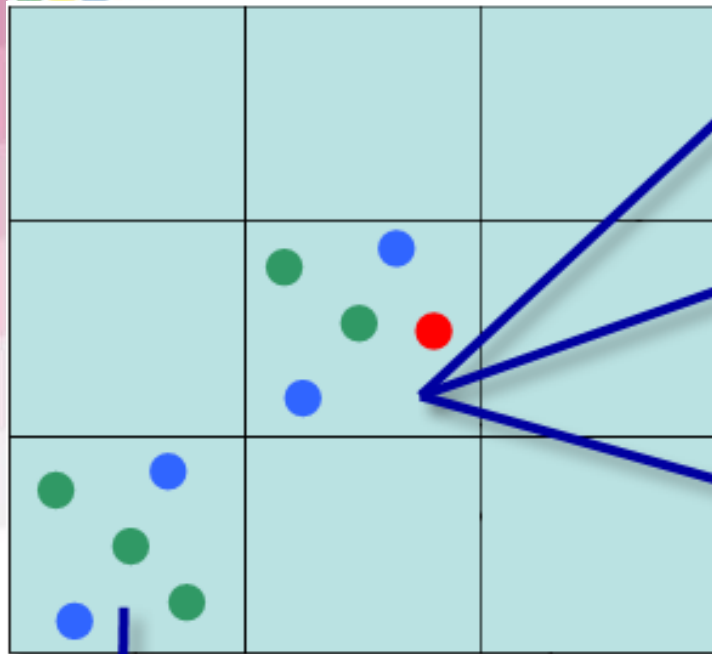


Vstup (vektor)



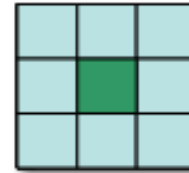
výstup (rastr)





FID | Attribute

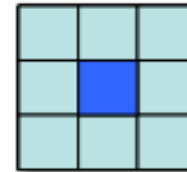
1	Green
2	Red
3	Blue
4	Blue
5	Green



Field = Attribute
 Method = MOST_FREQUENT
 Priority = NONE
 Outcome = Green
 Reason = Lowest FID

FID | Attribute | PriorityFID

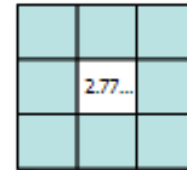
1	Green	1
2	Red	1
3	Blue	1
4	Blue	3
5	Green	2



Field = Attribute
 Method = MOST_FREQUENT
 Priority = PriorityFID
 Outcome = Blue
 Reason = Highest priority

FID | ValueFID

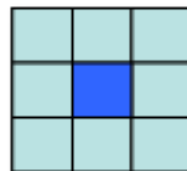
1	1
2	8
3	5
4	3
5	2



Field = ValueFID
 Method = STANDARD_DEVIATION
 Priority = Ignored
 Outcome = 2.774887323379517
 Reason = Priority field is only used with MOST_FREQUENT

FID | Attribute | PriorityFID

1	Green	1
2	Blue	2
3	Blue	2
4	Green	1
5	Green	2



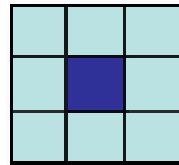
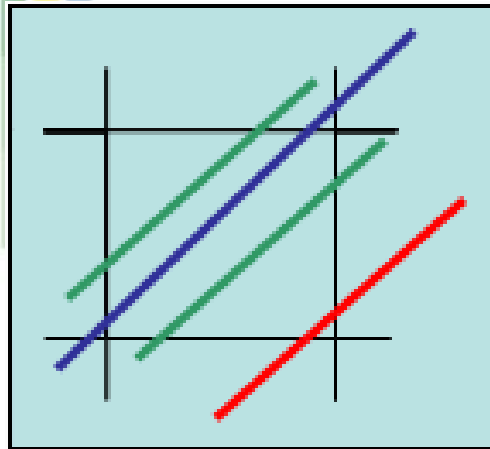
Field = Attribute
 Method = MOST_FREQUENT
 Priority = PriorityFID
 Outcome = Blue
 Reason = Highest priority

Kartografické modelování

Nástroj Polyline to Rastr

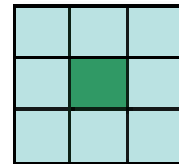
Metody:

- MAXIMUM_LENGTH
- MAXIMUM_COMBINED_LENGTH
- **Priority**



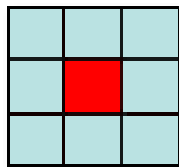
<u>FID</u>	<u>Attribute</u>
1	Green
2	Blue
3	Green
4	Red

Field = Value
 Method = MAXIMUM_LENGTH
 Priority = NONE
 Outcome = Blue
 Reason = Longest length



<u>FID</u>	<u>Attribute</u>
1	Green
2	Blue
3	Green
4	Red

Field = Value
 Method =
 MAXIMUM_COMBINED_LENGTH
 Priority = NONE
 Outcome = Green
 Reason = Length of two green



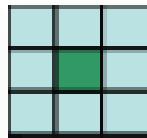
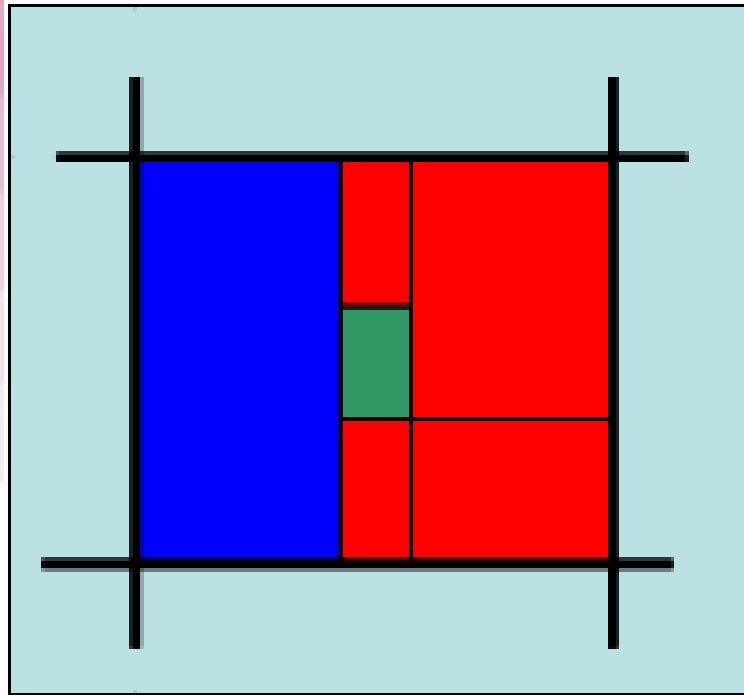
<u>FID</u>	<u>Attribute</u>	<u>PriorityFID</u>
1	Green	1
2	Blue	1
3	Green	2
4	Red	3

Field = Value
 Method = MAXIMUM_LENGTH
 Priority = PriorityFID
 Outcome = Red

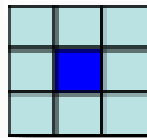
Kartografické modelování

Tři základní metody:

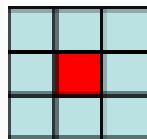
- **CELL_CENTER** - hodnota nacházející se ve středu buňky.
- **MAXIMUM_AREA** - největší souvislá plocha v buňce.
- **MAXIMUM_COMBINED_AREA** - největší sečtená plocha v buňce (i z více nesouvisejících ploch).
- Respektovány pravidla hranice (prvek=buňka)
- Priorita podle FID



CELL_CENTER



MAXIMUM_AREA



MAXIMUM_COMBINED_AREA

<u>FID</u>	<u>Attribute</u>
1	Blue
2	Red
3	Green
4	Red
5	Red
6	Red

Jazyk mapové algebry

- Nástrojů mapové algebry je možné využívat pomocí speciálního jazyka (jazyka mapové algebry).
- Jedná se o jednoduchý **programovací jazyk**
- navržený speciálně **pro popis analýz prostorového modelování** nad rastrovou reprezentací.
- Jeho syntaxe se produkt od produktu liší, ale princip zůstává stejný.

Mapová algebra používá **objekty**, **činnosti** a **kvalifikátory činnosti**. Ty mají obdobné funkce jako **podstatná jména**, **slovesa** a **příslovce**.

- **Objekty** slouží k uložení informací, nebo jsou to vstupní hodnoty. Jako objekty se používají rastry, tabulky, konstanty, ...
- **Činnosti** jsou příkazy jazyka (**operátory a funkce**) - vykonávají operace na objektech:
 - **Operátory** jsou obvyklé matematické, statistické, relační a logické operátory (+, -, *, /, >, <, >=, <=, <>, mod, div, and, or, not, ...).
 - **Funkce** mapové algebry se dělí na lokální, fokální, zonální a globální.



Operátory – základní pravidla použití

- Pokud v příkazu používáme **operátory**, musí být od objektů **odděleny mezerou z obou stran**.
- **Pořadí** provádění **operací** definovanými operátory je určeno pomocí tzv. **hodnoty nadřazenosti** (precedence value), která je přiřazena každému operátoru. Čím vyšší hodnota nadřazenosti, tím má operátor vyšší prioritu.
- Pokud operátory použité v příkazu mají stejnou hodnotu nadřazenosti, pak se operace vykonává „**zleva doprava**“. Nejdřív se vykoná operace daná operátorem, který se nachází víc nalevo od operátoru se stejnou hodnotou nadřazenosti.
- Pokud si chceme stanovit vlastní pořadí provádění operací, jednoduše **použijeme kulaté závorky** (tak jak se tomu běžně děje v klasické algebře).
- Pracujeme-li s **funkcemi**, všechny mají **stejnou hodnotu nadřazenosti**.
- Není-li pořadí určeno závorkami, vykonávají se operace postupně zleva doprava.

Operace na jedné a více vrstvách

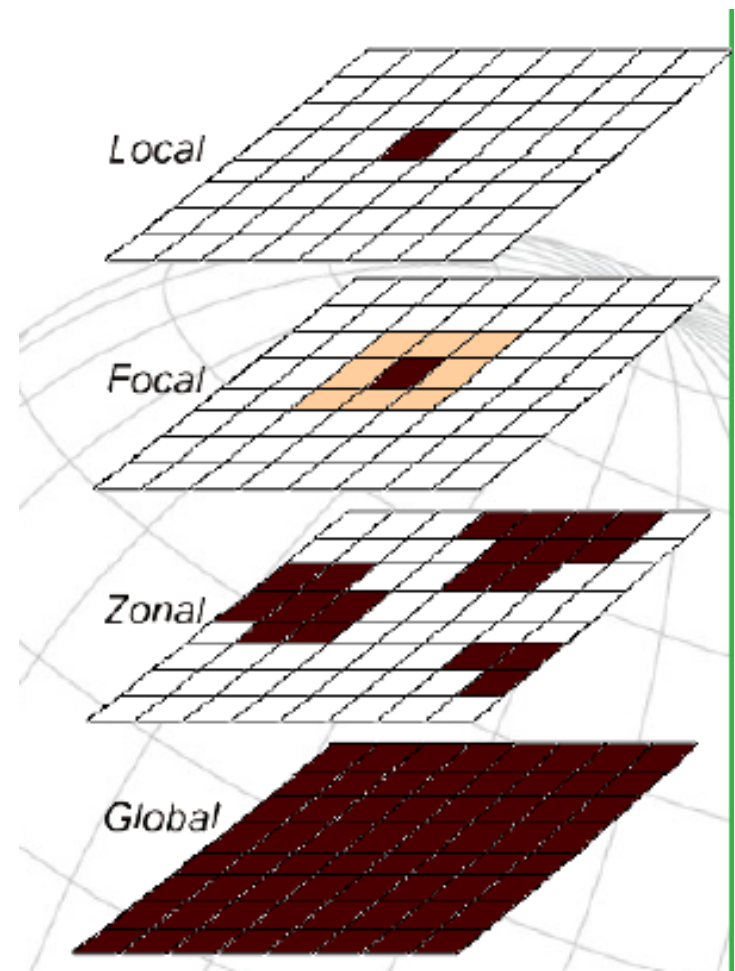
- **Z hlediska počtu zpracovávaných vrstev lze operace mapové algebry dělit na operace s jednou nebo více vrstvami.**
 - Na jedné vrstvě (unární) jsou to nejčastěji skalární operace jako je připočítávání konstanty, násobení, atp. Jako příklad může posloužit tvorba 2x převýšeného DMR pro vizualizaci ve 3D.
 - Na dvou vrstvách (binární) - porovnání
 - Na více vrstvách (n-ární) jsou to operace jako sčítání vrstev (min, max), které se vykonávají s prostorově odpovídajícími si buňkami.

Dělení funkcí mapové algebry

Z hlediska oblasti ze které je počítána hodnota výsledné buňky dělíme funkce mapové algebry na :

- **Lokální** - na individuální buňce, nová hodnota vzniká z individuální buňky jedné nebo více vrstev.
- **Fokální** - v definovaném okolí, nová hodnota vzniká z definovaného okolí buňky.
- **Zonální** - na specifické oblasti, nová hodnota vzniká ze zóny definované v jiné vrstvě.
- **Globální** - používají se všechny buňky informační vrstvy.

Kartografické modelování



Lokální funkce

Lokální funkce se obvykle dělí na:

- **matematické(trigonometrické, exponenciální, logaritmické);**
- **reklasifikační;**
- **selekční;**
- **statistické.**

Reklasifikační funkce

- Mění hodnotu jednotlivých buněk na alternativní hodnoty pomocí různých metod.
 - Look up table.
 - Reklasifikace pomocí individuálních hodnot.
 - Reklasifikace pomocí tříd.
 - Shlukování do intervalů či ploch.



Look up table

- Vytváří nový rastr pomocí vyhledávání hodnot v pomocné tabulce a definovaném sloupci.
 - $OutRas = Lookup(InRas1, "Category")$

0	1	1	0
3	3	1	2
Value = NoData	0	0	2
3	2	1	0

InRas1

=

1	2	2	1
3	3	2	1
Value = NoData	1	1	1
3	1	2	1

OutRas

Value = NoData

Value	Count	Code	Type	Category
0	5	10	PAX	Public
1	4	22	HAR	Private
2	3	14	WIN	Public
3	3	7	SAN	Federal

Value	Count	Category
1	8	Public
2	4	Private
3	3	Federal

Reklasifikace pomocí individuálních hodnot

- Mění hodnoty v poměru jedna k jedné na základě definovaných pravidel.

Reclassification

3	3	19	1	6	6
20	3	19	17	1	5
20	15	15	6	11	14
12	7	15	8	8	10
13	4	18	18		10
16	4	18	7		9

Base Raster



Old Values	New Values
1-1	5
2-2	5
3-3	7
4-4	8
5-5	10
6-6	12
7-7	3
8-8	20
9-9	11
10-10	2
11-11	19
12-12	1
13-13	9
14-14	9
15-15	4
16-16	13
17-17	6
18-18	14
19-19	13
20-20	14



7	7	13	5	12	12
14	7	13	6	5	10
14	4	4	12	19	9
1	3	4	20	20	2
9	8	14	14		2
13	8	14	3		11

Output Raster

■ Value = NoData



Reklasifikace pomocí tříd (range of values)

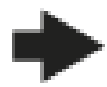
- Změna počtu či hodnoty tříd.
- Příklad: $0 - 9 = 1$; $20 - 30 = 5$; $10 - 19 = 10$
- Pro souvislá data – není nutné definovat všechny hodnoty!
- Nástroj požaduje pouze určení spodní a horní hranice hodnot. Všechny hodnoty v rozmezí jsou reklasifikovány.
- Pozor na mezní hodnoty – potřeba se seznámit s pravidly konkrétního SW.



Reclassification

3	3	19	1	6	6
20	3	19	17	1	5
20	15	15	6	11	14
12	7	15	8	8	10
13	4	18	18		10
16	4	18	7		9

Base Raster



Old Values	New Values
1-3	5
3-7	3
7-8	1
8-12	5
12-15	2
15-16	4
16-19	5
19-20	4
ND =	1



5	5	5	5	3	3
4	5	5	5	5	3
4	2	2	3	5	2
5	3	2	1	1	5
2	3	5	5	1	5
4	3	5	3	1	5

Output Raster

■ Value = NoData

Shlukování do intervalů či ploch

- Rozmezí hodnot je reklasifikováno do:
 - stejných hodnotových intervalů,
 - stejných výsledných ploch
 - pomocí přirozených hranic (natural breaks).
- Nástroj ***Slice*** v ArcGIS

3	3	19	1	6	6
20	3	19	17	1	5
20	15	15	6	11	14
12	7	15	8	8	10
13	4	18	18		10
16	4	18	7		9

Base Raster



Slice
10
Interval



Reclassification

2	2	10	1	3	3
10	2	10	9	1	3
10	8	8	3	6	7
6	4	8	4	4	5
7	2	9	9		5
8	2	9	4		5

Output Raster

Value = NoData

3	3	19	1	6	6
20	3	19	17	1	5
20	15	15	6	11	14
12	7	15	8	8	10
13	4	18	18		10
16	4	18	7		9

Base Raster



Slice
5 Equal
Areas



Reclassification

1	1	5	1	2	2
5	1	5	4	1	2
5	4	4	2	3	4
3	2	4	2	2	3
3	1	4	4		3
4	1	4	2		3

Output Raster

Value = NoData

Lokální funkce ArcGIS

- Lokální *statistické* funkce:
- Kombinace více vstupních rastrů (Combine)
- **Nalezení počtu výskytů** splňujících určitá kritéria - *Equal To Frequency, Greater Than Frequency a Less Than Frequency*.
- **Nalezení hodnoty** splňující určitá kritéria - *Popularity a Rank*.
- **Nalezení polohy** splňující určitá kritéria.



Lokální statistické funkce

- Vypočítá pro jednotlivé buňky **statistiku z daného počtu rastrů**.
- Majority, Maximum, Mean, Median, Minimum, Minority, Range, Standard Deviation, Sum a Variety.
- **Mean - průměr**
- Vypočítá průměr z jednotlivých buněk vstupních rastrů.
- Výsledek má vždy hodnotu „floating point.“
- `OutRas = CellStatistics(["InRas1", "InRas2", "InRas3"], "Mean")`

1	1	0	0
	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1		0

InRas3

=

	1.0	0.33	0.0
	1.3	2.0	2.3
	0.0	1.0	2.0
2.7	1.0		0.3

OutRas



Lokální statistické funkce

- **Majority** – nejčastěji se vyskytující hodnota v jednotlivých buňkách.
- **Integer, floating point.**
- **Pokud je více možných výsledků, pak NoData.**
- *OutRas = CellStatistics([InRas1, InRas2, InRas3], "Majority")*

1	1	0	0
■	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
■	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

■	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1	■	0

InRas3

=

■	1	0	0
■	■	■	2
■	0	0	2
■	■	■	0

OutRas



Lokální statistické funkce

- **Maximum (median, minimum, minority, range, standard deviation, sum)**
- Nejvyšší hodnota (stejně tak pro ostatní statistické funkce)
- Integer, floating point – input=output
- `OutRas = CellStatistics(["InRas1", "InRas2", "InRas3"], "Maximum")`

1	1	0	0
	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1		0

InRas3

=

	1	1	0
	3	3	3
	0	3	2
4	2		1

OutRas



Lokální statistické funkce

- **Variety – variabilita**
- Určí počet unikátních hodnot v jednotlivých vstupech a buňkách.
- Výstupní rastr je vždy integer.
- $OutRas = CellStatistics([InRas1, InRas2, InRas3], "Variety")$

1	1	0	0
0	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
0	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

0	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1	0	0

InRas3

=

0	1	2	1
0	3	3	2
0	1	2	1
3	3	0	2

OutRas

Kombinace více rastrů

- Funkce **Combine** kombinuje několik vstupních rastrů a přiřadí novou hodnotu všem unikátním kombinacím jednotlivých buněk. Původní hodnoty jednotlivých rastrů jsou zapsány do atributové tabulky výstupního rastru.
- Každá unikátní kombinace je označena novou hodnotou.
- Názvy vstupních rastrů jsou užity jako označení sloupců nové atributové tabulky a označují rodičovství nově vzniklých atributů.

Combine

1	1	0	0
■	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
■	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

=

1	2	3	4
■	5	6	7
■	4	4	7
8	9	2	1

OutRas

■ Value = NoData

Value	Count	Code
0	5	002
1	5	004
2	3	005
4	2	008

Value	Count	Type
0	5	PAX
1	4	HAR
2	3	WIN
3	3	SAN

Value	Count	InRas1	InRas2
1	2	1	0
2	2	1	1
3	1	0	1
4	3	0	0
5	1	1	3
6	1	2	1
7	2	2	2
8	1	4	3
9	1	0	2

$OutRas = Combine([InRas1, InRas2])$

Počet výskytů splňujících určitá kritéria

- Kolikrát jsou hodnoty jednotlivých rastrů „odlišné“ od vstupu (ValRas).
- **Less than Frequency**
- Nepovinný rastr může specifikovat počet výskytů.
- Výstupní rastr je vždy integer
- $OutRas = LessThanFrequency(ValRas, [InRas1, InRas2, InRas3])$

2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2

ValRas

1	1	0	0
1	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
0	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

1	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1	0	0

InRas3

=

3	3	3
2	1	0
3	2	0
1	2	3

OutRas



Hodnoty splňující určitá kritéria

Popularity – pořadí n-tých výskytů – pozor na striktní pravidla počítání (NoData, všechny odlišné hodnoty, všechny stejné hodnoty).

Vstupní rastr určuje pořadí (popularitu) hodnot.

OutRas = Popularity(ValRas, [InRas1, InRas2, InRas3])

2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2

ValRas

1	1	0	0
	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1		0

InRas3

=

	1	1	0
			3
	0	3	2
			1

OutRas

Hodnoty splňující určitá kritéria

- Rank Hodnoty vstupních rastrů jsou seřazeny podle buněk, výstupní hodnota pořadí je určena pomocným rastrem.
- $OutRas = Rank(ConstRas, [InRas1, InRas2, InRas3])$

3	3	3	3
3	3	3	3
3	3	3	3
3	3	3	3

ConstRas

1	1	0	0
■	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

0	1	1	0
3	3	1	2
■	0	0	2
3	2	1	0

InRas2

■	1	0	0
2	0	3	3
0	0	3	2
1	1	■	0

InRas3

=

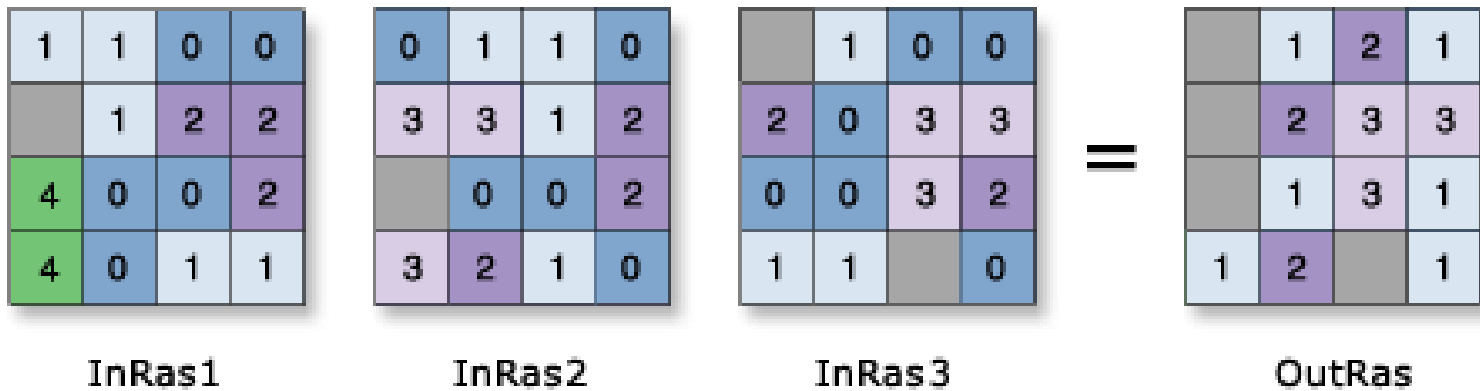
■	1	1	0
■	3	3	3
■	0	3	2
4	2	■	1

OutRas

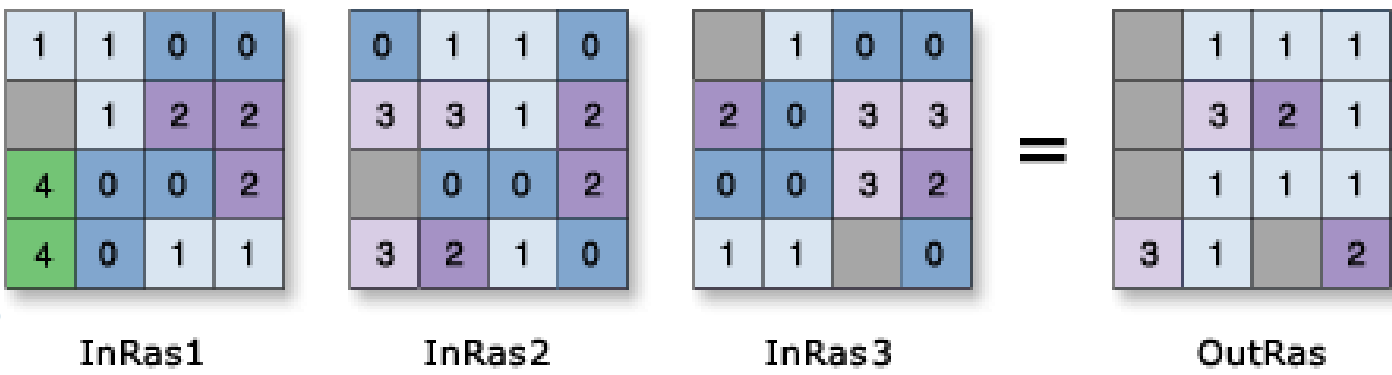


Nalezení polohy splňující určitá kritéria.

- $OutRas = HighestPosition([InRas1, InRas2, InRas3])$



- $OutRas = LowestPosition([InRas1, InRas2, InRas3])$





Výběr pomocí podmínky – conditional

- Kontroluje výsledné hodnoty na základě podmínek, které jsou aplikovány na vstupní hodnoty.
- Podmínky lze uplatnit na atributy či polohu buněk.
- Dotaz (podmínka) na atributy explicitně identifikuje všechny buňky, které jsou hodnoceny jako „True“.
- True buňkám jsou následně přiřazeny nové hodnoty (případně NoData).
- False buňkám jsou přiřazeny hodnoty podle podmínky.
- **Nástroje Con, Pick**

- **Provede podmíněčný výběr na základě požadavku a splnění podmínky.**
- $OutRas = Con(InRas1, 40, 30, "Value \geq 2")$

1	1	0	0
NoData	1	2	2
4	0	0	2
4	0	1	1

InRas1

=

30	30	30	30
NoData	30	40	40
40	30	30	40
40	30	30	30

InRas2

■ Value = NoData

- Hodnota z pozičního rastru je použita k určení toho, z jakého vstupního rastru má být použita hodnota pro výstupní rastr.
- $OutRas = Pick(InRas1, [InRas2, InRas3])$

