

Přednáška II.

Vztah pravděpodobnosti, statistiky a biostatistiky

- ➔ Statistika vychází z pravděpodobnosti
- ➔ Podmíněná pravděpodobnost, Bayesův vzorec
- ➔ Senzitivita, specificita, prediktivní hodnoty
- ➔ Frekventistická a Bayesovská statistika



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Opakování – klíčové principy biostatistiky



Opakování – příčina a důsledek

➔ **Příklad:** Farmaceutická společnost se snaží o kategorizaci nového přípravku proti běžné rýmě. Jako důkaz účinnosti přípravku provedla společnost experiment, kdy byl její přípravek podán velkému množství pacientů s rýmou. S potěšením pak firma reportovala Státnímu ústavu pro kontrolu léčiv, že 90 % pacientů se po 10 dnech užívání cítilo lépe. SÚKL přesto přípravek neschválil.

➔ Proč?

Statistika, biostatistika a analýza dat

Statistika

- Primárně je zaměřena na vývoj metod a algoritmů pro řešení teoretických problémů.
- Nicméně i statistika je vždy primárně motivována reálnými problémy.
- Vychází z teorie pravděpodobnosti.

Biostatistika

- Propojení znalosti statistických metod a dané problematiky v řešení biologických a klinických úloh.
- Na prvním místě není teoretický vývoj, ale aplikace.

Analýza dat

- Velmi obecná oblast bez jasné definice.
- Prostupuje různými odvětvími.
- Zahrnuje komplexní postupy hodnocení dat (čištění, kódování).
- Nemusí být založena na statistice.

Biostatistika vychází ze statistiky

- ➡ Biostatistika je **aplikace statistických metod** v řešení biologických a klinických problémů.
- ➡ Snahou je **získat z pozorovaných dat užitečnou informaci**. V popředí zájmu je pozorovaná variabilita mezi studovanými subjekty, kterou chceme vysvětlit.

Statistický pohled na problém

- ➔ **Cílová populace** – chceme postihnout konkrétní problém.
- ➔ Získáme **experimentální vzorek** cílové populace (pozorování), která převedeme na **číselné vyjádření** (data). Vzorek by měl být reprezentativní a náhodný.
- ➔ Předpokládáme **pravděpodobnostní chování** (model) tohoto vzorku (tedy i cílové populace).
- ➔ Konkrétní problém vyjádříme ve vybraném modelu jako **hypotézu**.
- ➔ **Zhodnotíme hypotézu** na základě vybraného modelu a pozorovaných dat.



Statistika vychází z pravděpodobnosti

- ➡ Teorie pravděpodobnosti se zabývá **modelováním náhody**.
- ➡ Lze nějak ale vyjádřit, co je to náhoda?

Statistika vychází z pravděpodobnosti

- Teorie pravděpodobnosti se zabývá **modelováním náhody**.
- Lze nějak ale vyjádřit, co je to náhoda?

Objektivní nepředvídatelnost?

Nedostatek informací?

Statistika vychází z pravděpodobnosti

- Teorie pravděpodobnosti se zabývá **modelováním náhody**.
- Lze nějak ale vyjádřit, co je to náhoda?

Objektivní nepředvídatelnost?

Nedostatek informací?

“Chance is only ignorance of the connections between phenomena.”

Pierre Simon de Laplace

Statistika vs. pravděpodobnost

Statistika



Pravděpodobnost



Statistika vs. pravděpodobnost

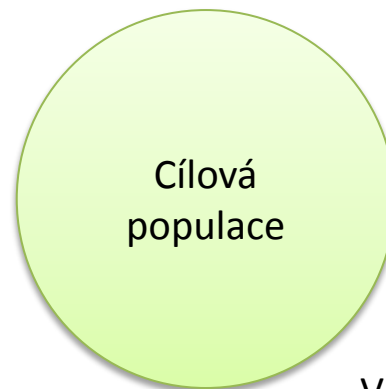
Statistika



Cílem statistiky je získání informace o cílové populaci na základě pozorovaného experimentálního vzorku.



Pravděpodobnost



V teorii pravděpodobnosti se ptáme na pravděpodobnost získání konkrétního výsledku, máme-li danou strukturu cílové populace.



Značení

- **Základní prostor** (Ω) – množina všech možných výsledků experimentu
- **Elementární jev** (ω) – konkrétní výsledek experimentu
- **Náhodný jev** (A) – podmnožina základního prostoru
- **Množina všech jevů** (\mathbf{A}) – množina (všech) podmnožin základního prostoru
- \emptyset představuje jev nemožný, Ω zase jev jistý
- Množinové operace mají v teorii pravděpodobnosti svůj význam:
 1. $\omega \in A$ - jev A nastane, když nastane ω
 2. $\omega \notin A$ - jev A nenastane, když nastane ω
 3. $A \subset B$ - nastání jevu A implikuje nastání jevu B
 4. $A \cap B$ - nastání jevu A a zároveň jevu B
 5. $A \cup B$ - nastání jevu A nebo jevu B
 6. $A \cap B = \emptyset$ - jevy A a B se navzájem vylučují, jsou *disjunktní*
 7. A^c - nastání jevu opačného k jevu A

Pravděpodobnost

→ Pravděpodobnost lze definovat jako funkci, která přiřazuje náhodnému jevu reálné číslo mezi 0 a 1. Je to tedy funkce $P: \mathbf{A} \rightarrow [0,1]$. Musí platit následující:

$$1. P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$$

$$2. A \subseteq \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$3. A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definice pravděpodobnosti

→ **Klasická definice pravděpodobnosti:** předpokládáme, že Ω je konečná a všechny ω jsou stejně pravděpodobné. Pak

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

kde $|A|$ je počet prvků množiny A (počet elementárních jevů jevu A).

→ **Axiomatická definice pravděpodobnosti:** Ω je libovolná množina elementárních jevů, \mathbf{A}' je množina měřitelných jevů (\mathbf{A}' je podmnožina \mathbf{A}). Funkce $P: \mathbf{A}' \rightarrow [0,1]$, která splňuje

1. $P(\Omega) = 1$

2. $A_1, A_2, \dots \in \Omega: A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

se nazývá pravděpodobnost. Trojice (Ω, \mathbf{A}', P) se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Definice pravděpodobnosti – najděte rozdíly

→ **Klasická definice pravděpodobnosti:** předpokládáme, že Ω je **konečná** a všechny ω jsou **stejně pravděpodobné**. Pak

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

kde $|A|$ je počet prvků množiny A (počet elementárních jevů jevu A).

→ **Axiomatická definice pravděpodobnosti:** Ω je **libovolná** množina elementárních jevů, \mathbf{A}' je množina měřitelných jevů (\mathbf{A}' je podmnožina \mathbf{A}). Funkce $P: \mathbf{A}' \rightarrow [0,1]$, která splňuje

1. $P(\Omega) = 1$

2. $A_1, A_2, \dots \in \Omega: A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

se nazývá pravděpodobnost. Trojice (Ω, \mathbf{A}', P) se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Co to znamená?

- Axiomatická definice připouští i **nespočetný základní prostor**, tedy nespočetnou množinu elementárních jevů.
- **Příklady**: hod kostkou × měření výšky lidské postavy

- Axiomatická definice připouští **různou pravděpodobnost** různých **elementárních jevů**.
- **Příklady**: hod kostkou × měření výšky lidské postavy

Nezávislost jevů

→ Dva jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

→ Jsou-li dva jevy A a B nezávislé, pak i

A^c je nezávislé na B

A je nezávislé na B^c

A^c je nezávislé na B^c

Nezávislost jevů

→ Dva jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

→ Jsou-li dva jevy A a B nezávislé, pak i

A^c je nezávislé na B

A je nezávislé na B^c

A^c je nezávislé na B^c

→ **Příklad:** Uvažujme opět hod kostkou a jevy $A = \{1, 3, 5\}$ a $B = \{4, 5, 6\}$.

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq 1/4 = P(A)P(B)$$

→ Jevy A a B tedy nejsou nezávislé.

Podmíněná pravděpodobnost

➔ Máme-li jev B s pravděpodobností $P(B) > 0$, pak podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky nastoupení jevu B definujeme jako

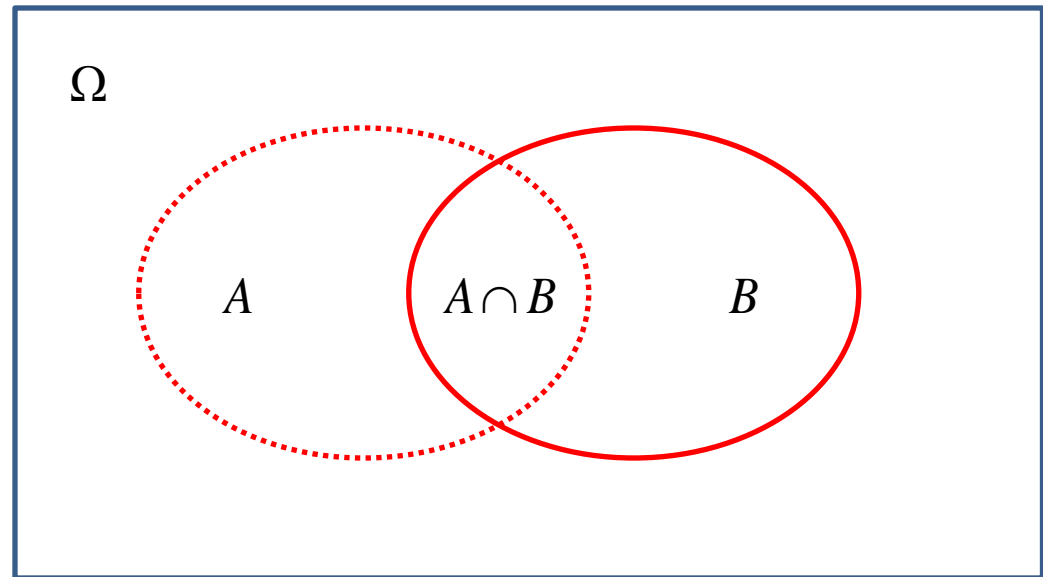
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

➔ Pro nezávislé jevy A a B platí

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Podmíněná pravděpodobnost

→ **Příklad:** Osoba X má všechny typické příznaky chřipky. Pravděpodobnost, že se jedná o klasickou chřipku je $0,7$ (jev A), prasečí chřipku $0,2$ (jev B), ptačí chřipku $0,05$ (jev C) a dosud neznámou formu $0,05$ (jev D). Diagnostický test prokázal, že klasická chřipka to není. Jaká je nyní pravděpodobnost, že se jedná o novou formu chřipky?

Podmíněná pravděpodobnost

→ **Příklad:** Osoba X má všechny typické příznaky chřipky. Pravděpodobnost, že se jedná o klasickou chřipku je 0,7 (jev A), prasečí chřipku 0,2 (jev B), ptačí chřipku 0,05 (jev C) a dosud neznámou formu 0,05 (jev D). Diagnostický test prokázal, že klasická chřipka to není. Jaká je nyní pravděpodobnost, že se jedná o novou formu chřipky?

→ **Řešení:**

$$P(D | A^c) = \frac{P(D \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(D)}{P(A^c)} = \frac{0,05}{0,3} = 0,167$$

Celková pravděpodobnost a Bayesův vzorec

→ Můžeme-li rozdělit základní prostor na k po dvou disjunktních podmnožin ($H_i, i = 1, \dots, k$), pro které zároveň platí, že jejich sjednocení je celý základní prostor (tzv. systém hypotéz), pak pravděpodobnost jevu A lze získat jako

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A | H_i)P(H_i)$$

Vzorec pro celkovou pravděpodobnost

→ Dále platí

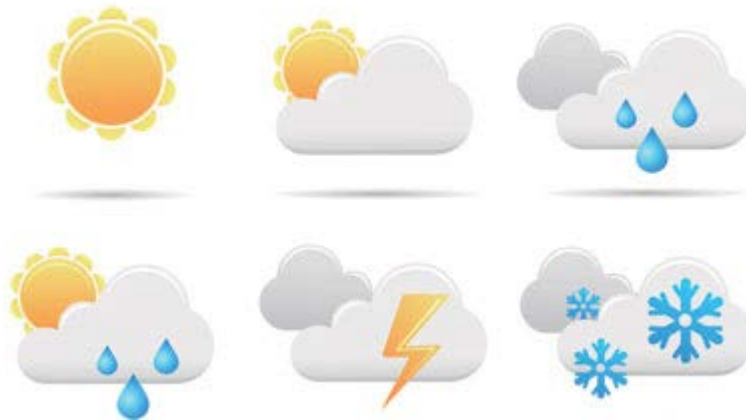
$$P(H_j | A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)} = \frac{P(A | H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^k P(A | H_i)P(H_i)}$$

Bayesův vzorec



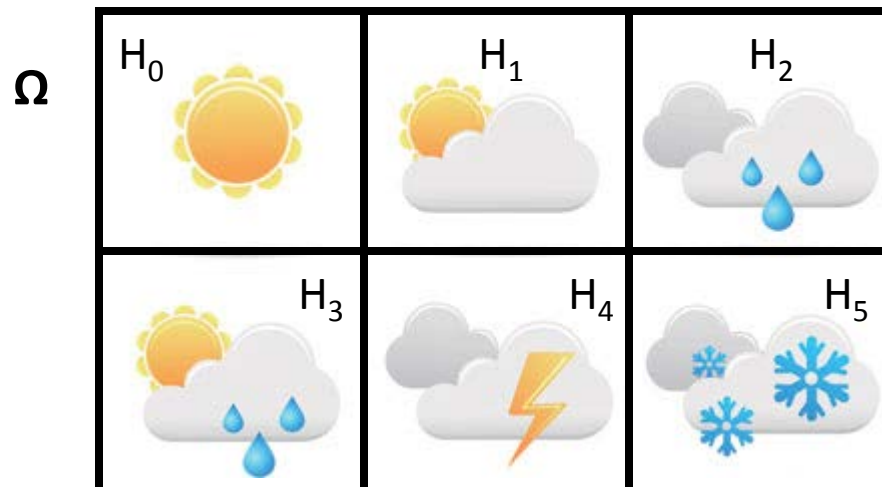
Počasí a podmíněná pravděpodobnost

→ Co má počasí společného s pravděpodobností?



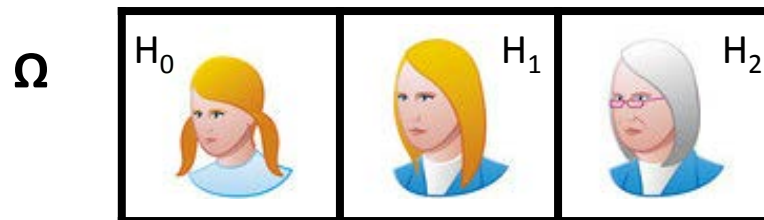
Počasí a podmíněná pravděpodobnost

- Co má počasí společného s pravděpodobností?
- U každého jevu (A) se můžeme ptát na jeho pravděpodobnost za slunečného počasí, za deště, za bouřky, atd. Celkovou pravděpodobnost jevu A potom můžeme získat jako součet přes tyto možnosti.
- Tyto stavy lze chápat jako **výchozí hypotézy** ovlivňující výsledek, přičemž vždy nastává (platí) pouze jeden z těchto stavů (hypotéz). **Pokud pozorujeme jev A , můžeme se zpětně ptát na platnost těchto hypotéz (s použitím Bayesova vzorce).**



Celková pravděpodobnost – jiný příklad

- Populaci můžeme rozdělit dle věku na tři skupiny: děti (H_0), dospělé v produktivním věku (H_1) a dospělé v postproduktivním věku (H_2), přičemž známe rozdělení populace, tedy známe $P(H_0)$, $P(H_1)$ a $P(H_2)$.



- Označme jev A : stane se úraz.
- Známe-li pravděpodobnost úrazu u dítěte, $P(A|H_0)$, u dospělého v produktivním věku, $P(A|H_1)$, a u dospělého v postproduktivním věku, $P(A|H_2)$, jsme schopni pomocí vzorce pro celkovou pravděpodobnost spočítat $P(A)$.

Bayesův vzorec

→ **Příklad:** Uvažujme populaci mužů nekuřáků ve věku 50 – 60 let, u kterých sledujeme výskyt chronického kašle (jev A). Dle stavu plic můžeme muže zjednodušeně rozdělit na zdravé (jev H_1), nemocné plicním karcinomem (jev H_2) a nemocné sarkoidózou (jev H_3). Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých plicních onemocnění jsou známé, navíc známe i pravděpodobnosti výskytu chronického kašle dle stavu plic:

$$P(H_1) = 0,991, P(H_2) = 0,001, P(H_3) = 0,008$$

$$P(A | H_1) = 0,002, P(A | H_2) = 0,900, P(A | H_3) = 0,950$$

→ Zajímá nás, s jakou pravděpodobností bude u pacienta s chronickým kašlem při podrobnějším vyšetření diagnostikován karcinom plic.

Bayesův vzorec

→ **Příklad:** Uvažujme populaci mužů nekuřáků ve věku 50 – 60 let, u kterých sledujeme výskyt chronického kašle (jev A). Dle stavu plic můžeme muže zjednodušeně rozdělit na zdravé (jev H_1), nemocné plicním karcinomem (jev H_2) a nemocné sarkoidózou (jev H_3). Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých plicních onemocnění jsou známy, navíc známe i pravděpodobnosti výskytu chronického kašle dle stavu plic:

$$P(H_1) = 0,991, P(H_2) = 0,001, P(H_3) = 0,008$$
$$P(A|H_1)=0,002, P(A|H_2)=0,900, P(A|H_3)=0,950$$

→ Zajímá nás, s jakou pravděpodobností bude u pacienta s chronickým kašlem při podrobnějším vyšetření diagnostikován karcinom plic.

→ **Řešení:**

$$P(H_2 | A) = \frac{P(A \cap H_2)}{P(A)} = \frac{P(A | H_2)P(H_2)}{\sum_{i=1}^3 P(A | H_i)P(H_i)}$$

$$P(H_2 | A) = \frac{0,900 \times 0,001}{0,002 \times 0,991 + 0,900 \times 0,001 + 0,950 \times 0,008} = 0,086$$

Význam podmíněné pravděpodobnosti v biostatistice

- ➔ Princip podmíněné pravděpodobnosti je v biostatistice velmi častý – máme **system hypotéz** (nejčastěji dvou) o vlastnostech cílové populace a pozorovaná data. Na jejich základě pak rozhodujeme o platnosti stanovených hypotéz.
- ➔ Přímé použití podmíněné pravděpodobnosti lze demonstrovat na příkladu binárních **diagnostických testů**:
 - ➔ Osoba ve skutečnosti má (jev H) nebo nemá (jev H^c) sledované onemocnění.
 - ➔ Diagnostický test u dané osoby indikuje přítomnost (jev A^+) nebo nepřítomnost (jev A^-) sledovaného onemocnění.
 - ➔ Nás zajímají diagnostické schopnosti testu.

Senzitivita, specificita

		Skutečnost – přítomnost nemoci	
		Ano (H)	Ne (H ^c)
Výsledek diagnostického testu	Pozitivní (A ⁺)	T	U
	Negativní (A ⁻)	V	W

→ **Senzitivita testu:** schopnost testu rozpoznat skutečně nemocné osoby, tedy pravděpodobnost, že test bude pozitivní, když je osoba skutečně nemocná.

→ Senzitivita testu = $P(A^+ | H) = T / (T + V)$.

→ **Specificita testu:** schopnost testu rozpoznat osoby bez nemoci, tedy pravděpodobnost, že test bude negativní, když osoba není nemocná.

→ Specificita testu = $P(A^- | H^c) = W / (U + W)$.

Pozitivní a negativní prediktivní hodnota

		Skutečnost – přítomnost nemoci	
		Ano (H)	Ne (H ^c)
Výsledek diagnostického testu	Pozitivní (A ⁺)	T	U
	Negativní (A ⁻)	V	W

- ➔ **Prediktivní hodnota pozitivního testu:** pravděpodobnost, že osoba je skutečně nemocná, když je test pozitivní.
- ➔ Prediktivní hodnota pozitivního testu = $P(H|A^+) = T / (T + U)$.
- ➔ **Prediktivní hodnota negativního testu:** pravděpodobnost, že osoba není nemocná, když je test negativní.
- ➔ Prediktivní hodnota negativního testu = $P(H^c|A^-) = W / (V + W)$.

Shrnutí

		Skutečnost – přítomnost nemoci	
		Ano (H)	Ne (H ^c)
Výsledek diagnostického testu	Pozitivní (A ⁺)	T	U
	Negativní (A ⁻)	V	W

T + U → **Prediktivní hodnota pozitivního testu**

V + W → **Prediktivní hodnota negativního testu**

T + V



Senzitivita testu

U + W



Specificita testu

Senzitivita, specificita

→ **Příklad:** Zajímá nás přesnost vyšetření jater ultrazvukem, tedy schopnost vyšetření UTZ identifikovat maligní ložisko v pacientových játrech. Přesnost je vztažena k histologickému ověření odebrané tkáně. Výsledky jsou dány tabulkou:

Vyšetření UTZ	Histologické ověření		Celkem
	Maligní	Benigní	
Maligní	32	2	34
Benigní	3	24	27
Celkem	35	26	61

→ Senzitivita testu = $P(A^+ | H) = ?$

→ Specificita testu = $P(A^- | H^c) = ?$

Senzitivita, specificita

→ **Příklad:** Zajímá nás přesnost vyšetření jater ultrazvukem, tedy schopnost vyšetření UTZ identifikovat maligní ložisko v pacientových játrech. Přesnost je vztažena k histologickému ověření odebrané tkáně. Výsledky jsou dány tabulkou:

Vyšetření UTZ	Histologické ověření		Celkem
	Maligní	Benigní	
Maligní	32	2	34
Benigní	3	24	27
Celkem	35	26	61

→ **Senzitivita testu** = $P(A^+ | H) = 32 / 35 = 91,4 \%$ (IS = 75,8 – 97,8)

→ **Specificita testu** = $P(A^- | H^c) = 24 / 26 = 92,3 \%$ (IS = 73,4 – 98,7)

Bayesův vzorec pro výpočet prediktivních hodnot

→ Obě prediktivní hodnoty testu lze vypočítat s pomocí charakteristik testu, senzitivity a specificity, a celkové prevalence onemocnění v cílové populaci.

Senzitivita testu $P(A^+ | H)$ **Specificita testu** $P(A^- | H^c)$ **Prevalence** $P(H)$

**Prediktivní hodnota
pozitivního testu**

$$P(H | A^+) = \frac{P(A^+ | H)P(H)}{P(A^+ | H)P(H) + P(A^+ | H^c)P(H^c)}$$

**Prediktivní hodnota
negativního testu**

$$P(H^c | A^-) = \frac{P(A^- | H^c)P(H^c)}{P(A^- | H^c)P(H^c) + P(A^- | H)P(H)}$$

Pozitivní a negativní prediktivní hodnota

→ **Příklad:** Zajímají nás pozitivní a negativní prediktivní hodnoty diagnostického testu na HIV pozitivitu, u kterého výrobce garantuje 98% senzitivitu a 99% specificitu.

1. Uvažujme jihoafrickou zemi s prevalencí HIV pozitivních cca 20 %:

$$P(A^+ | H) = 0,98; P(A^- | H^c) = 0,99; P(H) = 0,2.$$

Pozitivní a negativní prediktivní hodnota

→ **Příklad:** Zajímají nás pozitivní a negativní prediktivní hodnoty diagnostického testu na HIV pozitivitu, u kterého výrobce garantuje 98% senzitivitu a 99% specificitu.

1. Uvažujme jihoafrickou zemi s prevalencí HIV pozitivních cca 20 %:

$$P(A^+ | H) = 0,98; P(A^- | H^c) = 0,99; \mathbf{P(H) = 0,2}.$$

Prediktivní hodnota pozitivního testu

$$P(H | A^+) = \frac{P(A^+ | H)P(H)}{P(A^+ | H)P(H) + P(A^+ | H^c)P(H^c)} = \frac{0,98 \times 0,20}{0,98 \times 0,20 + (1 - 0,99) \times (1 - 0,20)} = 96,1\%$$

Prediktivní hodnota negativního testu

$$P(H^c | A^-) = \frac{P(A^- | H^c)P(H^c)}{P(A^- | H^c)P(H^c) + P(A^- | H)P(H)} = \frac{0,99 \times (1 - 0,20)}{0,99 \times (1 - 0,20) + (1 - 0,98) \times 0,20} = 99,5\%$$

Pozitivní a negativní prediktivní hodnota

→ **Příklad:** Zajímají nás pozitivní a negativní prediktivní hodnoty diagnostického testu na HIV pozitivitu, u kterého výrobce garantuje 98% senzitivitu a 99% specificitu.

2. Uvažujme evropskou zemi s prevalencí HIV pozitivních cca 0,2 %:

$$P(A^+ | H) = 0,98; P(A^- | H^c) = 0,99; P(H) = 0,002.$$

Pozitivní a negativní prediktivní hodnota

→ **Příklad:** Zajímají nás pozitivní a negativní prediktivní hodnoty diagnostického testu na HIV pozitivitu, u kterého výrobce garantuje 98% senzitivitu a 99% specificitu.

2. Uvažujme evropskou zemi s prevalencí HIV pozitivních cca 0,2 %:

$$P(A^+ | H) = 0,98; P(A^- | H^c) = 0,99; \mathbf{P(H) = 0,002}.$$

Prediktivní hodnota pozitivního testu

$$P(H | A^+) = \frac{P(A^+ | H)P(H)}{P(A^+ | H)P(H) + P(A^+ | H^c)P(H^c)} = \frac{0,98 \times 0,002}{0,98 \times 0,002 + (1 - 0,99) \times (1 - 0,002)} = 16,4\%$$

Prediktivní hodnota negativního testu

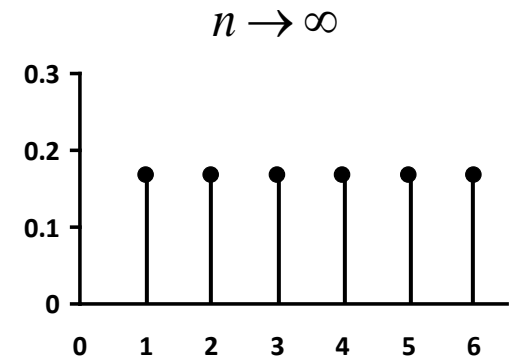
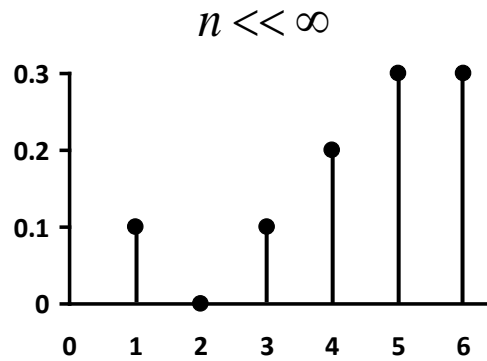
$$P(H^c | A^-) = \frac{P(A^- | H^c)P(H^c)}{P(A^- | H^c)P(H^c) + P(A^- | H)P(H)} = \frac{0,99 \times (1 - 0,002)}{0,99 \times (1 - 0,002) + (1 - 0,98) \times 0,002} = 99,9\%$$

Dva směry statistiky

- Ve statistice existují dva hlavní filozofické směry: **frekventistický** a **Bayesovský**.
- Liší se v pohledu na pravděpodobnostní chování neznámých hodnot, které se snažíme odhadnout.
- **Frekventistická statistika**: všechny neznámé hodnoty považujeme za konstantní (parametry). Na základě dat se snažíme tuto hodnotu „lokalizovat“.
- **Bayesovská statistika**: všechny neznámé hodnoty mají pravděpodobnostní chování (rozdělení pravděpodobnosti). Na základě dat se snažíme toto pravděpodobnostní chování „upřesnit“.

Frekventistická statistika

- ➔ Neznámou charakteristiku cílové populace (konstantu) se snažíme **odhadnout** pouze na základě pozorovaných dat.
- ➔ Důležitý je předpoklad reprezentativnosti vzorku – **pracujeme pouze s daty** jako obrazem neznámé charakteristiky. Bude-li špatný vzorek, bude špatný i odhad (výsledky mohou být velmi odlišné od známých hodnot).
- ➔ Často pracuje s **asymptotickým chováním**, kdy velikost vzorku jde do nekonečna; řada odhadů a testů je odvozena právě pro tyto situace.



Bayesovská statistika

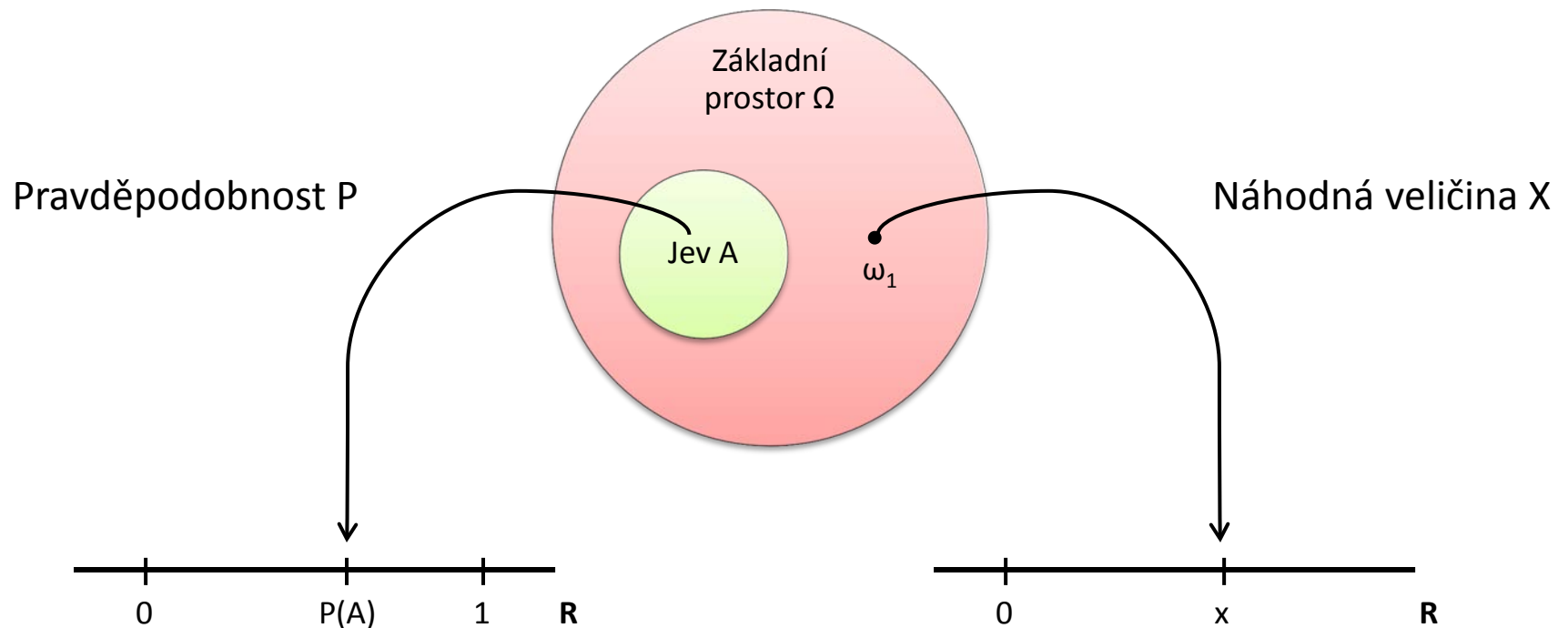
- ➔ Neznámá charakteristika cílové populace má pravděpodobnostní chování, které se snažíme pomocí pozorovaných dat **upřesnit**.

$$P(H | A) = \frac{P(A | H)P(H)}{P(A)} \propto P(A | H)P(H)$$

- ➔ Předpoklad reprezentativnosti vzorku je stále důležitý, ale již nepracujeme pouze s daty – pracujeme i s tzv. **apriorní pravděpodobností**, $P(H)$, což je náš vstupní předpoklad o chování neznámé charakteristiky.
- ➔ Nevýhodou je neznalost apriorní pravděpodobnosti.

Reklama na další týdny...

Středem zájmu statistiky a biostatistiky je tzv. náhodná veličina.



Poděkování...

Rozvoj studijního oboru „Matematická biologie“ PŘF MU Brno je finančně podporován prostředky projektu ESF č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „Víceoborová inovace studia Matematické biologie“ a státním rozpočtem České republiky



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tomáš Pavlík



Biostatistika