SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

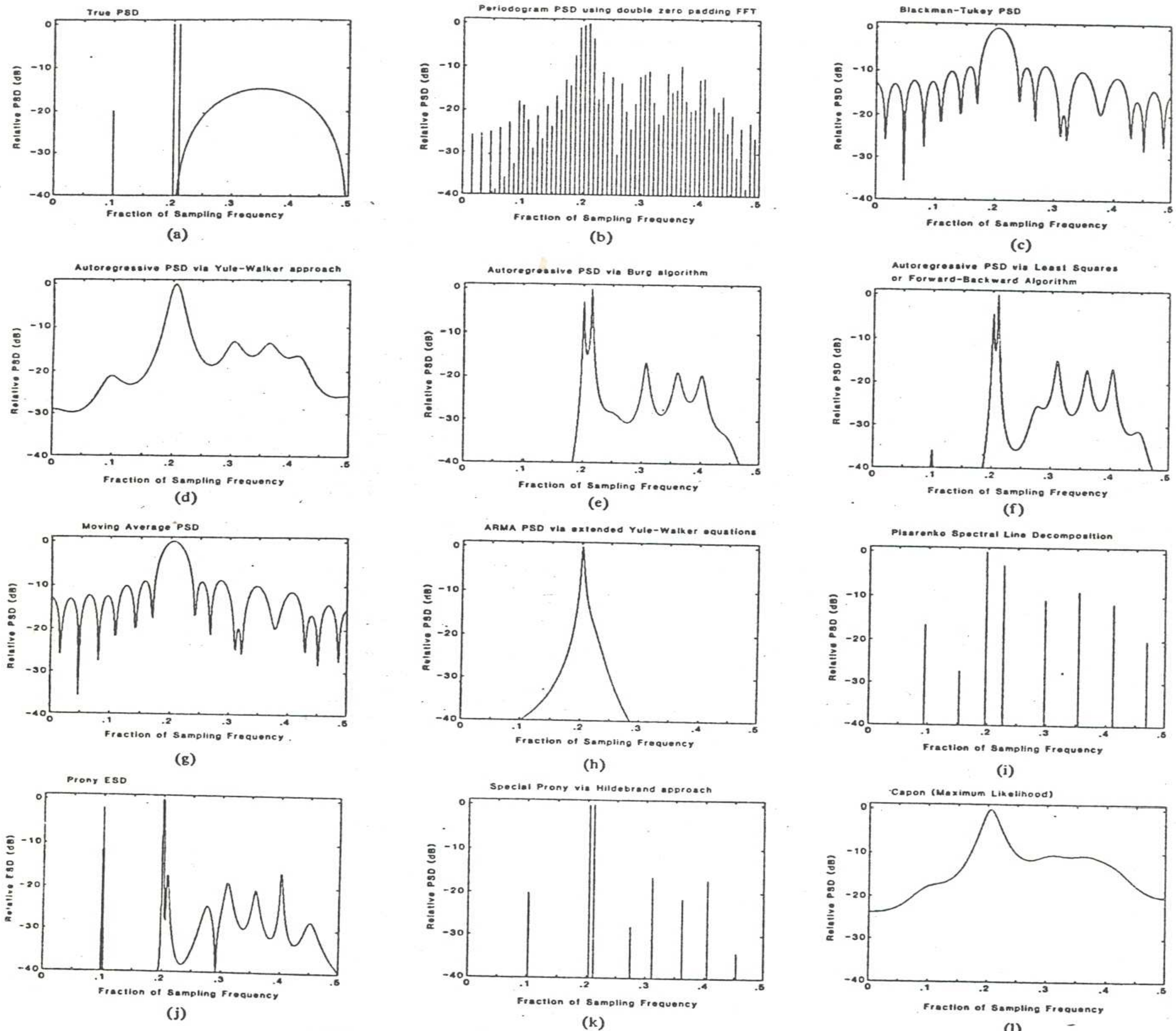
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

UKB, A29, RECETOX, dv.č.112

LITERATURA

- Holčík,J.: přednáškové prezentace
- Proakis,J.G., Rader,C.M., Ling,F., Nikias,C.L.: Advanced Digital Signal Processing. Macmillan Publ. Comp, New York 1992, 608s.
- Kay, S.M., Marple, S.L.: Spectrum Analysis - A Modern Perspective. Proc. IEEE, roč.69, č.11, Nov. 1981, s.1380-1418.
- Bloomfield,P.: Fourier Analysis of Time Series. An Introduction. J.Wiley&Sons, N.York 2000.


True PSD
Periodogram PSD using double zero padding FFT
Blackman-Tukey PSD
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
Autoregressive PSD via Burg algorithm
Autoregressive PSD via Least Squares or Forward-Backward Algorithm
Moving Average PSD
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
Pisarenko Spectral Line Decomposition
Prony ESD
Special Prony via Hildebrand approach
Capon (Maximum Likelihood)
Relative PSD (dB)
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)

I. CO UŽ UMÍME?

SIGNÁL

SIGNÁL

DEFINICE

Signál je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, **a jeho dynamice**.

SIGNÁL

- ☑ **primární oblast popisu** (prostor definovaný nezávislými původními proměnnými)– čas, prostorové souřadnice, pořadí
- ☑ **sekundární oblast popisu** – transformace (zobrazení) z primární oblasti – vytváříme **obraz** (latinsky **spectrum**) signálu

FREKVENČNÍ SPEKTRUM

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

(je paráda, když je lineární!)

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

(je paráda, když je lineární!)

Co to je, když je lineární?

INTEGRÁLNÍ LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

spojitý signál

$$X(f) = \int_{O_a} x(t).a(f,t)dt$$

diskrétní signál (časová řada)

$$X(kF) = \sum_{O_d} x(nT).a_{kn}$$

Je-li jádro transformace $a(f,t)=e^{-j2\pi ft}$, resp. $a_{kn}=e^{-j2\pi kFnT}$, pak realizujeme rozklad signálu na jeho harmonické složky

$$\Downarrow$$

Fourierovské spektrum

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu signálu

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitý periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitý jednorázový signál** má spojité frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- **diskrétní periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova transformace;
- **diskrétní jednorázový signál z nekonečného časového intervalu** má spojité frekvenční spektrum – Fourierova transformace s diskrétním časem transformace;
- **diskrétní jednorázový signál z konečného časového intervalu** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova transformace;

! A VĚDĚT PROČ !

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

JAKÉ MÁME NÁSTROJE K JEHO VÝPOČTU?

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

JAKÉ MÁME NÁSTROJE K JEHO VÝPOČTU?

Fourierova řada

Fourierova transformace

diskrétní Fourierova řada

Fourierova transformace s diskrétním časem

diskrétní Fourierova transformace

FOURIEROVA ŘADA

- každou periodickou funkci $f(t+kT)=f(t)$, (která vyhovuje Dirichletovým podmínkám), můžeme rozložit ve Fourierovu řadu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\Omega t}dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).e^{-j\omega t} dt$$

Fourierova transformace

Funkci S(ω) nazveme spektrální funkcí signálu. Ta už nevyjadřuje skutečné zastoupení jednotlivých harmonických složek signálu, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Pro časovou funkci můžeme psát vztah

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega).e^{j\omega t}.d\omega$$

zpětná Fourierova transformace

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA ŘADA

- ☑ nechť $x(kT_{vz})$ je periodický signál s periodou NT_{vz}; pak $x(kT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \exp\frac{j2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}) . \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp\left(-\frac{2j\pi knT_{vz}}{NT_{vz}}\right), \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$\Downarrow$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp(-jk\omega T_{vz}), \qquad \omega = 2\pi n / NT_{vz}$$

kde ω je pro $N \to \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_{vz}).e^{-jk\Omega nT_{vz}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_{vz}).e^{-jk\frac{2\pi}{NT_{vz}}nT_{vz}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_{vz}).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$x(nT_{vz})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega).e^{jnT_{vz}k\Omega}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega).e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k).e^{j2\pi kn/N}$$

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

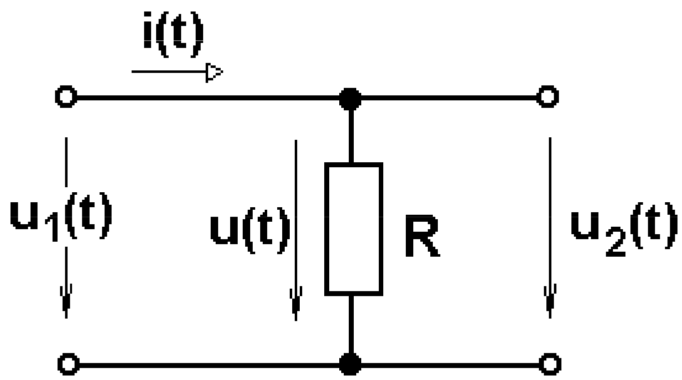
jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu signálu:

- Signál - 1) periodický
  2) neperiodický
  - s konečnou energií;
  - s nekonečnou energií

ENERGIE

- okamžitá práce vykonaná na odporu R:

  $A(t) = u(t).i(t)$



- podle Ohmova zákona:

  $U = R.I,$

  a tedy můžeme po dosazení psát

  $$A(t) = R.i(t) \,.\, i(t) = R.i^2(t) = u(t).\, u(t)/R = u^2(t)/R.$$

  Když je R = 1 Ω je

  $$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

  a celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

  $$A = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt$$

ENERGIE

- z té úvahy energie spojitého signálu s(t)

$$E_s = \int_T s^2(t)dt$$

- energie diskrétního signálu

$$E_d = \sum_n^N s^2(nT)$$

VÝKON

- ☑ výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = E/T$$

$$P_s = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt \qquad P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt$$

$$P_d = \frac{1}{NT}\sum_n^N s^2(nT) \qquad P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

KORELAČNÍ FUNKCE

- vzájemná či křížová korelační funkce (cross-correlation function) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě T je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{T} s_1(t)s_2(t+\tau)dt$$

- popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- je periodická s periodou T

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ výpočet korelační funkce má smysl i v případě, že jsou oba signály totožné – autokorelační funkce

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_T s(t)s(t+\tau)dt$$

AUTOKORELAČNÍ FUNKCE

- vypočtená autokorelační funkce je:
  - sudá;
  - je-li funkce periodická s periodou T, je periodická s toutéž periodou i její autokorelační funkce;
  - R(0) je rovno kvadrátu efektivní hodnoty signálu;
  - $\forall \tau \in \mathbb{R}: R(0) \geq R(\tau)$.
- tyto čtyři vlastnosti mají autokorelační funkce všech periodických signálů.

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ **korelační funkce** $R(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2. Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1.x_2p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- ☑ **kovarianční funkce** (covariance function) $K(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m(t_1)].[x_2-m(t_2)]p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů

$$\Downarrow$$

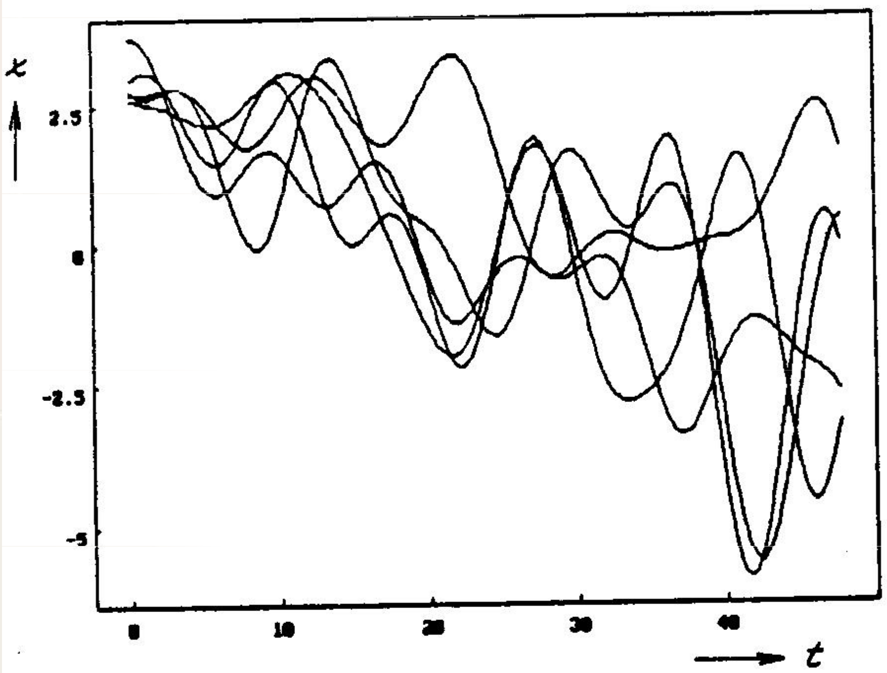
stacionarita

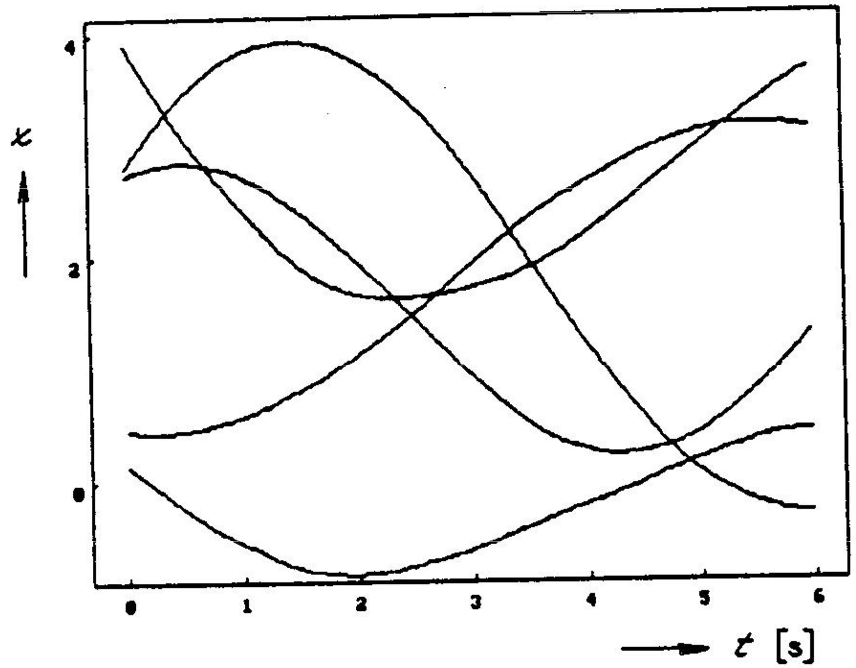
ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (stationary random process) je proces se stálým chováním





STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

  v tom případě, tj. s $\tau = t_2 - t_1$, můžeme funkce $p(x_1,x_2,t_1,t_2)$, $R(t_1,t_2)$ a $K(t_1,t_2)$ nahradit funkcemi $p(x_1,x_2,\tau)$, $R(\tau)$ a $K(\tau)$

stacionarita

- ☑ v užším slova smyslu
- ☑ v širším slova smyslu (stálé momenty 1. a 2. řádu)

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (ergodic random process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace

- ☑ aritmetický průměr

$$\hat{m} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x(t_i)$$

nebo

$$\hat{m} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)dt$$

Odhad bude tím věrohodnější, čím bude úsek T delší.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- disperze

$$\hat{D} = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m]^2 dt$$

- autokorelační funkce

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$$

- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt\right)$$

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

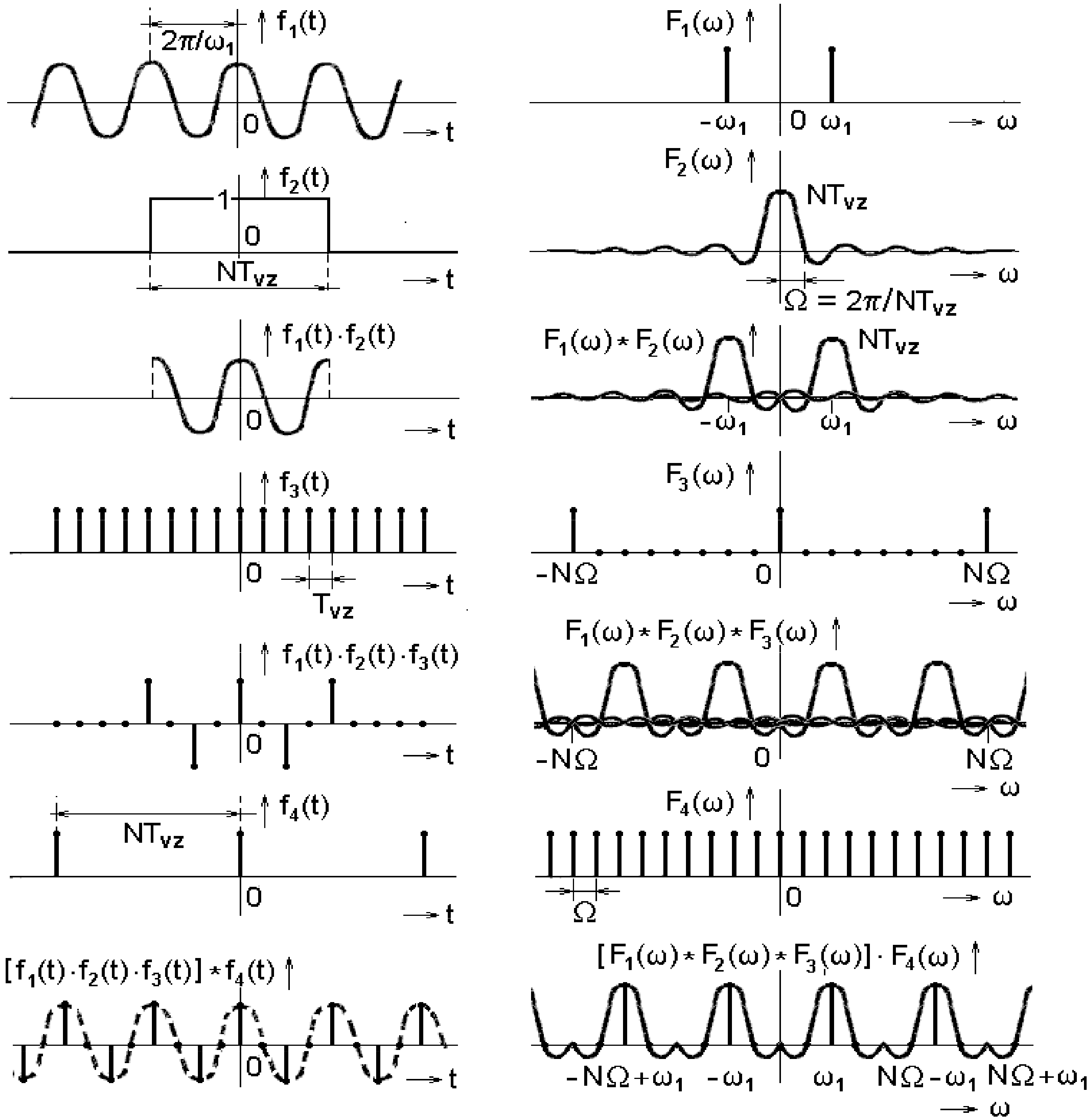
$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt\right)$$

- pro diskrétní případ

$$\hat{R}_{xy}(nT) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(mT)y(mT+nT) = \left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(mT)y(mT-nT)\right)$$

DFT

$$\Omega_1 = 2\Omega = 4\pi/NT_{vz}$$



DFT

$\Omega_1 = 2{,}5\Omega$
$= 5\pi/NT_{VZ}$