SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

MU
IBA

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VI.
PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

PARAMETRICKÉ METODY

- ☑ extrapolují hodnoty autokorelační funkce pro m≥N (k tomu je potřeba apriorní informace o analyzovaném signálu)

  ⇓

  parametrický model vzniku signálu a z toho už cokoliv

tedy: netrápí nás okna, ani prosakování spekter ⇒ lepší rozlišovací schopnost i při krátkých záznamech ⇒ **analýza časově proměnných a přechodných dějů**

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=1}^{q} b_k x((n-k)T_{vz})$$

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ je-li posloupnost x(nT), resp. y(nT) realizací stacionárního náhodného procesu, platí pro jejich spektrální výkonové hustoty $\Gamma_{xx}(f)$, resp. $\Gamma_{yy}(f)$,

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 . \Gamma_{xx}(f),$$

kde |H(f)| je modul frekvenční charakteristiky použité lineární soustavy.

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

Je-li $x(nT_{vz})$ bílý šum s nulovou střední hodnotou, pak jeho autokorelační funkce

$$\gamma_{xx}(mT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \Gamma_{xx}(f) = \sigma_x^2$$

σ_x^2 je rozptyl posloupnosti $x(nT_{vz})$, tj. $\sigma_x^2 = E\left[x^2(nT_{vz})\right]$ a pro spektrální hustotu výkonu výstupní posloupnosti platí

$$\Gamma_{yy}(f) = \sigma_x^2 \cdot \left|H(f)\right|^2 = \sigma_x^2 \cdot \frac{\left|Y(f)\right|^2}{\left|X(f)\right|^2}$$

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

Algoritmy parametrického odhadu výkonového spektra posloupnosti $y(nT_{vz})$, $n \in \langle 0, N-1 \rangle$ obsahují:

1) odhad parametrů modelu přenosové soustavy;
2) výpočet spektrální hustoty výkonu $\Gamma_{yy}(f)$ z odhadnutých parametrů

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ podle charakteru modelu přenosové soustavy dělíme algoritmy na:
  - ARMA(p,q) – autoregresive-moving average řádu (p,q);
  - AR(p), $q=0$, $b_0=1$, $H(z)=1/X(z)$ …
    … autoregresivní
  - MA(q), $X(z) = 1 \Rightarrow H(z) = Y(z)$ …
    moving average

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- nejčastěji používaný AR model – proč?
  - vhodný pro vyjádření spektra s úzkými vrcholy (rezonance)
  - výpočet parametrů vede na jednoduchou soustavu lineárních rovnic
  - Lacoss (1971) – (platí pro všechny AR modely):
    - spektrální vrcholy odhadu spektra harmonckých signálů pomocí AR modelu jsou úměrné čtverci výkonu harmonických signálů;
    - plocha vrcholu výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonického signálu

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max. ∞ řádu;
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max. ∞ řádu;

$$\Downarrow$$

je nám jedno, co použijeme za model, jen by měl mít co nejméně parametrů, které se snadno počítají

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA:

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) \qquad |.y(nT_{vz} - mT_{vz}), E$$

$$E[y(nT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] = -\sum_{k=1}^{p} a_k E[y(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q} b_k E[x(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

$\gamma_{xy}(mT_{vz})$ … vzájemná korelační posloupnost mezi $x(nT_{vz})$ a $y(nT_{vz})$

$$\gamma_{xy}(mT_{vz}) = E[y(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})x(nT_{vz} - kT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz})\right] =$$

předpokládáme kauzální filtr

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz}) E[x(nT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz} + kT_{vz})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})\gamma_{xx}(mT_{vz} + kT_{vz}) =$$

$$= h(-mT_{vz}).\sigma_x^2 = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_x^2.h(-mT_{vz}) & m \le 0 \end{cases}$$

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA (pokračování):

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(kT_{vz}).b_{k+m} & 0 \le m \le q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

nelineární vztah mezi $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ a parametry a_k a b_k

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA (pokračování):

lze rozdělit na lineární vztah pro určení parametrů a_k, m > q

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q) & \gamma_{yy}(q-1) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+1) \\ \gamma_{yy}(q+1) & \gamma_{yy}(q) & \cdots & \gamma_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p-1) & \gamma_{yy}(q+p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(q+1) \\ \gamma_{yy}(q+2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(q+p) \end{bmatrix}$$

a nelineární vztah pro $0 \le m \le q$

jiná interpretace:

hodnoty autokorelační posloupnosti $\gamma_{yy}(mT_{vz})$, m>q jsou jednoznačně určeny koeficienty charakteristického polynomu a_k a hodnotami $\gamma_{yy}(mT_{vz})$, $0 \le m \le p$

z toho plyne, že lineární model automaticky definuje hodnoty autokorelační posloupnosti $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ pro m>q

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

AR:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > 0, (q = 0) \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 & m = 0, (0 \leq m \leq q, q = 0) \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

AR:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(p-1) & \gamma_{yy}(p-2) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_k . \gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(-1) & \cdots & \gamma_{yy}(-p) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(p) & \gamma_{yy}(p-1) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yule-Walkerovy rovnice

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

MA:

$$h(k) = b_k \quad 0 \le k \le q \qquad a_k = 0 \quad 1 \le k \le p$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k . b_{k+m} & 0 \le m \le q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

AR MODELY

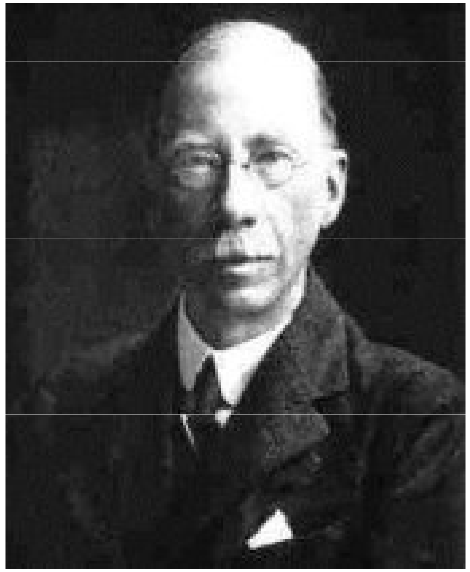
Yule – Walkerova metoda

výpočet odhadu autokorelace ze signálové posloupnosti $y(nT_{vz})$ a pomocí tohoto odhadu odhad parametrů $\tilde{a}_k$ AR modelu

užitečnosti:

1) odhad AKF
2) řešení Yule-Walkerových rovnice;
3) odhad výkonové spektrální hustoty

GEORGE UDNY YULE, FRS



* 18.2.1871, Morham, Skotsko, U.K.

† 26.6. 1951 Cambridge, Anglie, U.K.

britský statistik, pocházel z uznávané skotské rodiny vědců, důstojníků, úředníků a správců. Jeho strýc byl orientalista Sir Henry Yule (1820-1889)

zájmy: teorie a aplikace korelace, regrese především ve spojení s časovými řadami

Frank Yates v jeho nekrologu uvedl: "To summarize we may, I think, justly conclude that though Yule did not fully develop any completely new branches of statistical theory, he took the first steps in many directions which were later to prove fruitful lines for further progress… He can indeed rightly claim to be one of the pioneers of modern statistics".

SIR GILBERT THOMAS WALKER

* 14.6.1868 Rochdale, Lancashire, Anglie

† 4.11.1958 Coulsdon, Surrey, Anglie

přední britský matematik, fyzik a meteorolog

Walker Institute for Climate System Research

znám především popisem tzv. jižních oscilací, klimatického jevu způsobeného mořským proudem El Niño

He was a very normal human being, with none of the proverbial eccentricities of mathematicians among whom he ranked high. This normality itself is perhaps a great and likable distinction (Sohoni, 1959)

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

ad 1)

$$\hat{r}_{xx}(mT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|} x(nT_{vz}).x(nT_{vz} - mT_{vz})$$

$\Rightarrow$ autokorelační matice je pozitivně semidefinitní

$\Rightarrow$ výsledný AR model bude stabilní

$\Rightarrow$ předpokládá se, že stabilní AR model reprezentuje data nejlépe (!?)

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

ad 3)

$$\hat{P}_{xx}^{YW}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{xp}^2 T_{vz}}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k).e^{-j2\pi f k T_{vz}}\right|^2}$$

$$\hat{\sigma}_{xp}^2 = r_{xx}(0).\prod_{k=1}^{p}\left[1 - \left|\hat{a}_k(k)\right|^2\right] = \hat{E}_p^f$$

je odhad minimální střední kvadratické odchylky prediktoru p-tého řádu

AR MODELY

Yule – Walkerova metoda

ad 2) řešení Yule-Walkerových rovnic

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

NORMAN LEVINSON

* 11.8.1912 Lynn, MA, USA -

† 10.10.1975 Boston, MA, USA

americký elektrotechnik a matematik

zájmy: Fourierova transformace, komplexní analýza, nelineární diferenciální rovnice, teorie čísel, zpracování signálů, Levinsonův algoritmus (1947)

studia: M.I.T., Master degree in E.E. (1934), PhD stipendium – Cambridge, PhD degree M.I.T. - matematika

zaměstnán: M.I.T.

učitel a spolupracovník: N. Wiener

JAMES DURBIN

* 30.6.1923, Widnes, Anglie, U.K. - † 23.6.2012 Londýn, U.K.

- britský statistik, ekonometrik

studium: St John's College Cambridge

(spolužák David Cox), učitel Sir Maurice Kendall (Kendalův korelační koeficient

$$KTRCC = \frac{C - D}{C + D}$$

C je počet shodných párů a D je počet neshodných párů)

zaměstnání: London School of Economics (1950-1988)
zájmy: analýza časových řad, korelace časových řad, vylepšil Levinsonův algoritmus (1960)

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

efektivní rekurzivní algoritmus výpočtu koeficientů a_k, k=1,…,p z Y.-W.rovnic využívající skutečnosti, že autokorelační matice má vlastnosti Toeplicovy matice (T(i,j)=t(i-j))

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

pracnost L.-D. algoritmu je $\mathcal{O}(p^2)$

pracnost Gaussovy eliminační metody je $\mathcal{O}(p^3)$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

dopředná lineární predikce

normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = 0 \quad l=1,2,\dots,p;\ a_p(0)=1$$

výsledná minimální MSE

$$E_p^f = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

rozšířené normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = \begin{cases} E_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\dots,p \end{cases}$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

- ☑ výpočet je rekurzivní, vychází z řešení systému 1. řádu a výsledky pro systém i-tého řádu se odvozují z řešení (i-1). řádu

systém 1. řádu

p=1

$$a_1(0).\gamma_{yy}(1)+a_1(1).\gamma_{yy}(0)=0 \Rightarrow\Big|_{a_1(0)=1} a_1(1)=-\frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)}$$

$$E_1^f=\gamma_{yy}(0)+a_1(1).\gamma_{yy}(-1)=\gamma_{yy}(0)-\frac{\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0)}.\gamma_{yy}(-1)=$$

$$=\gamma_{yy}(0)-\frac{|\gamma_{yy}(1)|^2}{\gamma_{yy}^2(0)}.\gamma_{yy}(0)=\gamma_{yy}(0).\left[1-|a_1(1)|^2\right]$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

systém 2. řádu

p=2

$$a_2(0).\gamma_{yy}(1)+a_2(1).\gamma_{yy}(0)+a_2(2).\gamma_{yy}(-1)=0$$

$$a_2(0).\gamma_{yy}(2)+a_2(1).\gamma_{yy}(1)+a_2(2).\gamma_{yy}(0) \quad =0$$

$$a_2(0)=1$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(0)+a_2(2).\gamma_{yy}(-1)=-\gamma_{yy}(1)$$

$$\gamma_{yy}(1)=-a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(1)+a_2(2).\gamma_{yy}(0) \quad =-\gamma_{yy}(2)$$

$$a_2(1).\gamma_{yy}(0)-a_2(2).a_1(1).\gamma_{yy}(0)=a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$\boxed{a_2(1)=a_1(1)+a_1(1).a_2(2)}$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

systém 2. řádu (pokračování)

p=2

$$\gamma_{yy}(1) = -a_1(1).\gamma_{yy}(0)$$

$$a_1(1).\gamma_{yy}(1) + a_1(1).a_2(2).\gamma_{yy}(1) + a_2(2).\gamma_{yy}(0) = -\gamma_{yy}(2)$$

$$a_2(2).\left[\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1).\gamma_{yy}(0)\right] = -\gamma_{yy}(2) - a_1(1).\gamma_{yy}(1)$$

$$\boxed{a_2(2) = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1).\gamma_{yy}(1)}{\gamma_{yy}(0) - a_1^2(1).\gamma_{yy}(0)} = -\frac{\gamma_{yy}(2) + a_1(1).\gamma_{yy}(1)}{E_1^f}}$$

$$E_1^f = \sigma_{k-1}^2$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

obecně:

$$a_k(k) = \frac{-\gamma_{yy}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} a_{k-1}(r).\gamma_{yy}(k-r)}{E_{k-1}^f}$$

$$a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_{k-1}(k-i).a_k(k)$$

$$E_k^f = \sigma_k^2 = [1 - a_k^2(k)].\sigma_{k-1}^2$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ☑ L.-D. algoritmus poskytuje odhad parametrů AR systému nejen pro požadovaný řád, nýbrž i pro všechny nižší řády;
- ☑ jak se správný řád pozná:

  $\sigma_k^2 = E_k^f$ se v další iteraci přestane zmenšovat, resp. $a_{p+1}(k)=a_p(k)$ pro $k=1,2,..,p$ a tím $a_{p+1}(p+1)=0$

  obecně pro proces AR(p) $a_k(k)=0$ a $\sigma_k^2 = \sigma_p^2$ pro $k>p$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- ☑ parametry $\{a_1(1), a_2(2), \dots, a_p(p)\}$ se často nazývají koeficienty reflexe K_k (název souvisí s realizací predikčních algoritmů mřížkovou strukturou);

pokud $\{\gamma_{yy}(0), \gamma_{yy}(1), \dots, \gamma_{yy}(p)\}$ je skutečná autokorelační posloupnost, tj. AK matice je pozitivně semidefinitní, pak

$$|a_k(k)| = |K(k)| \leq 1 \text{ pro } k=1, 2, \dots, p;$$

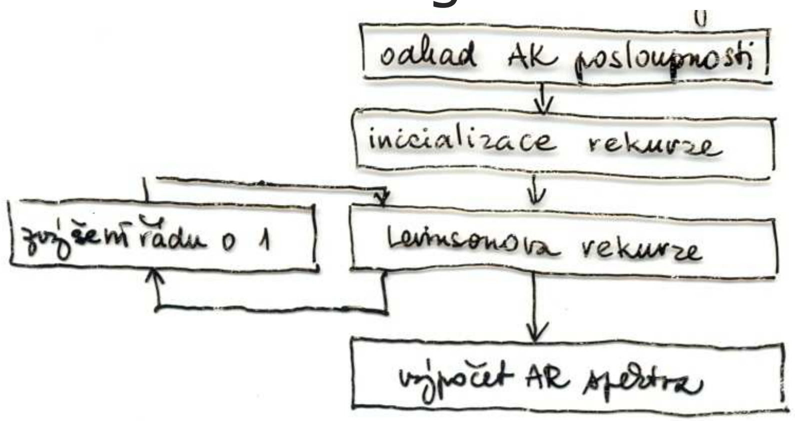
důsledky:

- ➔ $\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k^2$, to znamená, že σ_k^2 dosáhne minima právě při správném řádu;
- ➔ nutnou a postačující podmínkou, aby póly X(z) ležely uvnitř nebo na jednotkové kružnici v rovině z je $|K(k)| \leq 1$ pro $k=1, 2, \dots, p \Rightarrow$ AR systém je stabilní;
- ➔ je-li $|K(k)| = 1$ pro některé k, pak je třeba rekurzi ukončit, protože $\sigma_k^2=0$ … v tom případě je proces ryze harmonický

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

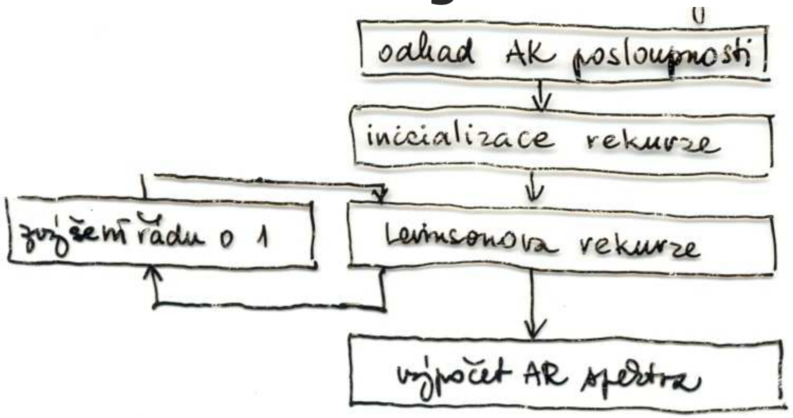
- pokud by byl L.-D. algoritmus implementován pomocí paralelního procesoru s optimálním počtem jednotek, je pracnost algoritmu $\mathcal{O}(p.\log_2 p)$;
- při odhadu výkonového spektra harmonických signálů pomocí AR modelu jsou spektrální vrcholy AR spektra úměrné čtverci výkonu harmonických signálů;
- plocha pod spektrálními vrcholy výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonického signálu;
- blokové schéma L.-D. algoritmu



LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

poznámky + užitečnosti + zajímavosti

- pokud by byl L.-D. algoritmus implementován pomocí paralelního procesoru s optimálním počtem jednotek, je pracnost algoritmu $\mathcal{O}(p.\log_2 p)$;
- při odhadu výkonového spektra harmonických signálů pomocí AR modelu jsou spektrální vrcholy AR spektra úměrné čtverci výkonu harmonických signálů;
- plocha pod spektrálními vrcholy výkonové spektrální hustoty je lineárně úměrná výkonu harmonického signálu;
- blokové schéma L.-D. algoritmu



A JE TO!