SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VI.
SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA POMOCÍ METODY VLASTNÍCH ČÍSEL

ZAČÍNÁME

AR(p) proces znehodnocený aditivním bílým šumem ≡ ARMA(p,p) proces;

teď bude … periodický signál + bílý šum

$$x(nT_{vz}) = 2.\cos(2\pi f_k T_{vz}).x(nT_{vz}-T_{vz}) - x(nT_{vz}-2T_{vz})$$

tento systém generuje signál

$$x(nT_{vz}) = 2.\cos(2\pi f_k nT_{vz}) \text{ pro } n \geq 0$$

pokud jsou počáteční podmínky x(-1)=-1 a x(-2)=0

ZAČÍNÁME

obecně, signál skládající se z p harmonických složek splňuje diferenční rovnici

$$x(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(nT_{vz} - mT_{vz}), \qquad (☯)$$

což odpovídá systému s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \qquad (☠)$$

(Polynom $A(z)=1+\sum a_m z^{-m}$ má 2p kořenů na jednotkovém kruhu v místech, která odpovídají frekvencím harmonického signálu.)

PRINCIP

- přepokládejme periodický signál + bílý šum w(nT) $\{E(|w(nT_{vz})^2|)=\sigma_w^2\}$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + w(nT_{vz})$$

po dosazení za x(nT) z tohoto vztahu do (☯) máme

$$y(nT_{vz}) - w(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m \left[y(nT_{vz} - mT_{vz}) - w(nT_{vz} - mT_{vz}) \right]$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(nT_{vz} - mT_{vz}) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad a_0 \equiv 1$$

což představuje ARMA proces s identickými AR i MA parametry

$$\mathbf{y}^T.\mathbf{a} = \mathbf{w}^T.\mathbf{a} \qquad (🐈)$$

$\mathbf{y}^T = [y(nT_{vz}), y(nT_{vz}-T_{vz}),\ldots,y(nT_{vz}-2pT_{vz})]$,

$\mathbf{w}^T = [w(nT_{vz}),w(nT_{vz}-T_{vz}),\ldots,w(nT_{vz}-2pT_{vz})]$,

$\mathbf{a}^T = [1, a_1,\ldots, a_{2p-1},a_{2p}]$,

PRINCIP

- ☑ vynásobením obou stran (🐈) vektorem **y** a určením střední hodnoty

$$E(\mathbf{y}.\mathbf{y}^T).\mathbf{a} = E(\mathbf{y}.\mathbf{w}^T).\mathbf{a} = E((\mathbf{x}+\mathbf{w}).\mathbf{w}^T).\mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{yy}.\mathbf{a} = 0 + \sigma_w^2.\mathbf{a}$$

$$(\boldsymbol{\Gamma}_{yy} - \sigma_w^2.\mathbf{I}).\mathbf{a} = 0$$ ... vlastní (charakteristická) rovnice

σ_w^2 je vlastní číslo autokorelační matice $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$;

a je vlastní vektor $\boldsymbol{\Gamma}_{yy}$ spojený s vlastním číslem σ_w^2;

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

Mějme p náhodně fázově posunutých harmonických signálů s aditivním bílým šumem.

Hodnoty autokorelační funkce jsou

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{p} P_i$$

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{i=1}^{p} P_i . \cos 2\pi f_i k T_{vz}, \quad k \neq 0; \quad P_i = A_i^2 / 2 \text{ je}$$

průměrný výkon i-té sinusovky, A_i je její amplituda

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

- maticově

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 T_{vz} & \cos 2\pi f_2 T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p T_{vz} \\ \cos 2\pi f_1 2T_{vz} & \cos 2\pi f_2 2T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p 2T_{vz} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 pT_{vz} & \cos 2\pi f_2 pT_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p pT_{vz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

- známe-li frekvence f_i, $1 \le i \le p$, můžeme spočítat výkon jednotlivých harmonických složek, místo hodnot $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ použijeme odhady $r_{yy}(mT_{vz})$, známe-li výkony, určíme rozptyl šumu

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{p} P_i$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

podle Pisarenka platí pro ARMA proces obsahující p harmonických složek v aditivním bílém šumu, že rozptyl σ_w^2 odpovídá minimálnímu vlastnímu číslu autokorelační matice, pokud je rozměr autokorelační matice větší nebo roven (2p+1) x (2p+1).

Potom požadovaný vektor koeficientů ARMA modelu je dán vlastním vektorem náležejícím minimálnímu vlastnímu číslu.

Frekvence f_i, i=1,…,p se určí řešením rovnice, dané položením jmenovatele ve vztahu (☠) rovno nule, kde koeficienty a_m jsou určeny vlastním vektorem spojeným s minimálním vlastním číslem.

VLADIMIR FEDOROVICH PISARENKO

?

Ph.D.

Moskevská státní univerzita 1963

disertační práce:

Matematická klasifikace objektů

obor: Teorie pravděpodobnosti a stochastické procesy

školitel: Roland Lvovich Dobrushin

Pisarenko, V. F. *The retrieval of harmonics from a covariance function* Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973.

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

Předpokládejme hodnoty AKF $\gamma_{yy}(0)=3$, $\gamma_{yy}(1)=1$ a $\gamma_{yy}(2)=0$. Proces obsahuje jeden harmonický signál v bílém šumu. Určete jeho frekvenci, výkon a rozptyl, tj. výkon šumu.

Řešení:

autokorelační matice je

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

její minimální vlastní číslo je rovno nejmenšímu kořenu charakteristického polynomu

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \lambda_{min} = 3-\sqrt{2}$$

odpovídající charakteristický vektor má složky $a_0=1$, a_1, a_2, pro které platí

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

řešením získáme $a_1 = -\sqrt{2}$ a $a_2 = 1$

$$z^2 - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z_1| = |z_2| = 1,$$

tj. leží na jednotkové kružnici

$$z_1 = e^{j2\pi f_1 T_{vz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f_1.T_{vz} = 1/8$$

výkon $P_1.\cos(2\pi f_1 T_{vz}) = \gamma_{yy}(1)=1 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2}$,

proto

$$A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2.\sqrt{2}}$$

kontrola: $\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1 = 3-\sqrt{2}$, což souhlasí s λ_{min}.

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

- zbývá určit frekvence f_i, $1 \leq i \leq p$, - to vyžaduje znalost vlastního vektoru **a** pro vlastní číslo σ_w^2;
- protože jsme si již uvedli, že:

pro ARMA proces skládající se z p sinusovek v aditivním bílém šumu je rozptyl σ_w^2 roven nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{\Gamma}_{yy}$ za předpokladu, že rozměr $\mathbf{\Gamma}_{yy} \geq (2p+1)\times(2p+1)$

požadovaný vektor koeficientů ARMA systému je dán hodnotami vlastního vektoru odpovídajícímu nejmenšímu vlastnímu číslu – frekvence f_i, $1 \leq i \leq p$, pak odpovídají kořenům polynomu, jehož koeficienty

PRONYHO METODY

Gaspard Clair François Marie Riche, Baron de Prony

(22.7.1755 – 29.7.1839)

zákony (rozumějme funkce) popisující expanzi plynů lze vyjádřit součtem exponenciál

⇓

navrhnul metodu na interpolaci naměřených hodnot na základě exponenciálního modelu interpolační funkce

Essai éxperimental et analytique: sur les lois dilatabilité de fludes élastique et sur celles de la force expansive de la vapuer de l'alkool, à différentes températures. Journal de l'École Polytechnique, Floréal et Plairial, an III (1795), vol 1, cahier 22, 24-76

PRONYHO METODY

předpokládejme, že vzorky signálu neobsahují šum a skládají se z p exponenciálních signálů

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^{p} A_k . e^{s_k n T_{vz}}, \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

problém je určit A_k a s_k z daných N vzorků.

Potřebujeme nejméně 2p hodnot $x(nT_{vz})$ – problém je bohužel nelineární.

To co Prony vymyslel je, že výpočet A_k a s_k může být vzájemně oddělen a realizován řešením dvou soustav lineárních rovnic + řešení polynomiální rovnice.

PRONYHO METODY

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^{p} A_k.e^{s_k n T_{vz}}, \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

A_k i s_k jsou obecně komplexní a je-li $x(nT_{vz})$ reálné, pak

$$A_k.e^{s_k n T_{vz}} = \frac{1}{2}|A_k|e^{j\Phi_k}.e^{(\sigma_k + j\omega_k)nT_{vz}} + \frac{1}{2}|A_k|e^{-j\Phi_k}.e^{-(\sigma_k + j\omega_k)nT_{vz}} =$$

$$= A_k.e^{\sigma_k n T_{vz}}.\cos(\omega_k n T_{vz} + \Phi_k), \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

protože součet komplexních exponenciál je homogenním řešením lineární diferenční rovnice, tak musí taková diferenční rovnice existovat

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^{p} b_k x(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

PRONYHO METODY

pro koeficienty diferenční rovnice je

$$\sum_{k=1}^{p+1} b_k . z^{k-1} = \prod_{k=1}^{p} (z - e^{s_k})$$

a to všechno vede k definici tří kroků Pronyho metody:

1. konstrukce a řešení lineární soustavy rovnic pro koeficienty b_k;

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \vdots \\ x_{2N-1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_{N-1} & \cdots & x_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2N-2} & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

PRONYHO METODY

2. po určení koeficientů b_k stanovení kořenů rovnice

$$z^p + \sum_{k=1}^{p} b_k z^{k-1} = 0$$

k-tý kořen je roven e^{s_k}

3. z definiční rovnice $x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^{p} A_k . e^{s_k n T_{vz}}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$

pak můžeme definovat lineární soustavu p rovnic, ze které vypočítáme amplitudy A_k;

A TO JE ZÁKLADNÍ MYŠLÉNKA BARONA PRONYHO

PRONYHO METODY

z-transformace dané posloupnosti $x(nT_{vz})$ je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{p} A_k . e^{s_k n T_{vz}} . z^{-n}$$

výměnou součtů a sečtením geometrické řady je

$$X(z) = \sum_{k=1}^{p} A_k . \frac{1 - e^{s_k N T_{vz}} . z^{-N}}{1 - e^{s_k T_{vz}} . z^{-1}} = \dots$$

$$\dots = \frac{\sum_{k=1}^{p} \left[A_k (1 - e^{s_k N T_{vz}} . z^{-N}) \prod_{j=1, j \neq k}^{p} (1 - e^{s_j T_{vz}} . z^{-1}) \right]}{\prod_{k=1}^{p} (1 - e^{s_k T_{vz}} . z^{-1})} \qquad (\therefore 1)$$

PRONYHO METODY

X(z) lze tedy vyjádřit pomocí poměru dvou polynomů

$$X(z) = \frac{C(z)}{B(z)} \qquad (\therefore 2)$$

srovnáním obou ($\therefore$) vztahů lze říci, že B(z) je polynom p-tého řádu s kořeny $\exp(s_1 T_{vz})$, $\exp(s_2 T_{vz})$, …, $\exp(s_p T_{vz})$;

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} b_k . z^{-k} = \prod_{k=1}^{p} (1 - e^{s_k T_{vz}} . z^{-1})$$

po zjednodušení čitatele C(z) je polynom (N+p-1)-ho řádu definovaného

$$C(z) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k . z^{-k} + \sum_{k=0}^{p-1} c_{N+k} . z^{-(N+k)}$$

PRONYHO METODY

zatímco některé koefcienty polynomu C(z) (c_0, ..., c_{p-1} a c_N, ..., c_{N+p-1}) závisí na neznámých amplitudách a pólech (nebo frekvencích), jiné koeficienty c_p, ..., $c_{N-1} \equiv 0$;

protože X(z).B(z) = C(z), je v časové oblasti

$$x(nT_{vz}) \otimes b_n = c_n,$$

což znamená

$$x(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^{p} x(nT_{vz} - kT_{vz}).b_k = c_n, \quad n = 0,1,\ldots,N+p-1$$

PRONYHO METODY

protože dále jsou $c_p, \ldots, c_{N-1}$ nulové, středních N-p rovnic pro nulové pravé strany lze vyjádřit

$$\begin{bmatrix} x(pT_{vz}) & x(pT_{vz}-T_{vz}) & \ldots & x(0) \\ x(pT_{vz}+T_{vz}) & x(pT_{vz}) & \ldots & x(T_{vz}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(NT_{vz}-T_{vz}) & x(NT_{vz}-2T_{vz}) & \ldots & x(NT_{vz}+pT_{vz}-T_{vz}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_f.\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

kde i,j-tý prvek matice $\mathbf{X}_f$ je $x_{f\,i,j} = x(pT_{vz}+iT_{vz}-jT_{vz})$, $i=1,2,\ldots, N-p$; $j = 1,2,\ldots, p+1$ a $\mathbf{b}=[1,b_1,b_2,\ldots, b_p]^T$

Je-li N=2p, pak máme právě dost rovnic k tomu určit $b_1,b_2,\ldots, b_p$.

PRONYHO METODY

Jakmile určíme b_k, známe polynom

$$B(z)=1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_pz^{-p}$$

a řešením rovnice $B(z)=0$ dostaneme kořeny $\exp(s_1T_{vz}), \exp(s_2T_{vz}), \ldots, \exp(s_pT_{vz})$;.

Koeficienty A_k jsou pak určeny řešením následujících p lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{p} A_k.e^{s_k n T_{vz}} = x(nT_{vz}), \quad n=0,1,\ldots,p-1$$

PRONYHO METODY

SUMARIZACE ALGORITMU

1. vypočítat koeficienty b_k z (🍽);
2. spočítat kořeny polynomu B(z) a tak určit $e^{s_1 T_{vz}}, e^{s_2 T_{vz}}, \ldots, e^{s_p T_{vz}}$;
3. určit amplitudy $A_1, \ldots, A_p$ z rovnice (🍸);

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

předpokládáme signál + aditivní šum

Nechť diskrétní funkce

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^{p} b_k z_k^n, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

je modelem signálu, reprezentovaného naměřenými hodnotami $x_0,\ldots, x_{N-1}$.

Hodnoty b_k, z_k jsou obecně komplexní

$$b_k = A_k . e^{j\Phi_k}$$

$$z_k = e^{(\sigma_k + j2\pi f_k)T_{vz}}$$

A_k je amplituda, Φ_k počáteční fáze, σ_k koeficient tlumení a f_k frekvence oscilací, T_{vz} je vzorkovací perioda

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

cílem je nalézt $\{A_k, \Phi_k, \sigma_k, f_k\}$ a p takové, že je minimalizována chyba

$$e = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_n - \hat{x}_n \right|^2$$

je to těžce nelineární problém nejmenších čtverců, který lze řešit iteračně postupným zlepšováním počátečního odhadu.

pokusme se aplikovat Pronyho postup, poskytující suboptimální řešení, které sice nezaručuje nalezení globálního minima, ale poskytuje dostatečně přijatelné řešení

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

tedy ještě jednou a trochu jinak:

vztah (🏋) představuje homogenní řešení lineární diferenční rovnice s konstantními parametry. Jakými? To určíme!

definujme polynom

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_n) = \sum_{i=0}^{p} a_i . z^{p-i}, \quad a_0 = 1$$

z (🏋) jeden způsob jak vyjádřit odhad $\widehat{x}_{n-m}$ je

$$\widehat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s . z_s^{n-m}, \quad \text{pro } 0 \le n-m \le N-1$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

vynásobením a_m a sečtením přes posledních p+1 součinů

$$\sum_{m=0}^{p} a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s . \sum_{m=0}^{p} a_m z_s^{n-m}, \quad p \le n \le N-1$$

po substituci $z_s^{n-m} = z_s^{n-p} . z_s^{p-m}$ je

$$\sum_{m=0}^{p} a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s z_s^{n-p} . \sum_{m=0}^{p} a_m z_s^{p-m} = 0$$

Ta nula plyne z toho, že poslední suma je právě hodnota polynomu $\Psi(z_s)$, tj. pro jeden jeho kořen.

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}_n = -\sum_{m=1}^{p} a_m . \hat{x}_{n-m}$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$x_n = \hat{x}_n + e_n \qquad n = 0,1,\dots,N-1$$

po dosazení za $\hat{x}_n$ je

$$x_n = -\sum_{m=1}^{p} a_m . \hat{x}_{n-m} + e_n =$$

$$= -\sum_{m=1}^{p} a_m . x_{n-m} + \sum_{m=0}^{p} a_m . e_{n-m}, \qquad p \le n \le N-1$$

když $\hat{x}_{n-m} = x_{n-m} - e_{n-m}$

a co takhle Pisarenko?!

to nám poskytuje alternativní model (součet exponenciál + aditivní šum) pomocí ARMA systému AR a MA parametry

na rozdíl od Pisarenka nejsou koeficienty a_i omezeny tak, aby kořeny měly jen jednotkový modul (automaticky jen harmonické složky)

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

minimalizace $\sum_{n=p}^{N-1} \left| e_n \right|^2$ vede k soustavě nelineárních rovnic, proto alternativa (rozšířená Pronyho metoda):

když

$$\varepsilon_n = \sum_{m=0}^{p} a_m e_{n-m}, \quad p \le n \le N-1$$

pak

$$x_n = -\sum_{m=0}^{p} a_m x_{n-m} + \varepsilon_n$$

to pak vede k minimalizaci $\varepsilon_n \Rightarrow$ pouze AR model $\Rightarrow$ linearita (ε_n je určena MA procesem řízeným chybou aproximace e_n)

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

ε_n je rozdíl mezi x_n a jeho lineární predikcí p-tého řádu, zatímco

e_n je rozdíl mezi x_n a jeho exponenciální aproximací

řád p je určen nějakým způsobem pro určení řádu AR procesu (modelu)

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

určíme koeficienty a_m AR procesu $\Rightarrow$ najdeme kořeny AR polynomu a problém se redukuje na řešení soustavy lineárních rovnic s neznámými koeficienty b_m

$$.\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$$

kde

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \end{bmatrix}$$

minimalizace nejmenšími □□ vede na řešení

$$\mathbf{b} = \left({}^{H} . \right)^{-1} . {}^{H} . \hat{\mathbf{x}} \qquad (❄)$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

při řešení pomůže, když víme, že

$$\Theta_H . \Theta = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } \gamma_{ij} = \frac{\left(z_i^* . z_j\right)^N - 1}{z_i^* . z_j - 1}$$

parametry A_i, Φ_i, α_i a f_i pak určíme

$A_i = |b_i|$

$\Phi_i = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im} b_i / \mathrm{Re} b_i)$

$\alpha_i = \ln|z_i| / T_{vz}$

$f_i = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im} z_i / \mathrm{Re} z_i) / 2\pi T_{vz}$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Pronyho metoda užitečná při analýze přechodných dějů

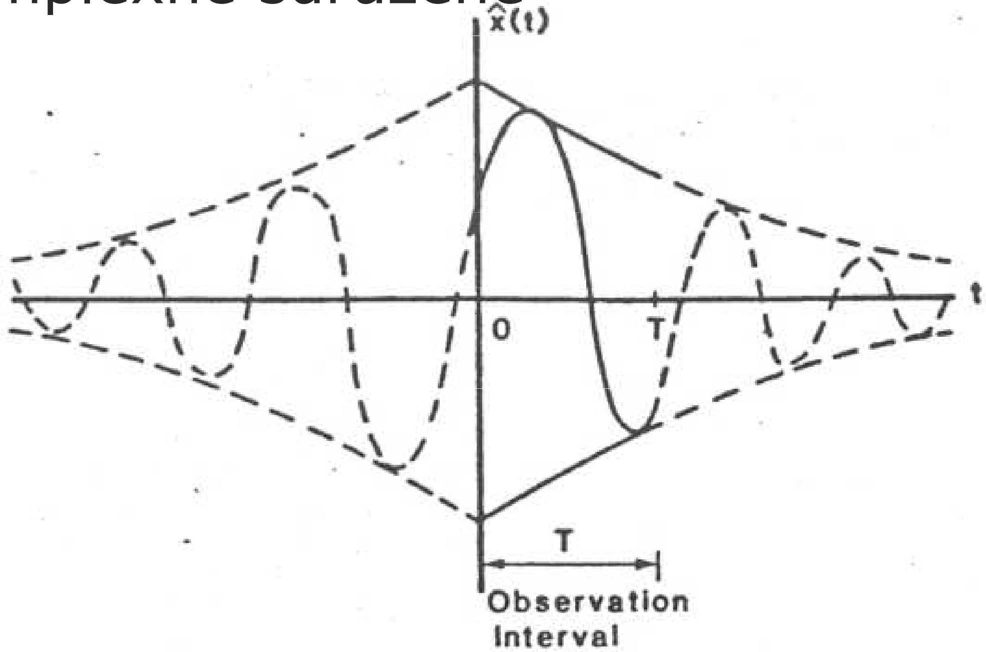
omezíme-li se na tlumené reálné sinusovky, pak

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} A_k e^{\alpha_k |t|} . e^{j(2\pi f_k t + \Phi_k)} \qquad (☎)$$

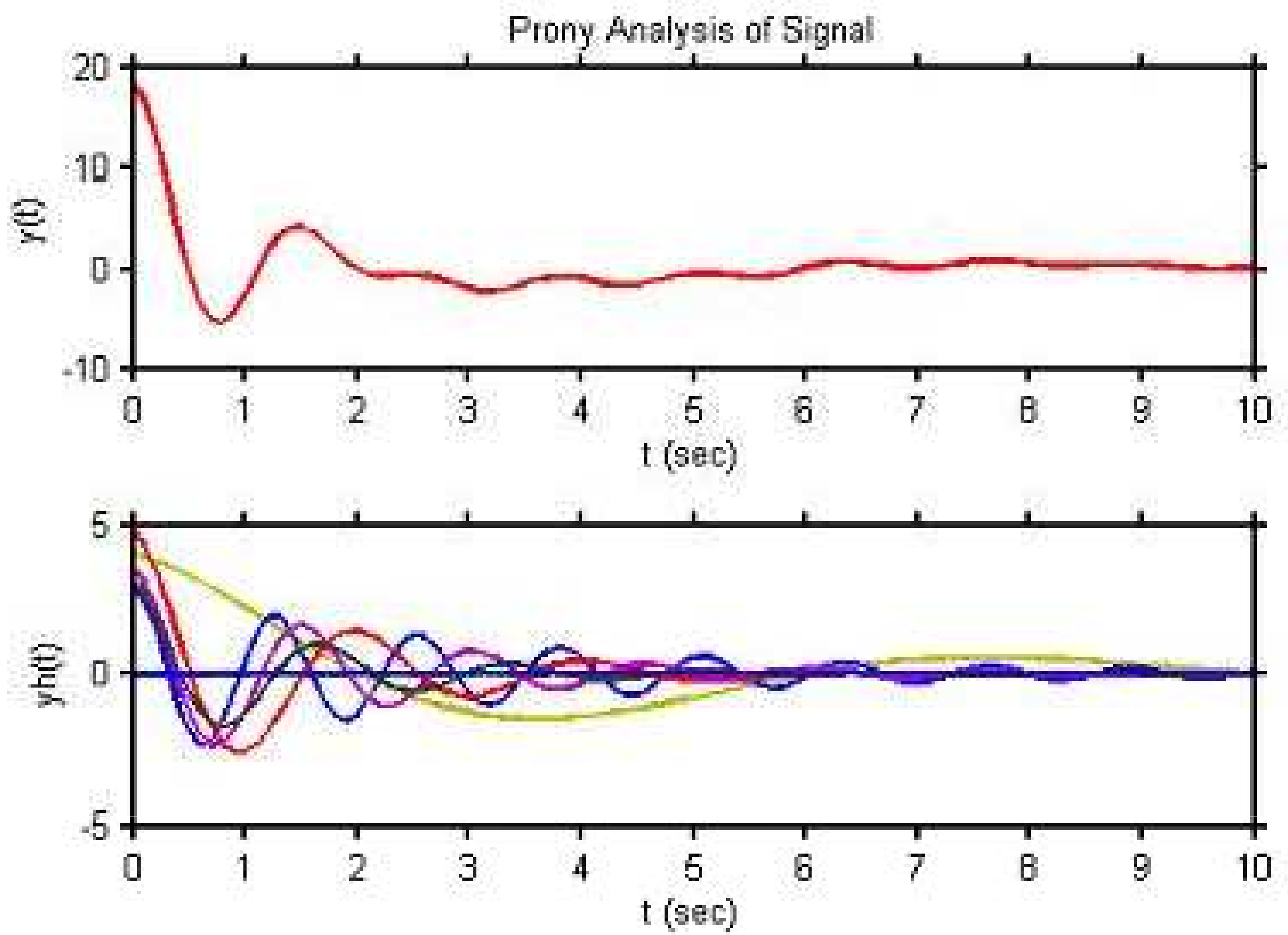
pro reálné x(t) požadujeme komplexně sdružené

$e^{j(2\pi f_k t + \Phi_k)}$ a $e^{-j(2\pi f_k t + \Phi_k)}$;

dále předpokládáme, že koeficienty tlumení jsou záporné, tj. exponenciály jsou tlumené (je-li α=0, jsou sinusovky tak jak mají být)



PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ



PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

protože vztah (☎) má v tom případě konečnou energii, jeho spektrální hustota je rovna FT tohoto vztahu

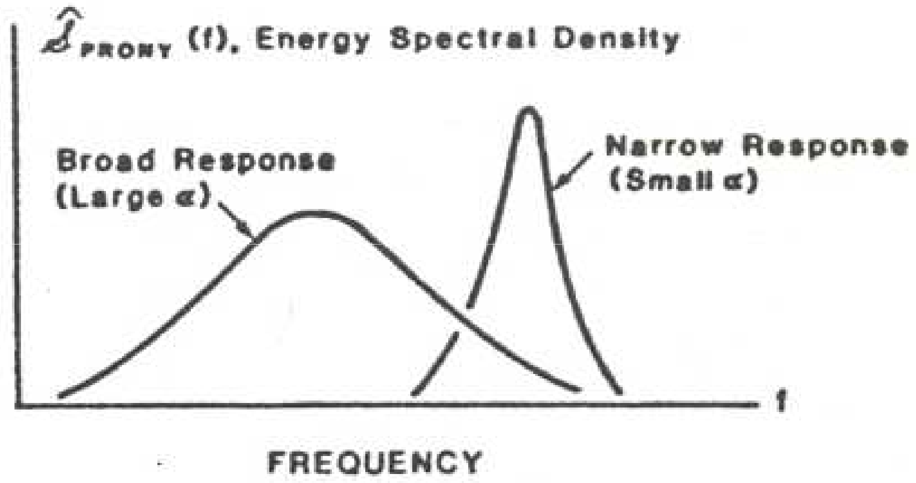
$$\hat{S}_{prony}(f) = \left|\hat{X}(f)\right|^2$$

kde

$$X(f) = \sum_{k=1}^{p} A_k \exp(j\Theta_k) \frac{2\alpha_k}{\left\{\alpha_k^2 + \left[2\pi(f - f_k)\right]^2\right\}}$$

spektrum je lineárně úměrné energii, nikoliv jako u AR modelů, kde je úměrné (nelineárně) výkonu

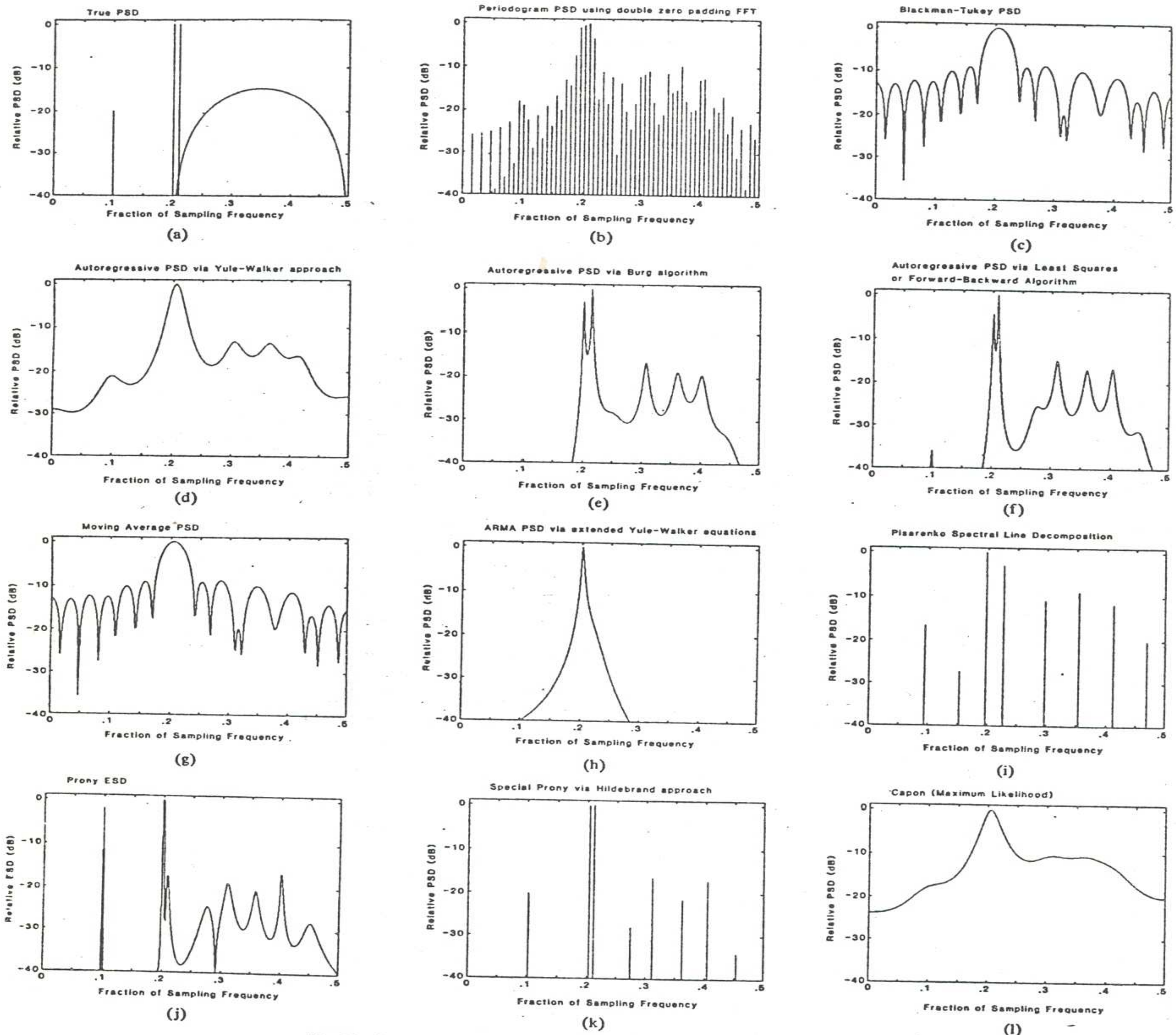
lze produkovat spektra s úzkými či širokými laloky – závisí na koeficientech tlumení (šířka pásma pro -3dB je α/π [Hz])



PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

PROBLÉMY

- počet exponenciál ~ řád AR systému – protože je třeba určit 2p parametrů, max. řád by měl být $p_{max} \leq N/2$, zatímco u AR modelů je možné $p > N/2$;
- přítomnost šumu ovlivňuje přesnost Pronyho odhadů;
- šum může způsobit, že koeficienty tlumení jsou moc velké;


True PSD
(a)
Periodogram PSD using double zero padding FFT
(b)
Blackman-Tukey PSD
(c)
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
(d)
Autoregressive PSD via Burg algorithm
(e)
Autoregressive PSD via Least Squares or Forward-Backward Algorithm
(f)
Moving Average PSD
(g)
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
(h)
Pisarenko Spectral Line Decomposition
(i)
Prony ESD
(j)
Special Prony via Hildebrand approach
(k)
Capon (Maximum Likelihood)
(l)
Relative PSD (dB)
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency

PRONYHO METODA PRO VÝPOČET SPEKTRÁLNÍCH ČAR

VÝHODY OPROTI PISARENKOVI

- ☑ nejsou třeba odhady autokorelačních funkcí;
- ☑ vyskytuje se méně falešných spektrálních čar díky možnému lepšímu odhadu řádu (?);
- ☑ odhady frekvencí a výkonů mají menší chyby;
- ☑ jednodušší výpočet (dvě lineární soustavy + nalezení kořenů polynomu x výpočet komplexních vlastních čísel)

A JE TO!