



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

II. PRINCIPY TOHO, JAK NA TO



ZÁVĚRY Z MINULA

časová řada = deterministická složka +
+ nedeterministická (náhodná) složka
(koncept Hermana Wolda (1938) - A Study in the Analysis of
Stationary Time Series)



není konečná energie



neexistuje Fourierův integrál



výkonový koncept
spektrální hustota výkonu –
power spectral density (PSD)

HERMAN OLE ANDREAS WOLD



* 25.12.1908 – Skien, Norsko
† 16.2. 1992 – Gothenburg,
Švédsko

oblasti zájmů: matematická
ekonomie, ekonometrie,
statistika, analýza časových řad

školitel: Harald Cramér

na čem se podepsal: Cramérův-Woldův
teorém, Woldova dekompozice časových řad,
metoda parciálních nejmenších čtverců;
teorie užitku, teorie spotřebitelské poptávky

SPOJITÝ SIGNÁL

☑ Fourierova transformace

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \exp(-2\pi jft) dt$$

Parsevalova věta

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(f)|^2 df$$

spektrální hustota energie $S_{xx}(f)$

SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA ENERGIE (VÝKONU) SPOJITÝ PŘÍPAD

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt; \quad R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt$$

autokorelační funkce signálu $x_a(t)$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \exp(-2\pi j f \tau) \cdot d\tau$$

obě funkce tvoří
Fourierovský pár

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) \cdot \exp(2\pi j f \tau) \cdot df$$

u stacionární funkce ztrácíme informaci o fázi

A PROČPAK ???

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

$x(nT_{vz})$, definovaný na nekonečném intervalu
 $n \in \langle -\infty; \infty \rangle$; je frekvenčně omezený na pásmo o
šířce $\pm B \Rightarrow$ vzorkovací frekvence $F = 1/T_{vz} > 2B$

$$x(nT_{vz}) = x_a(nT_{vz}) = ? x(n)$$

energie diskretního signálu

$$E = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_{vz}) \quad \text{nebo} \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

Spektrální vyjádření diskretního signálu

$$X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \quad x(nT_{vz}) = \int_{-F/2}^{F/2} X(f) \cdot \exp(2\pi jfnT_{vz}) \cdot df$$

Vztah spektra analogového a diskretního signálu:

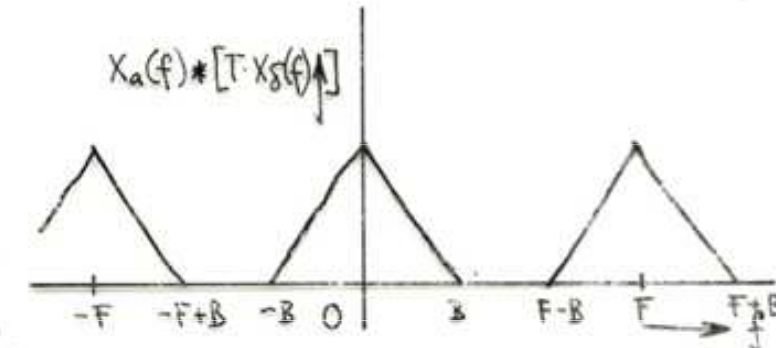
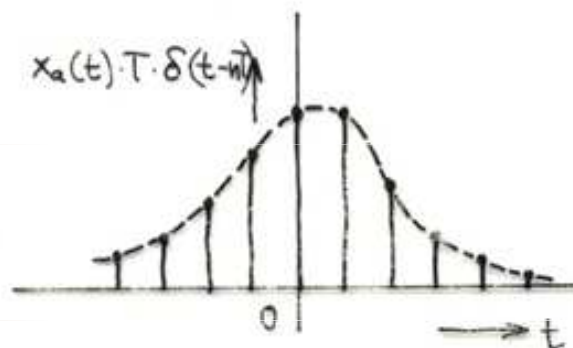
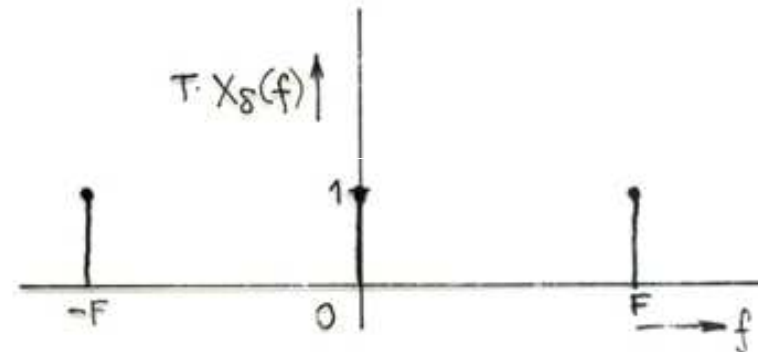
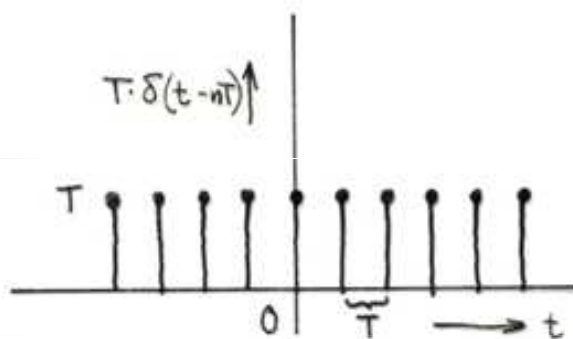
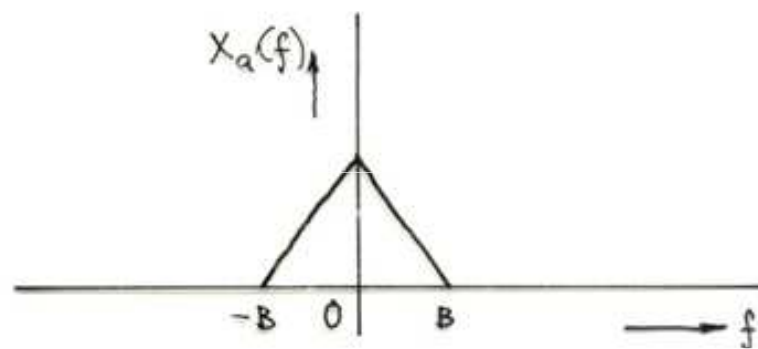
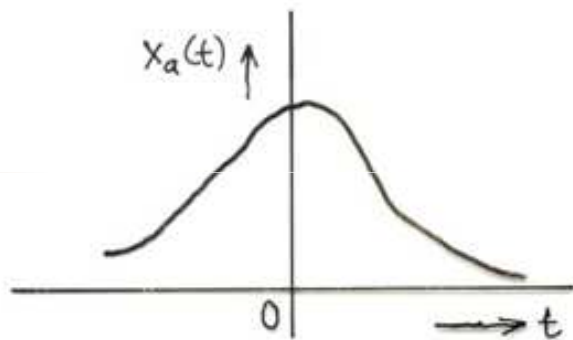
$$x(nT_{vz}) = x_a(nT_{vz}) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) \cdot e^{j2\pi fnT_{vz}} df$$

$$\begin{aligned} \int_{-F/2}^{F/2} X_a(f) e^{j2\pi fnT_{vz}} df &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{j2\pi fnT_{vz}} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kF-F/2}^{kF+F/2} X_a(f) e^{j2\pi fnT_{vz}} df = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F/2}^{F/2} X_a(f - kF) e^{j2\pi fnT_{vz}} df = \int_{-F/2}^{F/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kF) e^{j2\pi fnT_{vz}} df \end{aligned}$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kF)$$

spektrální periodicitata

DISKRÉTNÍ SIGNÁL



REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE

předpokládejme, že je

$$X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| \leq F/2 \\ 0 & |f| > F/2 \end{cases}$$

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi fnT_{vz}}$$

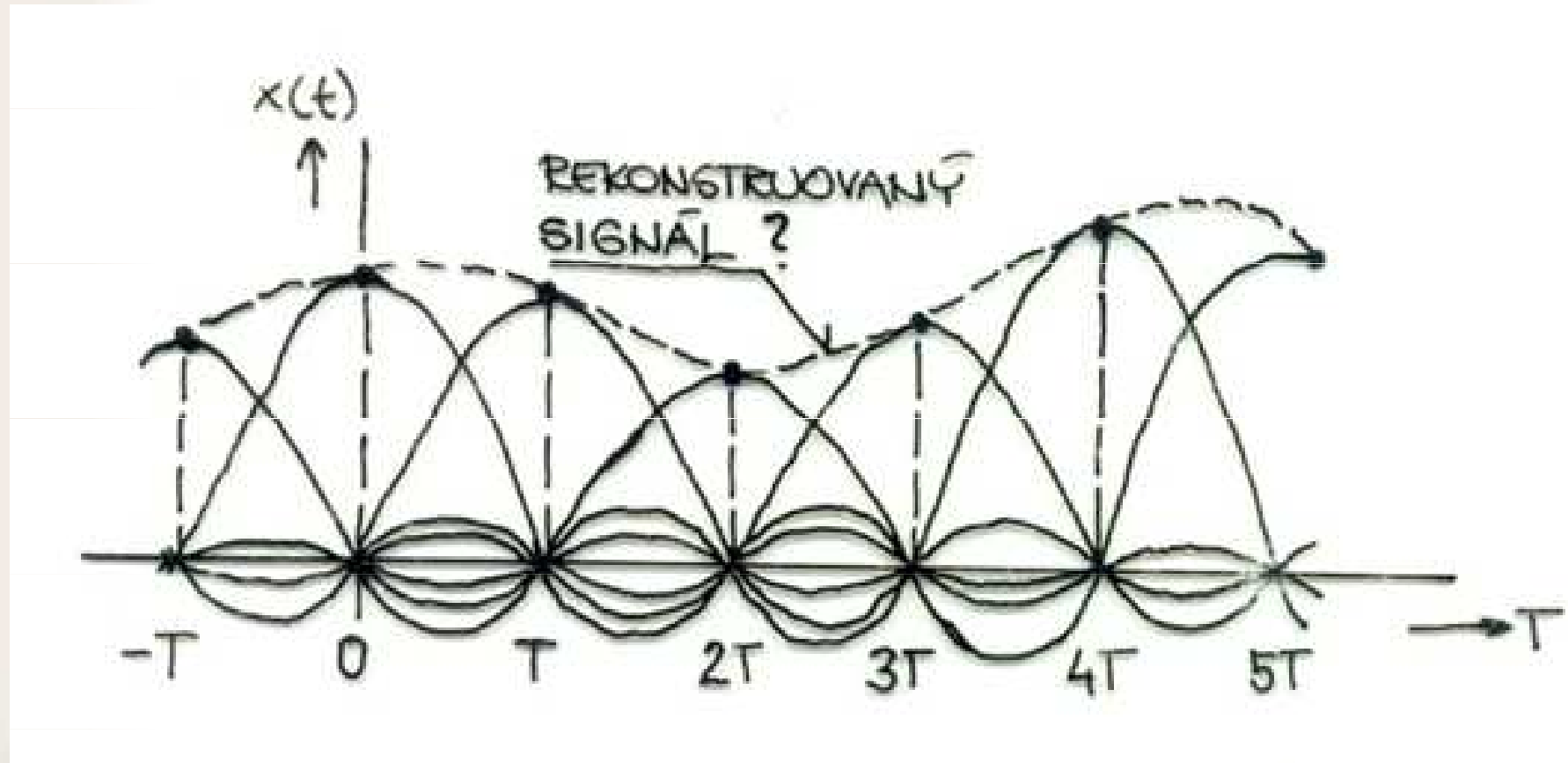
$$x_a(t) = \int_{-F/2}^{F/2} X_a(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-F/2}^{F/2} \left[T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi fnT_{vz}} \right] \cdot e^{j2\pi ft} df =$$

$$= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \int_{-F/2}^{F/2} e^{j2\pi f(t-nT_{vz})} df = \left| \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \frac{e^{j2\pi(t-nT_{vz}) \cdot F/2} - e^{-j2\pi(t-nT_{vz}) \cdot F/2}}{j2\pi(t-nT_{vz})} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \text{Si} \left(\pi(t-nT_{vz}) \cdot \frac{1}{T_{vz}} \right)$$

REKONSTRUKCE SIGNÁLU



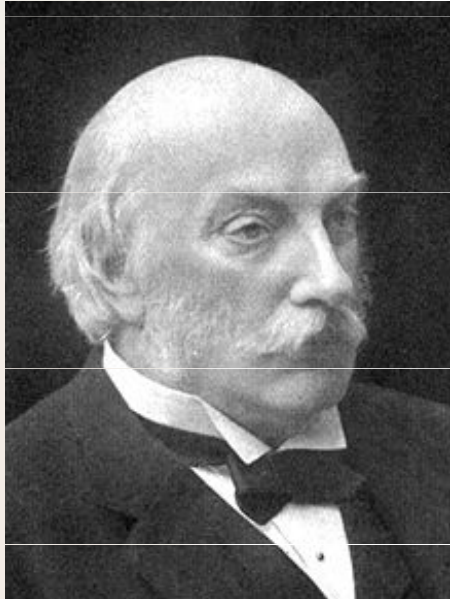
RAYLEIGHHOVA VĚTA

$$E = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_{vz}) = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 df$$

$$\begin{aligned} E &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz}) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \int_{-F/2}^{F/2} X(f) \cdot e^{j2\pi fnT_{vz}} df = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} X(f) \cdot \underbrace{\left[T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{j2\pi fnT_{vz}} \right]}_{X^*(f)} df = \int_{-F/2}^{F/2} X(f) \cdot X^*(f) df = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 df = \end{aligned}$$

$$= \int_{-F/2}^{F/2} S_{xx}(f) df$$

JOHN WILLIAM STRUTT, 3. BARON RAYLEIGH



An Unerring Leader in the Natural Knowledge

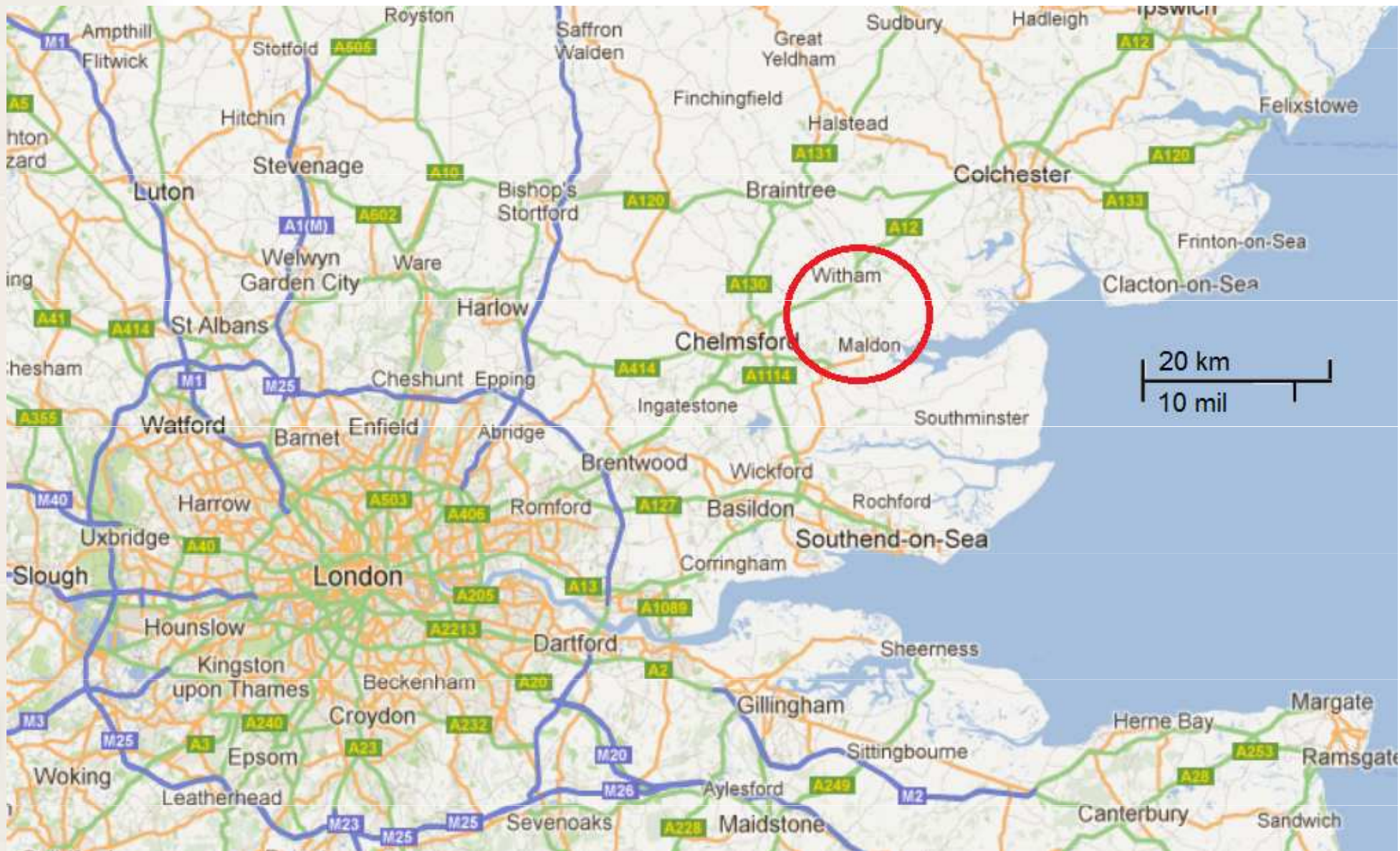
* 12. 11.1842, Maldon, Essex, U.K.

† 30.6.1919, Witham, Essex, U.K.

oblasti zájmu: fyzikální chemie,
akustika, optický a elektromagnetický
rozptyl světla, povrchové vlny;
psychologie - telekineze

na čem se podepsal: spolu s
Williamem Ramsayem objevitel
argonu (Nobelova cena 1904) a
dalších vzácných plynů;





WIENER-KHINCHINOVA VĚTA

$$\begin{aligned} R_{xx}(mT_{vz}) &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}) = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} X^*(f) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df = \int_{-F/2}^{F/2} S_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df \end{aligned}$$

ALEXSANDR JAKOVLEVICH CHINČIN

* 7.(19.)7.1894, село Кондрово, Медынский уезд, Калужская губерния, Россия

† 18.7.1959, Москва, СССР

zájmy: teorie pravděpodobnosti, statistika, teorie funkcí reálné proměnné, teorie čísel, limitní věty, řetězové zlomky, ...

na čem se podepsal:

Pollaczekova-Chinčinova formule (teorie fronty), Wienerův-Chinčinův teorém, Chinčinova nerovnost (statistika, komplexní čísla), Chinčinova-Lévyho konstanta (konvergence řetězových zlomků), Chinčinova věta o diofantických aproximacích (aproximace reálných čísel pomocí racionálních čísel)



ocenění: 1939 – člen korespondent AV SSSR;
1941 – Stalinova cena, ? - Leninova cena

WIENER-KHINCHINOVA VĚTA

$$\begin{aligned} R_{xx}(mT_{vz}) &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}) = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} X^*(f) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df = \int_{-F/2}^{F/2} S_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f m T_{vz}} df \end{aligned}$$

WIENEROVA-KHINCHINOVA VĚTA

$$\begin{aligned} & T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi fmT_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}) e^{-j2\pi fmT_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz} + mT_{vz}) e^{-j2\pi fmT_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi fnT_{vz}} = \\ &= X^*(f) \cdot X(f) = |X(f)|^2 = S_{xx}(f) \end{aligned}$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

☑ z toho plyne, že spektrální hustotu energie neperiodického signálu s konečnou energií lze spočítat dvěma způsoby:

→ přímá metoda:

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = |T_{vz} \cdot \sum x(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz})|^2$$

→ nepřímá metoda:

$$1) R_{xx}(mT_{vz}) = T_{vz} \cdot \sum x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz});$$

$$2) S_{xx}(f) = \sum R_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

SIGNÁL S KONEČNOU ENERGIÍ - SHRNUÍ

☑ z toho plyne, že spektrální hustotu energie neperiodického signálu s konečnou energií lze spočítat dvěma způsoby:

→ přímá metoda:

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = |T_{vz} \cdot \sum x(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz})|^2$$

→ nepřímá metoda:

$$1) R_{xx}(mT_{vz}) = T_{vz} \cdot \sum x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz});$$

$$2) S_{xx}(f) = \sum R_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

SIGNÁL S KONEČNOU ENERGÍÍ - SHRNUÍ

PRAXE

- ☑ Signál konečné délky = tj. násobení signálu obdélníkovým oknem, takže počítáme spektrum signálu

$$\tilde{x}(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) \cdot w_{\text{rect}}(nT_{vz})$$

ve frekvenční oblasti

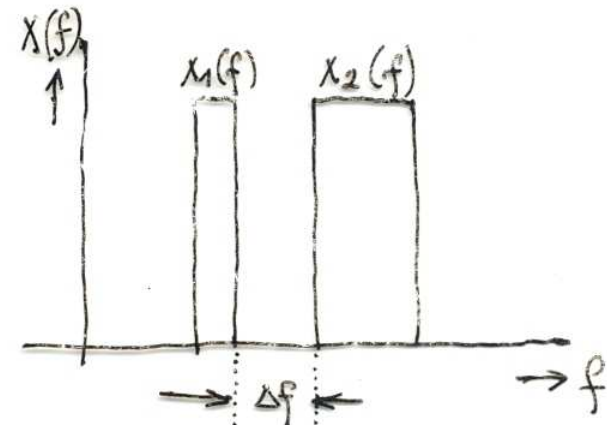
$$\tilde{X}(f) = X(f) * W(f) = \int_{-F/2}^{F/2} X(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha$$

SIGNÁL S KONEČNOU ENERGIÍ - SHRNUÍ

Konvoluce funkce $W(f)$ s $X(f)$ vyhlazuje spektrum $X(f)$ za předpokladu, že $W(f)$ je relativně úzké ve srovnání s $X(f) \Rightarrow$ okno $w(nT_{vz})$ musí být dostatečně dlouhé

Problémy:

- ✓ postranní laloky
- ✓ rozlišení dvou frekvenčních pásem



FREKVENČNÍ OKNA

Triangular (Bartlett) Window:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1. \end{cases}$$

Hann Window:

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Hamming Window:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Blackman Window:

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right), \\ 0 \leq n \leq N-1.$$

Kaiser Window:

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2} \right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]^2} \right]}{I_0 \left[\omega_a \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]},$$

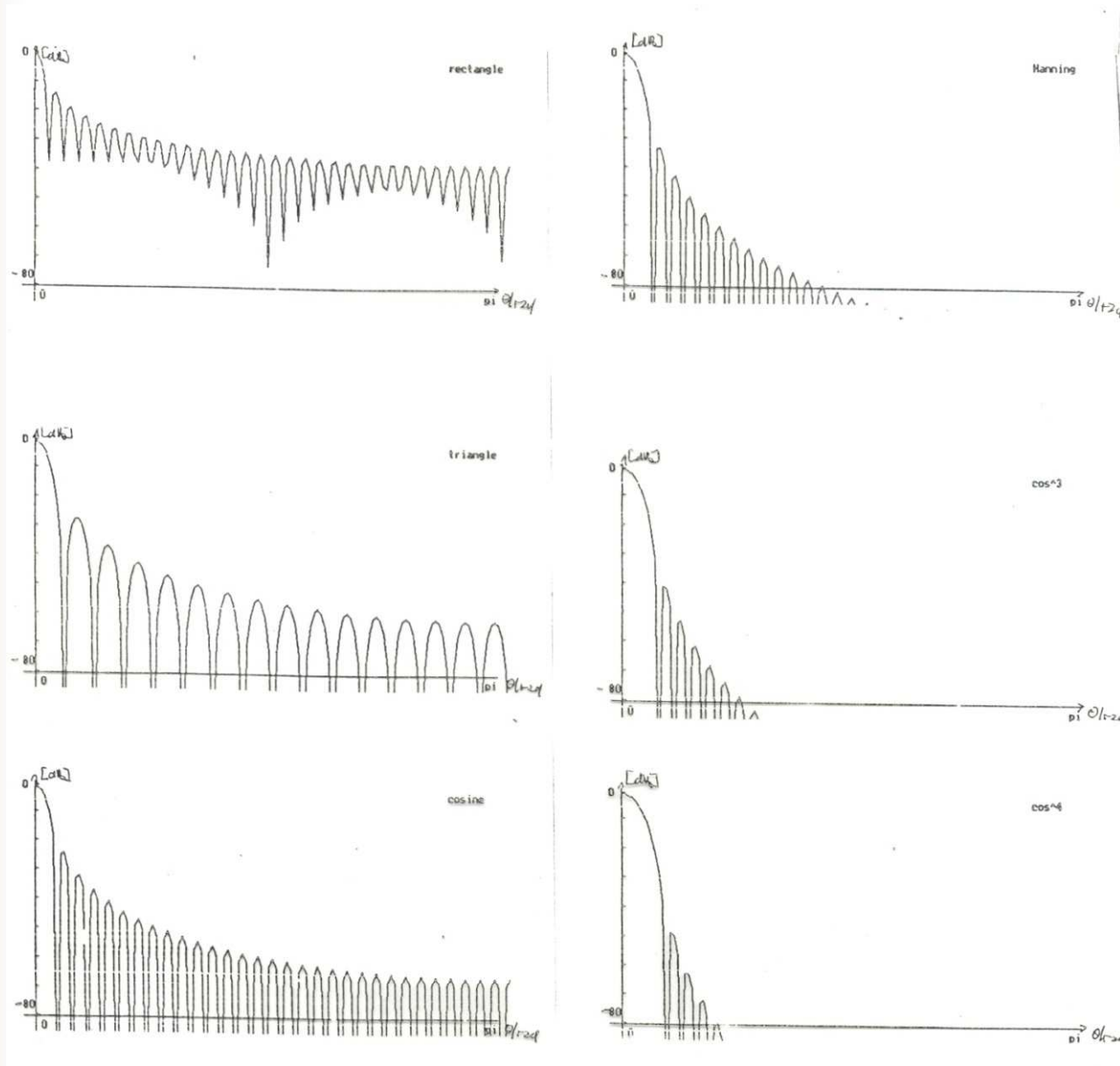
Harris, F.J.: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proc. IEEE, vol. 66, No 1, Jan 1978 p. 51-83

Nuttall, A.H.: Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior IEEE Trans. Acoust, Speech & Sign. Proc., vol. ASSP-29, No 1, Feb. 1981 p. 84-91

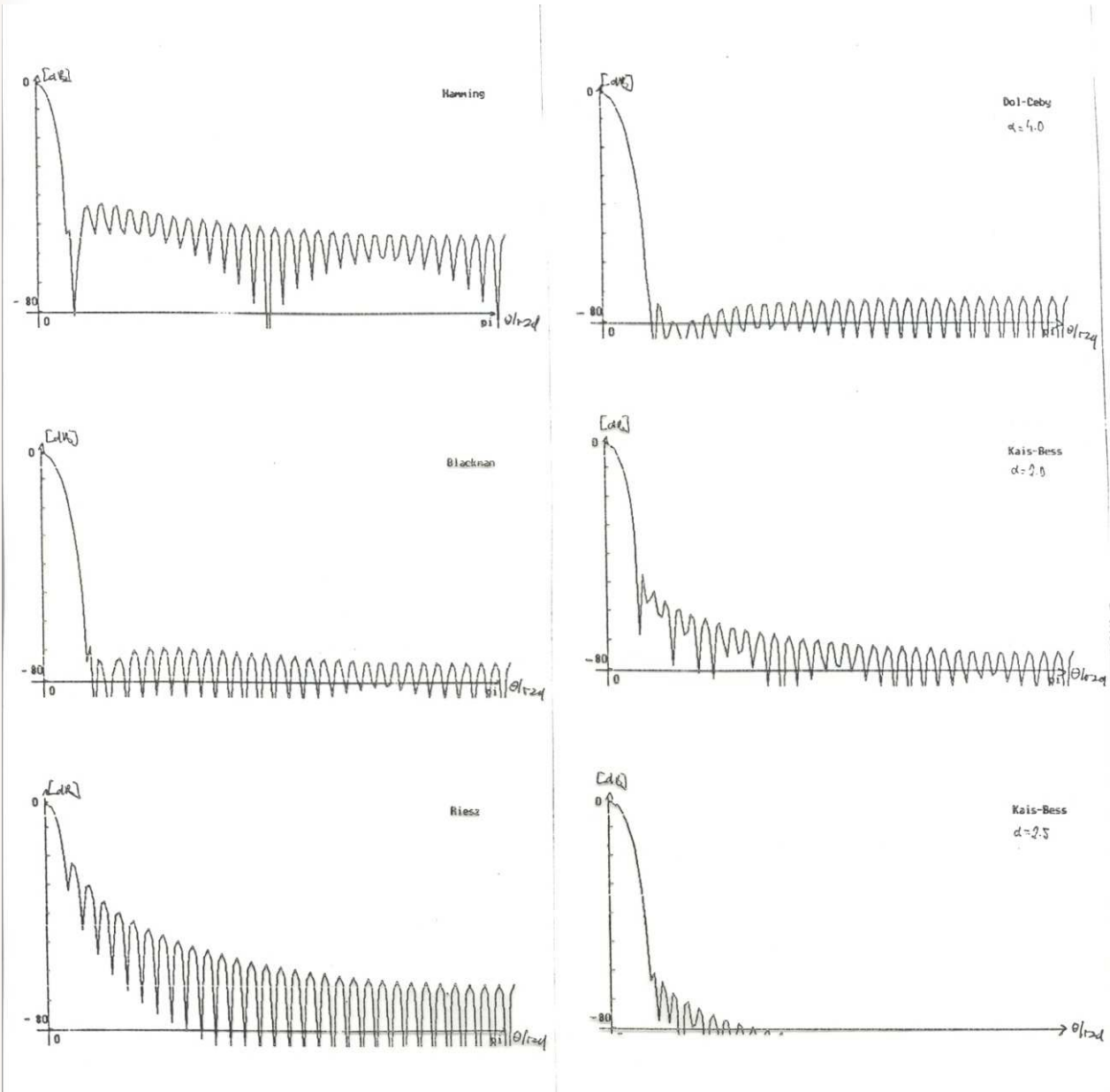
Adams, J.W.: A New Optimal Window, IEEE Trans. Sign. Proc. vol-SP-39, No 8, Aug. 1991, p. 1753-1769

kde $I_0(\bullet)$ je modifikovaná Besselova funkce 0. řádu 1. druhu; ω_a je šířka hlavního laloku

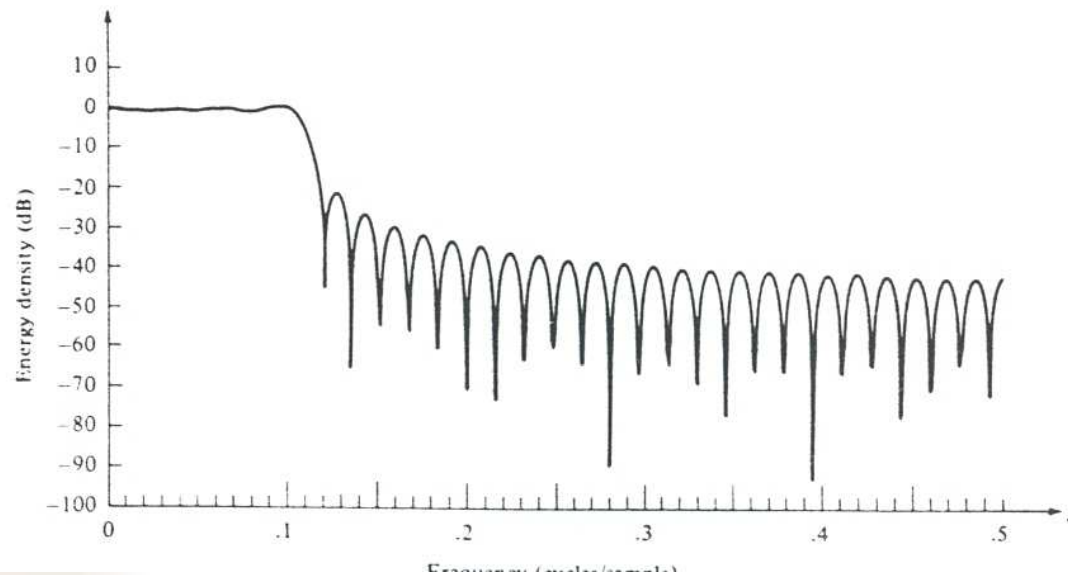
FREKVENČNÍ OKNA



FREKVENČNÍ OKNA



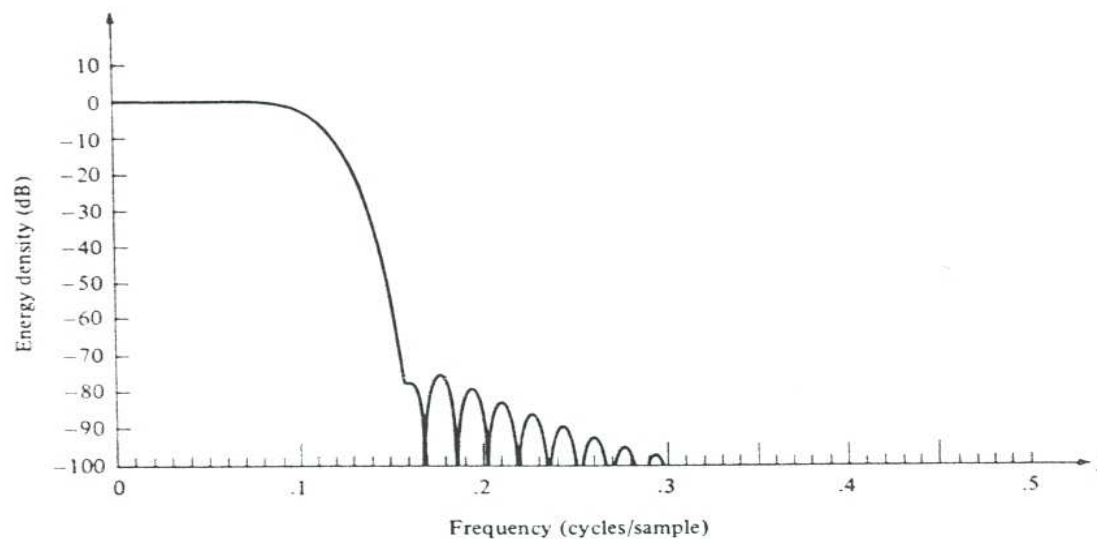
VYHLAZOVÁNÍ OKNEM



spektrální konvoluce
obdélníkového okna
(spektrum)

$$X(f) = 1 \text{ pro } |f| \leq 0,1;$$
$$X(f) = 0 \text{ pro } |f| > 0,1;$$

obrazu obdélníka
($N=61$) a ...



Blackmanova okna
 $N = 61$

SIGNÁL S KONEČNOU ENERGIÍ - PŘÍKLADY

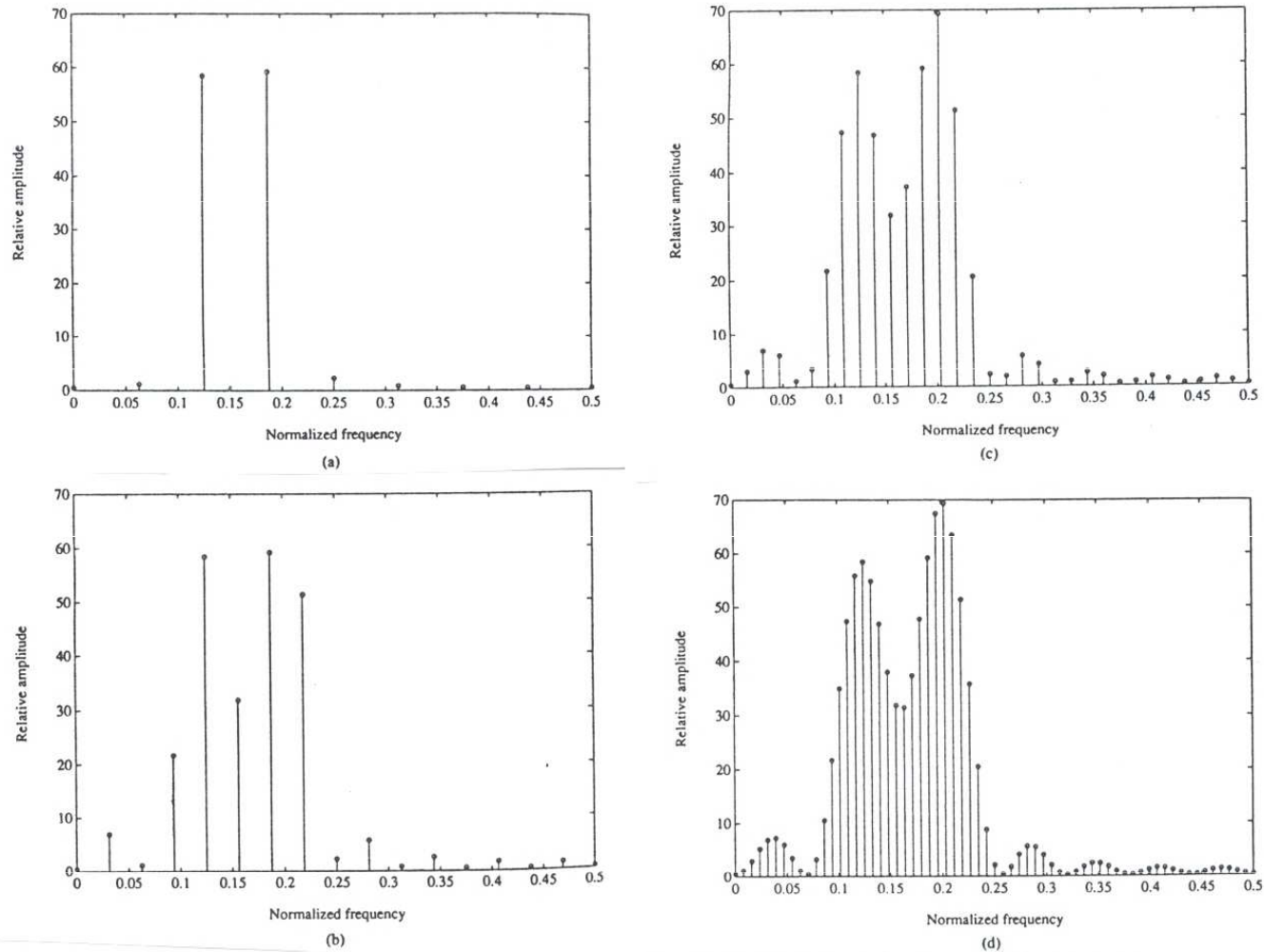


FIGURE 15-1 Spectrum/energy spectral density of a signal composed of two sinusoidal signals with frequencies 0.135 and 0.195 Hz. N is the number of signal samples. L is the number of samples after appending zeros. (a) $N = L = 16$; (b) $N = 16, L = 32$; (c) $N = 16, L = 64$, and (d) $N = 16, L = 128$.

SIGNÁL S KONEČNOU ENERGIÍ - PŘÍKLADY

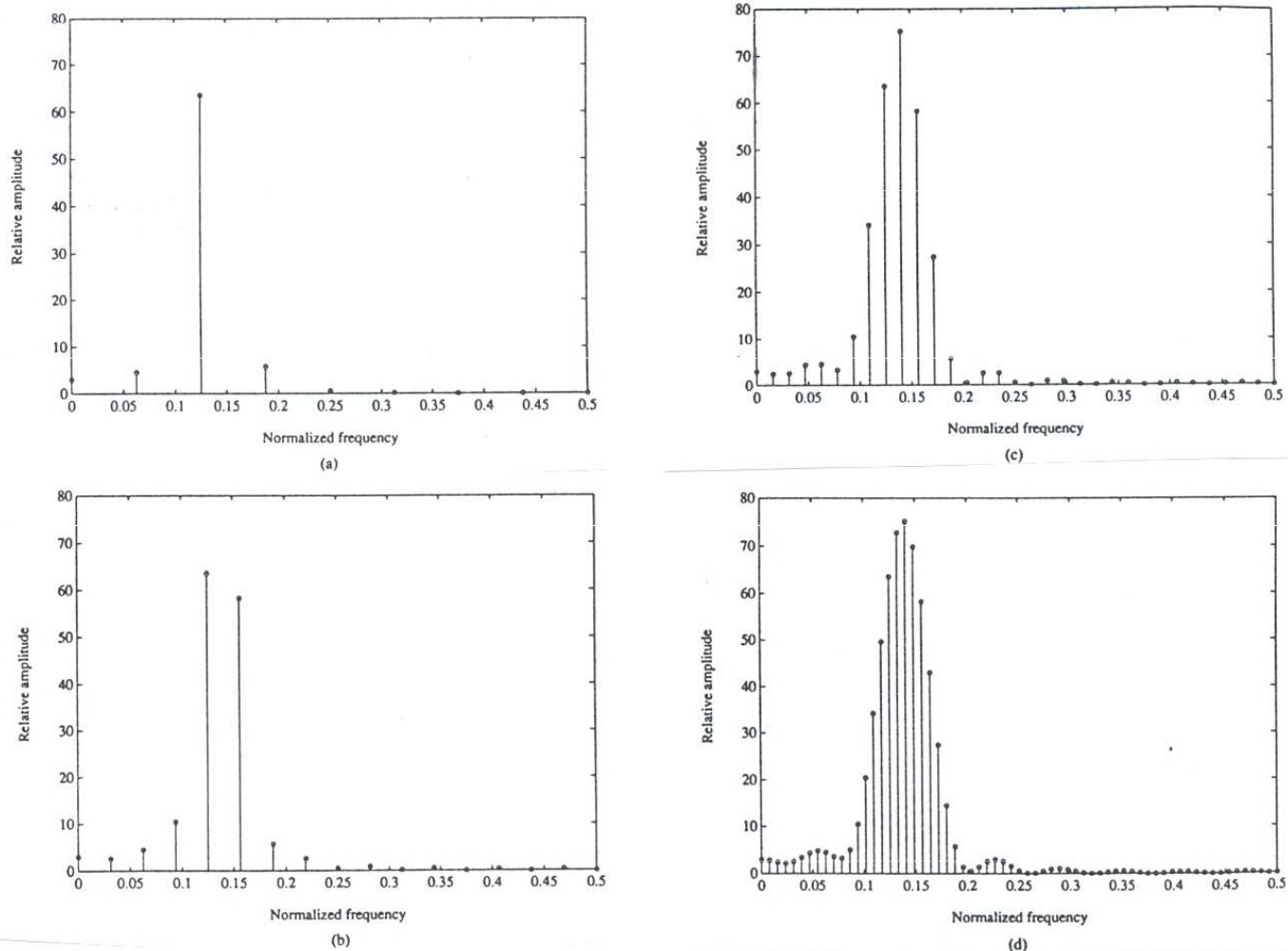
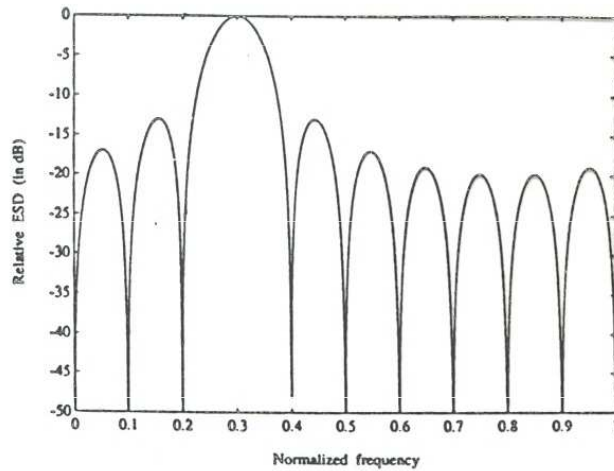
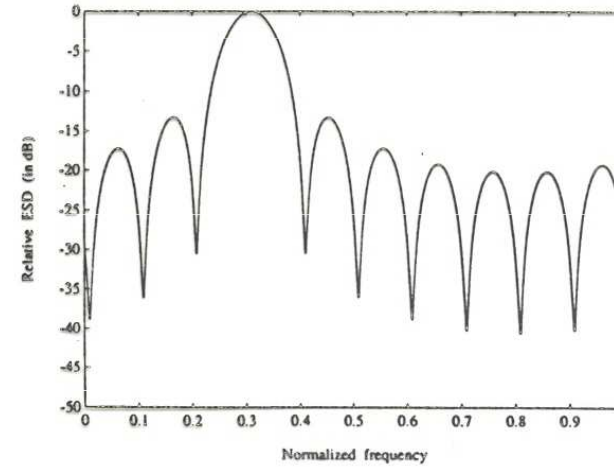


FIGURE 16-2 Spectrum/energy spectral density of a signal composed of two sinusoidal signals with frequencies 0.135 and 0.145 Hz. Note that the frequency spacing $\Delta f = 0.01$ is much smaller than in Figure 16-1. N is the number of signal samples. L is the number of samples after appending zeros. (a) $N = L = 16$; (b) $N = 16$, $L = 32$; (c) $N = 16$, $L = 64$; and (d) $N = 16$, $L = 128$.

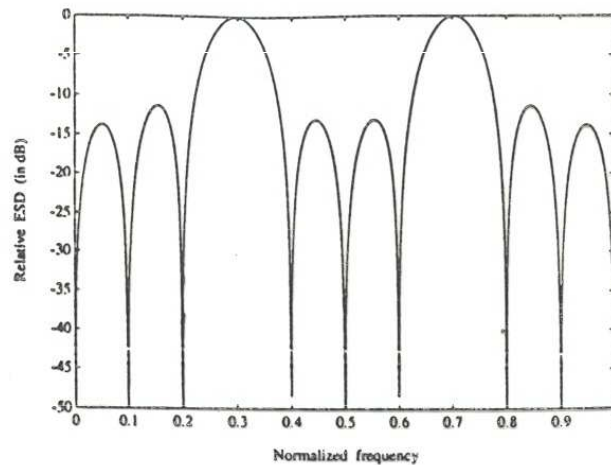
SIGNÁL S KONEČNOU ENERGIÍ - PŘÍKLADY



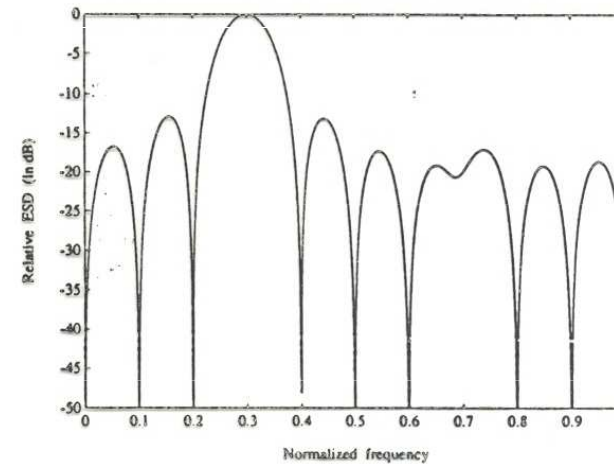
(a)



(c)



(b)



(d)

FIGURE 16-3 (a) Energy spectral density of a single complex sinusoid located at frequency $f_0 = 0.3$ Hz. (b) Energy spectral density of two complex sinusoids located at frequencies $f_0 = 0.3$ Hz and $f_1 = 0.7$ Hz. They have equal amplitudes. (c) Energy spectral density of two closely spaced complex sinusoids located at frequencies $f_0 = 0.3$ Hz and $f_1 = 0.32$ Hz with equal amplitudes. (d) Energy spectral density of two complex sinusoids located at frequencies $f_0 = 0.3$ Hz and $f_1 = 0.7$ Hz but with unequal amplitudes. The peak amplitude of the weaker sinusoid at f_1 is 20 dB below that of the stronger one at f_0 .