# C2142 Návrh algoritmů pro přírodovědce

## 2. Úvod do složitosti

Tomáš Raček

Jaro 2016

# Hledání nejčastějších slov – frequent_words

Zadání. Nalezněte v textu řetězce délky k s nejvyšším počtem výskytů.

frequent_words(text, k)

1. Pro každý podřetězec délky k řetězce text spočítej jeho výskyt pomocí funkce pattern_count(text, pattern)
2. Urči nejvyšší nalezenou četnost
3. Vrať řetězce s touto nejvyšší četností

Praktický test.

- krátké řetězce – frequent_words uspokojivě funguje
- dlouhé řetězce – nepoužitelné, čas výpočtu neodpovídá odhadu

# frequent_words – doba výpočtu

Pozorování

- doba výpočtu je úměrná velikosti vstupních dat
- závislost není nutně lineární – výpočet na 1000krát větší úloze nemusí trvat 1000krát déle
- na různých strojích/architekturách různé časy výpočtu
  - Thinkpad T430s: 7 s
  - Thinkpad X200s: 14 s

Důsledek (1). Nutná hlubší analýza frequent_words.

Důsledek (2). Porovnání náročnosti algoritmů podle času výpočtu není vhodné, potřebujeme aparát nezávislý na konkrétním stroji/architektuře.

# Složitost

**Složitost algoritmu.** Zaveďme složitost algoritmu jako funkci $f(n)$, kde $n$ je velikost vstupu.

**Návrh.** $f(n)$ určuje počet jednoduchých operací daného algoritmu pro vyřešení problému o velikosti $n$.

- jednoduché operace $\approx$ instrukce CPU (např. sečtení nebo porovnání dvou čísel, AND/OR,...)
- řešení nezávislé na architektuře

**Důsledek.** Porovnání efektivity algoritmů lze zjednodušeně převést na porovnání jejich složitostí.

# Asymptotická složitost – definice

## Formální definice

$$\mathcal{O}(g) = \{f \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f \in \mathcal{O}(g)$ čteme „$f$ roste asymptoticky nejvýše tak rychle jako $g$“.

## Význam konstant

$c$ rozdíl pouze v multiplikativní konstantě nepovažujeme za významný, tj. ztotožňujeme např. $n^2$ a $4n^2$

$n_0$ uvažujeme pouze „velká“ $n$

**Poznámka.** Analogicky lze definovat další množiny:

- $f \in \Omega(g)$ – $f$ roste asymptoticky alespoň tak rychle jako $g$
- $f \in \Theta(g)$ – $f$ roste asymptoticky právě tak rychle jako $g$

# Asymptotická složitost – příklady

## Rychlost růstu funkcí

$$\log n \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll 2^n \ll n! \qquad \text{pro } n \to \infty$$

## Příklady

| Funkce | Složitostní třída | Pojmenování |
| --- | --- | --- |
| $2142$ | $\mathcal{O}(1)$ | konstantní |
| $2 \log n + 4$ | $\mathcal{O}(\log n)$ | logaritmická |
| $0.5n + \log n$ | $\mathcal{O}(n)$ | lineární |
| $n^2 - 10n$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | kvadratická |
| $6n^3$ | $\mathcal{O}(n^3)$ | kubická |
| $2^n - 1$ | $\mathcal{O}(2^n)$ | exponenciální |

**Poznámka.** Ověření, zdali $f \in \mathcal{O}(g)$, lze provést výpočtem limity $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$.

# Složitost problému

Cíl. Snaha o nalezení efektivních algoritmů pro daný problém.

Otázka. Lze zrychlovat pořád, nebo existuje nějaký dolní limit?

Složitost problému

- minimální počet operací potřebný pro vyřešení libovolné instance problému
- nutno odvodit teoreticky $\rightarrow$ mnohdy netriviální
- odpovídá složitosti optimálního algoritmu pro daný problém

Jak ale poznám optimální algoritmus? Srovnejme odhady složitosti problému $\mathcal{P}_i$ a složitosti algoritmů $\mathcal{A}_j$ řešící tento problém:

$$\mathcal{P}_1(n) < \ldots < \mathcal{P}_k(n) \leq \mathcal{A}_1(n) < \ldots < \mathcal{A}_m(n)$$

$\mathcal{A}$ je optimální algoritmus, pokud $\mathcal{A}(n) = \mathcal{P}_k(n)$.

# Složitost problému – příklady

### Nalezení nejmenšího prvku pole

- je nutné projít všechny prvky pole – $\Omega(n)$ operací
- algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(n)$ jistě existuje $\to$ složitost problému (= složitost optimálního algoritmu) je lineární

### Násobení matic

- potřeba $\Omega(n^2)$ operací
- naivní algoritmus – $\mathcal{O}(n^3)$
- Strassenův algoritmus – $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \doteq \mathcal{O}(n^{2{,}81})$
- aktuálně nejlepší algoritmus (2014) – $\mathcal{O}(n^{2{,}372\ldots})$
- nalezení optimálního algoritmu je otevřený problém

# Prostorová složitost

Prostorová složitost. Vedle časové náročnosti algoritmů lze určit i množství paměti, které algoritmus potřebuje pro svůj výpočet.

- velikost vstupních (a výstupních) dat neuvažujeme
- vyjadřujeme také $\mathcal{O}$-notací

In situ algoritmus vyžaduje navíc pouze $\mathcal{O}(1)$ paměti.

- výpočet průměrné hodnoty prvků v poli
- naivní násobení matic
- ...

Otázka. Je lepší in situ algoritmus s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$ než algoritmus s časovou složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$ a prostorovou složitostí $\mathcal{O}(n)$?

# Vztah mezi časem a prostorem

**Teze.** Někdy lze snížit časovou složitost algoritmu zvýšením jeho prostorové složitosti (a naopak).

↑ prostor ↓ čas

- softwarová cache
- předpočítání (mezi)výsledků

↑ čas ↓ prostor

- komprese
- zvýšení abstrakce

# Složitost v praxi

Tabulka časů výpočtu algoritmů o složitostech $\log n$, $n$, $n^2$, $2^n$ a pro vstup velikosti 10, 20, 50 a 1000. Předpokládejme, že jedna iterace algoritmu trvá $1\mu s$.

| | 10 | 20 | 50 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| $\log n$ | 0,000001 s | 0,000001 s | 0,000002 s | 0,000003 s |
| $n$ | 0,00001 s | 0,00002 s | 0,00005 s | 0,001 s |
| $n^2$ | 0,0001 s | 0,0004 s | 0,0025 s | 1 s |
| $2^n$ | 0,001024 s | 1,048576 s | 35,7 let | $3,4 \cdot 10^{287}$ let |

Poznámka. Stáří vesmíru je odhadováno na $13,8 \cdot 10^9$ let.

# pattern_count – analýza

```
def pattern_count(text, pattern):
    count = 0
    for i in range(0, 1  + len(text) - len(pattern)):
        if text[i : i + len(pattern)] == pattern:
            count += 1

    return count
```

## Pozorování

- procházíme celkem $|text| - |pattern| + 1$ možných umístění
- každé porovnání dvou řetězců obnáší nejvýše $|pattern|$ porovnání jednotlivých znaků

Závěr. Počet kroků, které vykoná funkce pattern_count, lze vyjádřit jako $\mathcal{O}(|pattern| \cdot (|text| - |pattern| + 1))$.

# frequent_words – analýza I

```
def frequent_words(text, k):
    counts = dict()
    frequent_patterns = set()

    for i in range(0, len(text) - k + 1):
        pattern = text[i : i + k]
        counts[pattern] = pattern_count(text, pattern)

    max_count = max(counts.values())
    for (pattern, count) in counts.items():
        if count == max_count:
            frequent_patterns.add(pattern)

    return frequent_patterns
```

## Pozorování

- počet volání pattern_count je $|text| - k + 1$
- další příkazy nejsou určující pro dobu běhu

# frequent_words – analýza II

Složením předchozích informací dostáváme:

frequent_words(text, k)

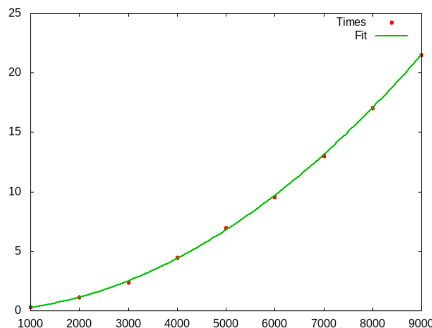
- složitost funkce pattern_count je $\mathcal{O}(|pattern| \cdot (|text| - |pattern| + 1))$
- počet volání pattern_count je $|text| - k + 1$
- platí $k = |pattern|$
- počet kroků celkem:

$$k \cdot (|text| - k + 1) \cdot (|text| - k + 1) = k \cdot (|text| - k + 1)^2$$

V praxi platí $k \ll |text|$, asymptotická složitost funkce frequent_words je tedy $\mathcal{O}(k \cdot |text|^2)$.

# frequent_words – praxe

Měření. Doba výpočtu funkce frequent_words(text, k) pro $k = 9$ a $|text| = \{1000, \ldots, 9000\}$.




Pozorování. Naměřená data lze úspěšně proložit parabolou, což odpovídá odhadnuté složitosti $\mathcal{O}(k \cdot |text|^2)$.

# Hledání nejčastějších slov v textu

**Dosavadní řešení.** Jsme schopni navrhnout a implementovat algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(k \cdot |text|^2)$.

**Zásadní otázka.** Jde to i lépe?

**Alternativní návrh.** Počítání četností podřetězců při průchodu textem

1. Procházej vstupní text postupně po podřetězcích délky $k$
   1.1 Pokud se konkrétní podřetězec vyskytl poprvé, nastav jeho četnost na 1, jinak ji zvyš o 1
2. Urči nejvyšší nalezenou četnost
3. Vrať řetězce s touto nejvyšší četností

# faster_frequent_words

Jak ukládat pro každý řetězec jeho četnost?

- počet různých řetězců délky $k$ z písmen A, C, G, T je $4^k$
- každému tomuto řetězci lze přiřadit číslo od $0$ do $4^k - 1$

Příklad pro $k = 3$:

$$\text{AAA} \rightarrow 0, \text{AAC} \rightarrow 1, \text{AAG} \rightarrow 2, \ldots, \text{TTT} \rightarrow 63$$

Příklad převodu řetězce na číslo. A $\rightarrow 0$, C $\rightarrow 1$, G $\rightarrow 2$, T $\rightarrow 3$.

$$\begin{aligned}
\text{ACCTG} &\rightarrow A \cdot 4^4 + C \cdot 4^3 + C \cdot 4^2 + T \cdot 4^1 + G \cdot 4^0 \\
\text{ACCTG} &\rightarrow 0 + 64 + 16 + 12 + 2 \\
\text{ACCTG} &\rightarrow 94
\end{aligned}$$

Implementace. Vytvořím pole o velikosti $4^k$, kde budu ukládat četnosti jednotlivých řetězců.

# Převod řetězce na číslo – implementace

```
def pattern2number(pattern):
    characters = "ACGT"

    if pattern == "":
        return 0
    else:
        return 4 * pattern2number(pattern[:-1]) \
                + characters.index(pattern[-1:])


def number2pattern(number, k):
    characters = "ACGT"

    if k == 0:
        return ""
    else:
        divisor = 4 ** (k - 1)
        return characters[number // divisor] \
                + number2pattern(number % divisor, k - 1)
```

# faster_frequent_words – implementace

```
def computing_frequencies(text, k):
    frequency_array = [0] * (4 ** k)

    for i in range(len(text) - k + 1):
        pattern = text[i: i + k]
        frequency_array[pattern2number(pattern)] += 1

    return frequency_array


def faster_frequent_words(text, k):
    frequent_patterns = set()
    frequency_array = computing_frequencies(text, k)
    max_count = max(frequency_array)

    for i in range(0, 4 ** k):
        if frequency_array[i] == max_count:
            frequent_patterns.add(number2pattern(i, k))

    return frequent_patterns
```

# Složitost faster_frequent_words

Složitost jednotlivých fází algoritmu

- inicializace pole četností $\mathcal{O}(4^k)$
- převod řetězce na číslo (a naopak) $\mathcal{O}(k)$
- průchod vstupním textem, počítání četností $\mathcal{O}(k \cdot (|text| - k + 1))$
- nalezení nejvyšší četnosti $\mathcal{O}(4^k)$
- výběr řetězců s nejvyšší četností $\mathcal{O}(k \cdot 4^k)$

Celková složitost faster_frequent_words. Po úpravě dostáváme složitost $\mathcal{O}(k \cdot |text| + k \cdot 4^k)$, přičemž paměťová složitost je $\mathcal{O}(4^k)$.

Závěr. Pro $k \ll n$ je faster_frequent_words výrazně rychlejší než frequent_words.

A jde to ještě lépe? ;-)