# mmzm_dvojpar

September 29, 2016

## 1 Dvojparametrický model

- předpokládejme, že naměřená data $y_i$ závisejí na některé primární veličině (např. vlnové délce nastavené v monochromátoru) $x_i$ podle známé modelové funkce *z(x)*, ovšem s neznámou amplitudou *a* a pozadím *b*
- nejistota v hodnotách $x_i$ je zanedbatelná (podstatně menší než vzdálenost sousedních bodů)
- nejistota v měření má normální rozdělení s rozptylem $\sigma$

pro předpokládanou hodnotu parametrů *a* a *b* je v bodě $x_i$ očekávána střední hodnota závislé proměnné $a * z(x_i) + b$, tedy hustota měřené N-tice

$$\prod_i^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_i - az(x_i) - b)^2}{2\sigma^2}\right]$$

maximum (logaritmu) věrohodnosti odpovídá (pro toto norm. rozdělení) minimu součtu $S = \sum_i (y_i - az(x_i) - b)^2$:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \to \sum_i y_i z(x_i) = \hat{b} \sum_i z(x_i) + \hat{a} \sum_i z(x_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \to \sum_i y_i = \hat{b} N + \hat{a} \sum_i z(x_i)$$

determinant $d = N \sum_i^N z(x_i)^2 - (\sum_i^N z(x_i))^2 = \sum_i^N \sum_{j=i+1}^N (z(x_i) - z(x_j))^2$ je nenulový, pokud aspoň dvě hodnoty $z(x_i)$ jsou různé

pak

$$\hat{a} = \frac{1}{d} \sum_i y_i [\sum_j (z(x_j) - z(x_i))]$$

$$\hat{b} = \frac{1}{d} \sum_i y_i [\sum_j z(x_j)(z(x_j) - z(x_i))]$$

Střední hodnoty těchto veličin ozn. $a_0$, $b_0$ a $D(\hat{a}) = \sigma^2 N/d$, $D(\hat{b}) = \sigma^2 \sum_j z(x_j)^2/d$ a $D(\hat{a}, \hat{b}) = -\sigma^2 \sum_j z(x_j)/d$

odhad parametrů eliptickou oblastí při známém $\sigma$

---

$$\chi = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(\hat{a}-a_0)^2}{\sigma^2(\hat{a})} - 2\rho\frac{(\hat{a}-a_0)(\hat{b}-b_0)}{\sigma(\hat{a})\sigma(\hat{b})} + \frac{(\hat{b}-b_0)^2}{\sigma^2(\hat{b})}\right]$$

má rozdělení $\chi^2_2$. Podmínka $\chi = \lambda$ definuje elipsu, její vnitřek je pak konfidenční oblast s daným pravděpodobnostním obsahem. V naší interpretaci to odpovídá pravděpodobnosti, že bude elipsa se středem $\hat{a}, \hat{b}$ bude obsahovat skutečnou hodnotu parametru $a_0, b_0$

odhad parametrů eliptickou oblastí při neznámém $\sigma$

---

Pokud $\sigma$ neznáme, lze ji odhadnout pomocí náhodné proměnné

$$\widehat{\sigma^2} = S_0/N = \sum_i (y_i - \hat{a}z(x_i) - \hat{b})^2/N$$

($S_0$ je *reziduální suma čtverců* - minimum fce S) - veličina $\widehat{\sigma^2}N/\sigma^2$ má rozdělení $\chi^2_{N-2}$ (počet stupňů volnosti). Nevychýlený odhad $\sigma^2$ je tedy $S_0/(N-2)$.

Podíl $\frac{\sigma^2\chi/2}{S_0/(N-2)}$ má pak Fisherovo rozdělení. Elipsy popisující odhady parametrů pak mají nejen náhodný střed, ale i velikost: odhady disperzí jsou náhodné veličiny.

$$\hat{\delta}(\hat{a}) = \sqrt{\frac{S_0}{N-2}}\sqrt{\frac{N}{d}}$$

$$\hat{\delta}(\hat{b}) = \sqrt{\frac{S_0}{N-2}}\sqrt{\frac{1}{d}\sum_i z(x_i)^2}$$