mmzm_these

September 29, 2016

1 Testování hypotéz

Z předchozího měření (nebo teorie) činíme hypotézu o hodnotě neznámého parametru θ_0 (**odhad** $\hat{\theta}_0 \pm \delta$ s pravděp. obsahem p) , ev. o rozdělení měřených hodnot. Následující měření umožní **test** hypotézy *H0*:

měření dává statistiku $t(y_1, y_2, .., y_N)$, úkolem je stanovit, jaká je pravděpodobnost pozorování t za předpokladu platnosti/neplatnosti *H0*

určujeme tedy, s jakym rizikem nastane jedna ze 2 možných chyb

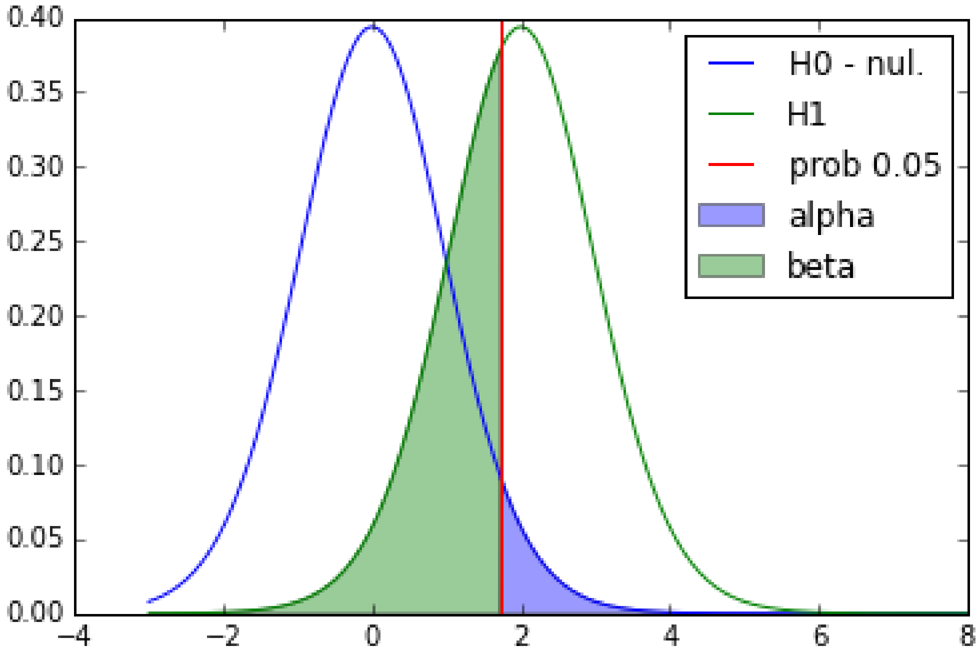
- chyba 1. druhu = hypotéza platí, ale *H0* zamítneme: $P(t \in K|H_0) = \alpha$
- chyba 2. druhu = hypotéza neplatí, ale *H0* přijmeme: $P(t \notin K|\mathrm{not}H_0) = \beta$

kde K je kritická oblast "nepřijatelných" hodnot t (pokud t zde leží, můžeme *H0* **zamítnout na hladině významnosti** α - jinak je naše statistika nedostatečná a vyžaduje další měření). Pravděpodobnost $1 - \beta$ je pak **síla (mohutnost) testu** (závisí na α)...

pokud *H0* neplatí (platí alternativa *H1*, pokud je jediná)

In [6]:
```
%matplotlib inline
M,N=12,10 #velikosti vzorků
mu=2.
sig=1
from matplotlib.pyplot import *
from scipy import stats
from numpy import r_
x=r_[-3:8:0.01]
hyp0=stats.t(M+N-2,loc=0)
hyp1=stats.t(M+N-2,loc=mu)
y1=hyp0.pdf(x)
y2=hyp1.pdf(x)
plot(x,y1)
plot(x,y2)
prob=0.05
pos=hyp0.ppf(1-prob) # hodnoty mensi nez tato
axvline(pos,color='r')
fill([pos]+list(x[x>pos]),[0]+list(y1[x>pos]),'b',alpha=0.4,hold=1)
fill(list(x[x<pos])+[pos],list(y2[x<pos])+[0],'g',alpha=0.4,hold=1)
legend(["H0 - nul.","H1","prob %.2f"%prob,"alpha","beta"])
```

```
Out[6]: <matplotlib.legend.Legend at 0xb0112a0c>
```



1.0.1 Neyman-Pearsonův test

Volba kritické oblasti podle poměru $f_N(X|\theta_1)/f_N(X|\theta_0) > c_\alpha$, hodnota c_α zvolena podle dané hladiny významnosti; v principu jde o poměr věrohodností.

```
In [4]: import numpy as np
        -np.log(0.1)*0.1+2.4
        np.log(0.05)/np.log(0.6)

Out[4]: 5.8644910008005713

In [ ]:
```

1.1 Test dobré shody

určení stupně shody získaných dat s hypotézou o jejich rozdělení

1.1.1 Pearsonův test

z naměřených hodnot sestavíme histogram o K buňkách, do každé z nich padne n_i z měřených hodnot ($\sum n_i = N$). Hypotéza H0 stanoví distrib. funkci rozdělení F, tedy pro každou buňku pravděpodobnost $p_i = P[x \in< l_i, m_i)] = F(m_i) - F(l_i)$, kde l_i, m_i jsou hranice i-té buňky (obvykle $l_i = m_{i-1}$). Náhodné proměnné n_i mají binomické rozdělení a očekávanou hodnotu $E(n_i) = Np_i$.

Pearsonova statistika

$$T=\sum_i^k \frac{(n_i-Np_i)^2}{Np_i}=\frac{1}{N}\sum_i^k\left(\frac{n_i^2}{p_i}-2n_iN+N^2p_i\right)=\frac{1}{N}\sum_i^k\frac{n_i^2}{p_i}-N$$

v limitě $N\to\infty$ (kdy rozdělení n_i se blíží normálnímu) má T rozdělení χ^2_{K-1} (Pearsonova věta).

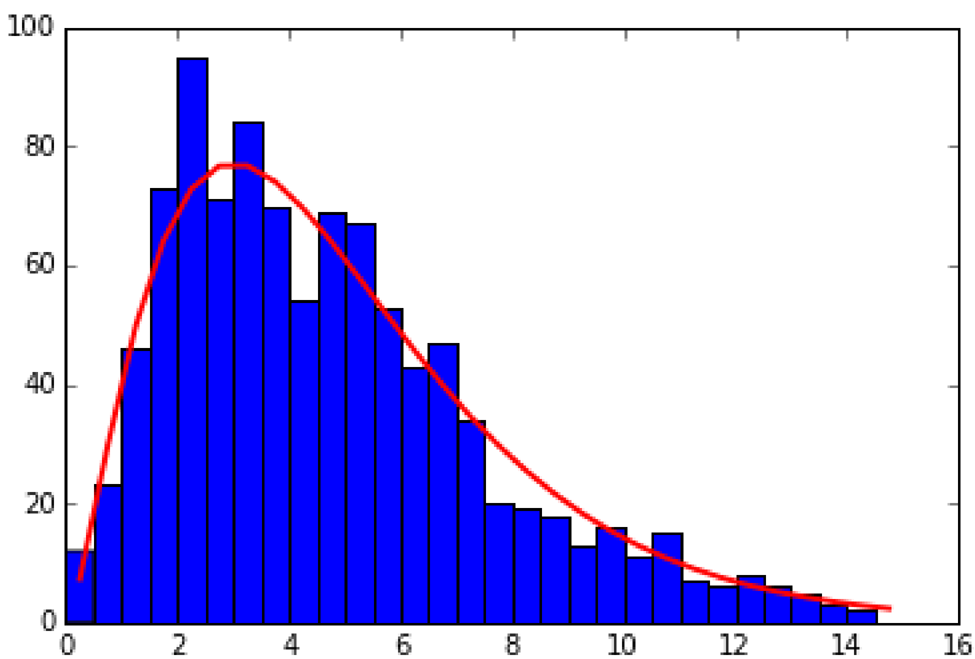
Podmínkou je malé množství buňek, kde není dostatečné množství měřených hodnot (lze řešit úpravou mezí buňek / slučováním tak, aby p_i byly vyrovnané).

Rozdělení může být závislé na parametrech $\theta_1,...,\theta_r$ - pak hledáme hodnotu θ dávající nejlepší shodu, testovaná statistika má rozdělení s méně stupni volnosti, někde mezi χ^2_{K-1} a χ^2_{K-r-1} (rozdíl je malý, pokud $K\gg r$).

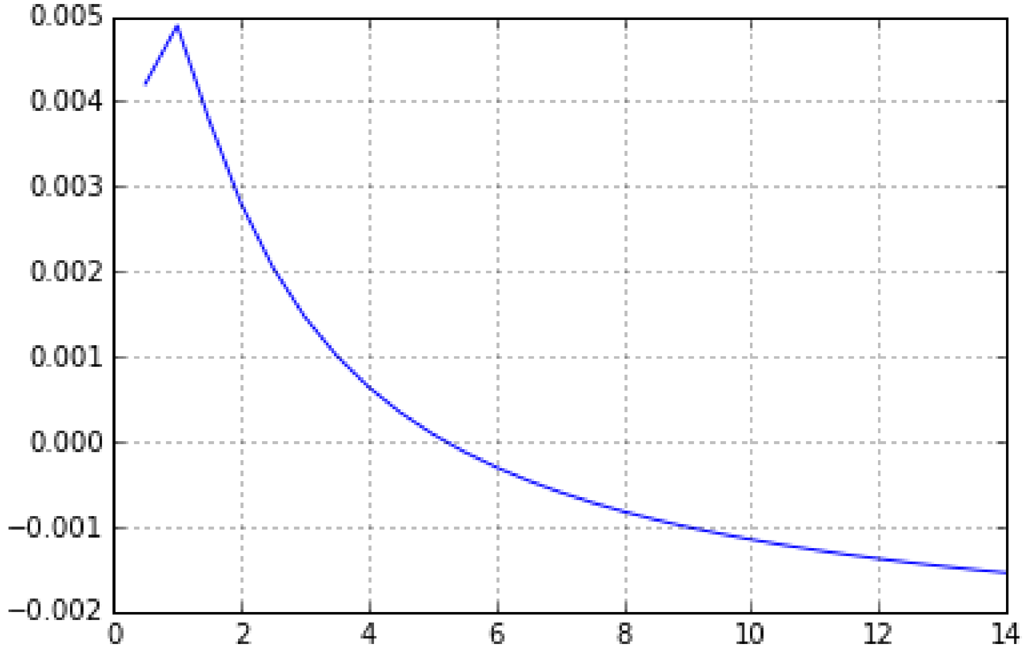
In [50]:
```
from scipy import stats
import numpy as np
%matplotlib inline
from matplotlib import pyplot as pl

N=1000
dx=0.5
dset=stats.chi2(5).rvs(N)
x=np.r_[0:15:dx]
ok=pl.hist(dset,x)
pred=stats.chi2(5).pdf(x+0.25)
pl.plot(x+0.25,pred*N*dx,'r',lw=2)
```

Out[50]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0xaf70c4ec>]
```

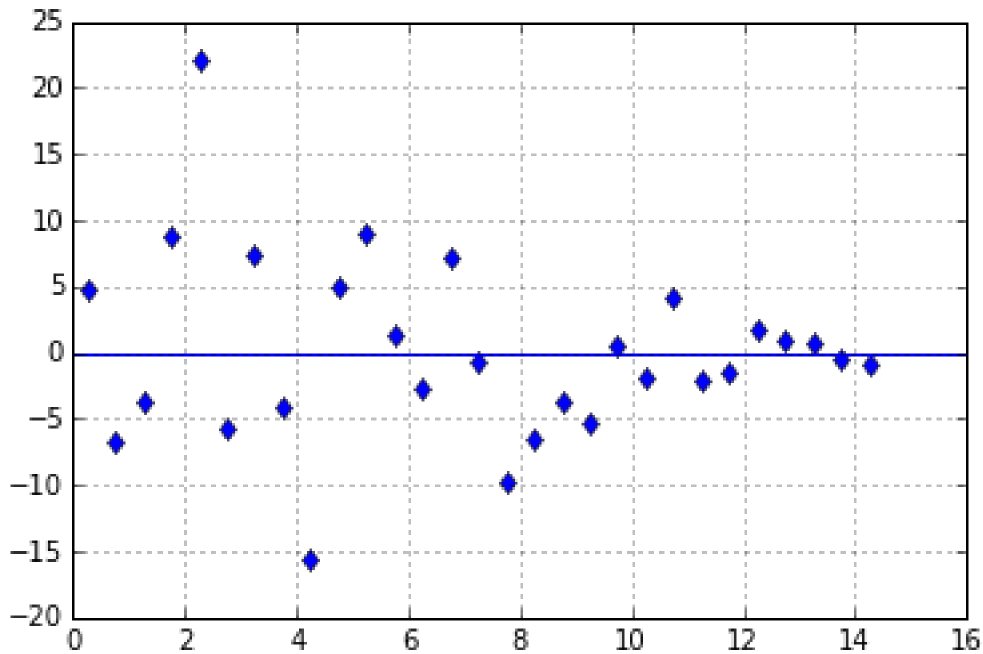


```
In [56]: cumpred=stats.chi2(5).cdf(x)
         pred2=cumpred[1:]-cumpred[:-1]
         pl.plot(x[1:-1],pred[1:-1]*dx/pred2[1:]-1)
         pl.grid()
```




```
In [57]: resid=ok[0]-pred[:-1]*N*dx
         pl.plot(x[:-1]+dx/2.,resid,'d')
         pl.axhline(0)
         pl.grid()
         sum(resid**2./(pred[:-1]*N*dx)),stats.chi2(len(ok[0])-1).isf([0.1,0.05,0.0

Out[57]: (31.590190917491448, array([ 37.91592254,  41.33713815,  48.27823577]))
```




```
In [20]: def testN(ndf,dat,dx=0.5):
             pred=stats.chi2(ndf).pdf(x[:len(dat)]+dx/2.)
             return sum((dat-pred*sum(dat)*dx)**2./(pred*sum(dat)*dx))
         testN(4,ok[0]),testN(6,ok[0])

Out[20]: (155.49945566272714, 149.73151462190449)
```

nulovou hypotézu (teor. křivka a histogram se neliší) nemůžeme zamítnout ani na *hladině spolehlivosti* 90%.

1.1.2 Kolgomorův test

sestavení distribuční funkce z N naměřených dat $S_N(X)$ = (počet měření80) má rozdělení

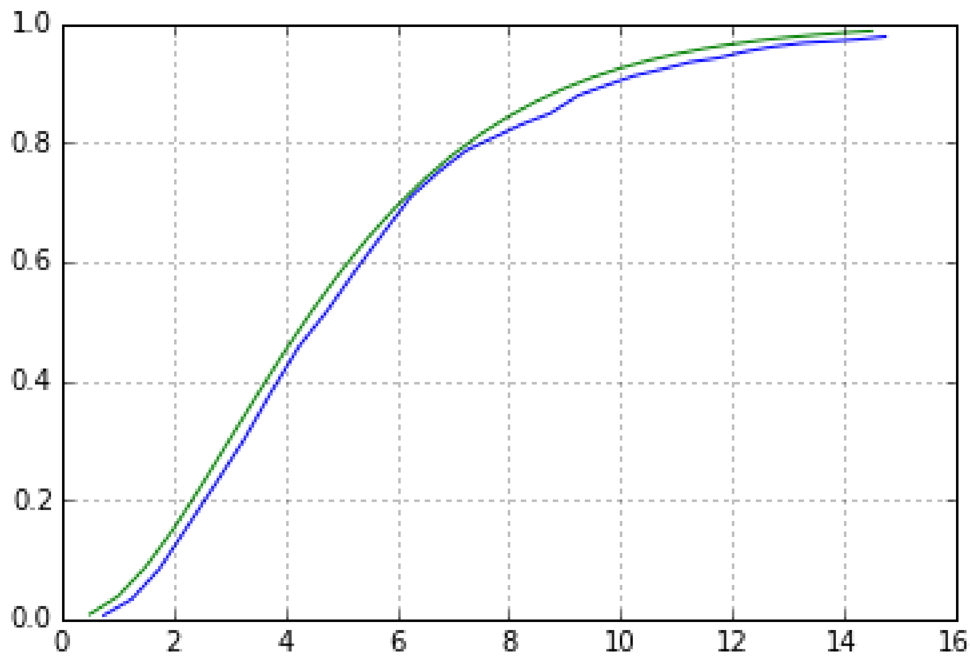
$$F_{Klg}(\sqrt{N}D_N) = 1 - 2\sum_{j}^{\infty}(-1)^{j-1}\exp(-2j^2ND_N^2)$$

H0 zamítáme s rizikem α, pokud vyšlo $\sqrt{N}D_N > z_\alpha$

α	z_α (Kolgomorov-Smirnovo rozdělení)
0.01	1.63
0.05	1.36
0.10	1.22

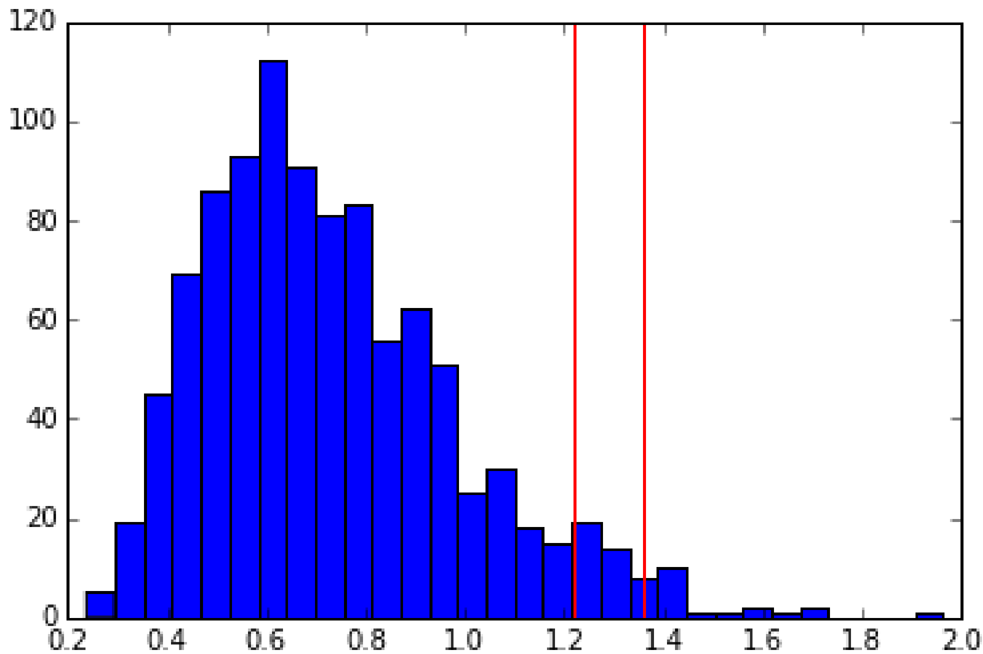
In [46]:
```
edf=np.cumsum(ok[0])
edf/=float(N)
pred=stats.chi2(5).cdf(x[1:])
pl.plot(x[1:]+0.25,edf,x[1:],pred)
pl.grid()
Dn=max(abs(edf-pred))
Dn,Dn*np.sqrt(N)
```

Out[46]: (0.020252210725574704, 0.64043113546507324)



In [48]:
```
multest=np.array([max(abs(np.cumsum(np.histogram(stats.chi2(5).rvs(N),x)[(
multest*=np.sqrt(N)
pl.hist(multest,30)
pl.axvline(1.22,color='r')
pl.axvline(1.36,color='r')
multest.mean(),multest.std()
```

Out[48]: (0.72901387077572011, 0.25713257574053389)




```
In [49]: sum(multest>1.22)/1000.,sum(multest>1.36)/1000.,
```

```
Out[49]: (0.056000000000000001, 0.021999999999999999)
```

2 Test homogenity

2.1 rovnost rozdělení 2 vzorků dat

2.1.1 Smirnovův test

srovnáváme empirické dist. funkce S_n, S_m: statistika $D_{nm} = \max \|S_n(x) - S_m(x)\|$ má asymptotické rozdělení jako v předchozím případě se $\sqrt{nm/(n+m)}D_{nm} < z_\alpha$

nebo jednostranné testy $D^{\pm}_{nm} = \max\{\pm(S_n(x) - S_m(x))\}$ má jednodušší rozdělení $K^{\pm}(z) = \lim P(\sqrt{nm/(n+m)}D^{\pm}_{nm} < z_\alpha) = 1 - \exp(-2z^2)$ pro $n \to \infty, m \to \infty$

úpravou vzniká

2.1.2 Wayneův test

$$W_{nm} = \sqrt{nm/(n+m)}\ \max\{\|S_n(x) - S_m(x)\|/S_m(x)\}$$

pro x splňující $S(x) \geq a$ (kde $a > 0$ je konstanta) má rozdělení

$$\lim P(W^{\pm}_{nm} < z_\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{z\sqrt{a/(1-a)}} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) dt$$

pro $z > 0$.

2.1.3 Wilcoxonův (-Mann-Whitney) test

2 vzorky spojíme, (n+m) čísel uspořádáme podle velikosti a určíme pořadí (pozice) čísel $x_1, .., x_n$ z první sady: jejich součet je T_n a výraz

$$U_0 = \frac{\frac{nm+n(n+1)}{2} - T_n}{\sqrt{\frac{nm}{12}(n+m+1)}}$$

má rozdělení N(0,1).

2.2 rovnost středních hodnot

předpokládáme normální rozdělení N(μ_x, σ_x^2), N(μ_y, σ_y^2)

hypotéza H0: $\mu_x = \mu_y$

2.2.1 Studentův test

testovací statistika

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\left((n-1)\widehat{\sigma_x^2}+(m-1)\widehat{\sigma_y^2}\right)(n+m)}{nm(n+m-2)}}}$$

kde $\bar{x} = \sum_i x_i/n$, $\widehat{\sigma_x^2} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$ (resp. pro *y* a *m*) má Studentovo rozdělení s *n+m-2* stupni volnosti.

Pozn.: Disperze rozdílu $\Delta = \bar{x} - \bar{y}$ je odhadnuta jako

$$\widehat{\sigma_\Delta^2} = \widehat{\sigma_{\bar{x}}^2} + \widehat{\sigma_{\bar{y}}^2} = \frac{n+m}{nm}\widehat{\sigma^2},$$

kde

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(n-1)\widehat{\sigma_x^2} + (m-1)\widehat{\sigma_y^2}}{n+m-2}$$

je společný odhad kombinující odhady disperze vzorků $\widehat{\sigma_x^2}$ a $\widehat{\sigma_y^2}$.

2.3 rovnost disperzí

2.3.1 Fischerův test

hypotéza H0: $\sigma_x = \sigma_y$

statistika $F = \widehat{\sigma_x^2}/\widehat{\sigma_y^2}$ (definice viz výše) má Fischer-Snedecorovo rozdělení $F_{n-1,m-1}$

In [7]:
```
from numpy import random
N,M=20,30
samp1=np.random.normal(3,1.,size=N)
samp2=np.random.normal(3,1.4,size=M)
sig1=sum((samp1-samp1.mean())**2)/(N-1)
sig2=sum((samp2-samp2.mean())**2)/(M-1)
sig1,sig2
```

```
Out[7]: (1.3693434492264385, 2.0942743714793242)

In [10]: stats.f(N-1,M-1).isf([0.1,0.05,0.025,0.01]),1/stats.f(M-1,N-1).ppf([0.1,0.

Out[10]: (array([ 1.68490635,  1.95814552,  2.23127383,  2.59874401]),
          array([ 1.68490635,  1.95814552,  2.23127383,  2.59874401]),
          0.65385102729361144)
```