

Poznámky k předmětu

Zpracování seismických dat

J. Havíř

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 2 |
| část A: Seismický signál jako vlnová funkce | 3 |
| I. Seismický signál jako funkce času (Vlnová funkce jako součet goniometrických funkcí; Fourierova řada; Konstanty Fourierovy řady; Komplexní tvar Fourierovy řady) | 4 |
| II. Seismický signál jako funkce frekvence (Fourierova transformace; Spektrum signálu - posunutí, rychlost a zrychlení) | 13 |
| III. Tvar seismického signálu (Ideální tvar seismické fáze; Funkce odezvy; Útlum; Spektrum přirozeného zemětřesení) | 24 |
| IV. Digitalizace a filtrace (Digitalizace signálu; Filtrace seismických dat; Nasazení seismické fáze) | 42 |
| část B: Seismický paprsek | 51 |
| V. Dráha seismického paprsku (Homogenní prostředí; Vrstevnatý model; Šíření signálu ve sférickém tělese Země) | 52 |
| VI. Azimut a inklinace seismického paprsku (Azimut a inklinace; Kmitání částic kontinua a směr seismického paprsku; Určení azimutu na základě polarizační analýzy P vlny; Inklinace seismického paprsku) | 64 |
| <i>připravuje se:</i> | |
| část C: Parametry seismického zdroje | |
| VII. Lokace seismického jevu | |
| VIII. Magnitudo | |
| IX. Seismický moment, energie a velikost porušené zóny | |
| X. Zdrojové mechanismy | |
| část D: Statistika seismických jevů | |
| XI. Statistika četnosti seismických jevů | |

Úvod

Kurz "Zpracování seismických dat" se zaměřuje na praktické ukázky základních prvků souvisejících se zpracováním dat v rámci seismologie. V těchto poznámkách jsou pak shrnuty základní principy probíraných témat a zadání na ně navazujících cvičení. Pro sestavení textu, včetně matematických vzorců, byly využity některé rozšířené učebnice a manuály (Bormann 2012; Havskov, Ottemöller 2010; Lay, Wallace 1995). Nebude-li v textu uvedeno jinak, půjde buď o obecně známé informace nebo o informace převzaté z právě zmíněných učebnic a manuálů.

část A: Seismický signál jako vlnová funkce

Seismický signál je vlnový signál, který se šíří horninovým prostředím prostřednictvím kmitání částic horninového kontinua. Lze jej tedy vyjádřit pomocí vlnové funkce. V této části se budeme věnovat některým základním charakteristikám seismického signálu jakožto vlnové funkce.

I. Seismický signál jako funkce času

I. a) Vlnová funkce jako součet goniometrických funkcí

Vyšetřujme nejprve seismickou vlnu pouze v jednom bodě horninového kontinua. A navíc si ji pro první představu zkusme vyjádřit nejjednodušším možným způsobem, tedy jako jednoduchou goniometrickou funkci udávající výchylku bodu kontinua $u(t)$ v závislosti na čase t (viz obr. I.1):

$$u(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \quad (\text{rovnice I.1})$$

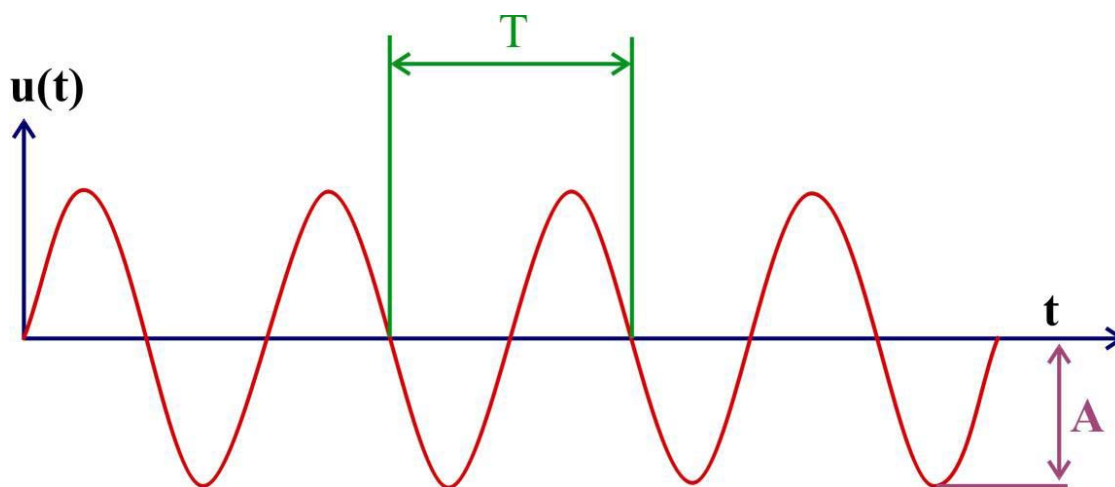
Ve skutečnosti je jakýkoliv seismický signál mnohem komplikovanější, než je možné vyjádřit jednoduchou sinusovkou. Komplikovanější signál získáme ovšem již jen prostým součtem více křivek funkce sinus o různých frekvencích (obr. I.1). Výsledkem takového součtu bude více či méně komplikovaná funkce, která však bude stále funkcí periodickou a její základní perioda bude odpovídat nejmenšímu společnému násobku period jednotlivých sinových funkcí figurujících v součtu. Zahrneme-li do součtu vedle funkcí sinus také funkce cosinus, můžeme navíc získat periodickou funkci, která bude fázově posunutá oproti základním sinovým a cosinovým funkcím figurujícím v součtu.

I. b) Fourierova řada

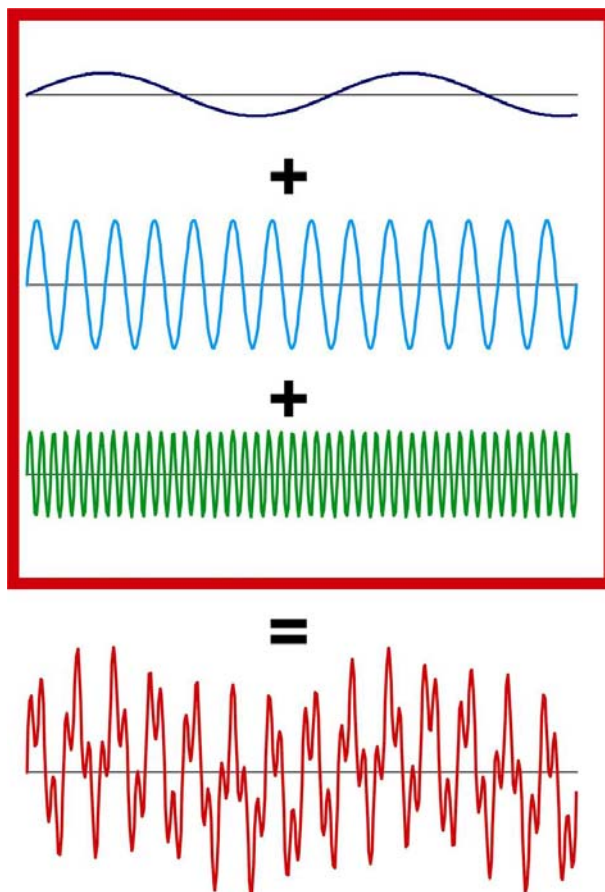
Spojitou funkci popisující reálný seismický signál si tedy můžeme vyjádřit pomocí nekonečného součtu více křivek funkcí sinus a cosinus o různých frekvencích:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi \cdot f \cdot n \cdot t) + b_n \sin(2\pi \cdot f \cdot n \cdot t)) \quad (\text{rovnice I.2})$$

kde $u(t)$ je výchylka bodu kontinua a a_0 , a_n a b_n jsou reálná čísla (konstanty popisující danou funkci). Součet definovaný rovnicí I.2 se nazývá **Fourierova řada**.



Obr. I.1: Schematické znázornění jednoduché vlnové funkce vyjadřující výchylku bodu u_0 v závislosti na čase t , ve formě jednoduché sinusovky o amplitudě A a periodě T (tj. o frekvenci $f = 1/T$).

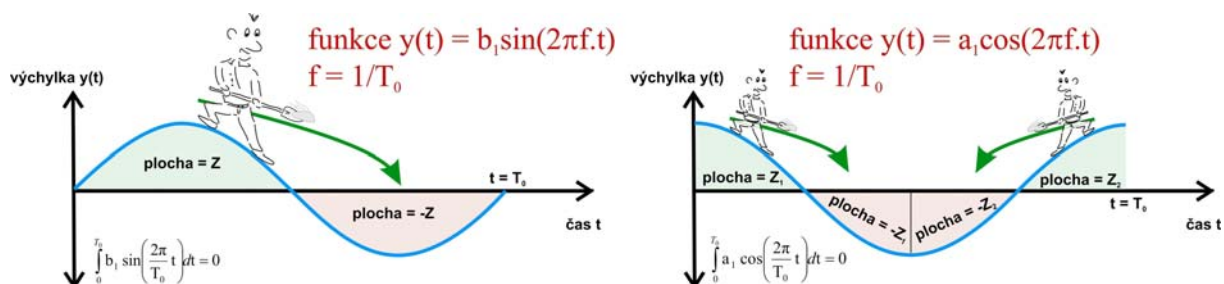


Obr. 1.2: Příklad součtu tří sinových funkcí o různých frekvencích ($u_1(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t)$; $u_2(t) = 30 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot t)$ a $u_3(t) = 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 23 \cdot t)$).

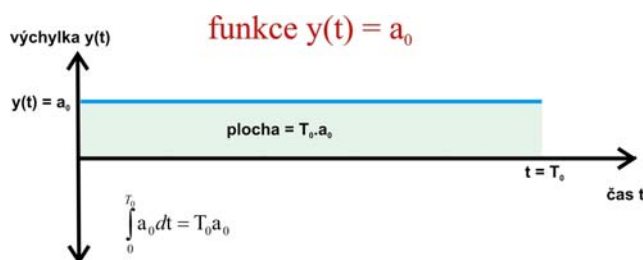
I. c) Konstanty Fourierovy řady

Konstanty a_0 , a_n a b_n si můžeme snadno obecně vyjádřit na základě jednoduchých grafických úvah. Postupujme ve svých úvahách takto:

Rozložíme-li vlnovou funkci $u(t)$ pro periodu T_0 (předpokládejme periodickou funkci se základní periodou T_0) do součtu funkcí sinus a cosinus a konstanty a_0 , můžeme sledovat plochu vymezenou křivkami jednotlivých členů. Přitom plocha vymezená křivkou libovolné spojité funkce $y(t)$ (kdy plochy nad horizontální souřadnou osou $y(t)=0$ mají kladnou hodnotu, pod touto osou pak zápornou hodnotu) odpovídá hodnotě určitého integrálu dané funkce.



Obr. 1.3: Schematické znázornění odvození velikosti určitého integrálu funkcí sinus o periodě T_0 (tj. $\sin(2\pi \cdot t/T_0)$) a cosinus o periodě T_0 (tj. $\cos(2\pi \cdot t/T_0)$) pro t od 0 do T_0 .



Obr. I.4: Schematické znázornění odvození velikosti určitého integrálu funkce $y(t)=a_0$ pro t jdoucí od 0 do T_0 .

Jak v případě funkce sinus s periodou T_0 , tak i v případě funkce cosinus s periodou T_0 , můžeme vidět, že sledujeme-li plochu pod křivkami v úseku t od 0 do T_0 , je velikost ploch na horizontální hlavní souřadnou osou rovna plochám pod horizontální hlavní souřadnou osou. Tedy celková velikost ploch pod danými křivkami je ve sledovaném úseku rovna nule, tj. hodnoty určitých integrálů daných funkcí pro t od 0 do T_0 jsou rovny nule (viz obr. I.3). Analogicky lze ukázat, že také hodnoty příslušných určitých integrálů (pro t od 0 do T_0) funkcí sinus a cosinus s periodami odpovídajícími celým násobkům T_0 jsou rovny nule. Pouze člen a_0 je graficky reprezentován křivkou odpovídající vodorovné přímce umístěné o hodnotu a_0 nad hlavní vodorovnou souřadnou osou, takže plocha vymezená touto křivkou odpovídá ploše obdélníku o stranách a_0 a T_0 (obr. I.4).

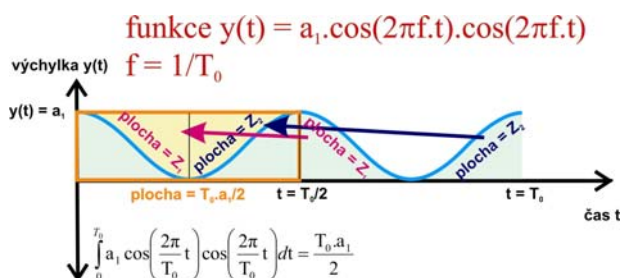
Hodnota určitého integrálu funkce $u(t)$ pro t jdoucí od 0 do T_0 je rovna součtu příslušných určitých integrálů jednotlivých složek zkoumané funkce. Právě jsme ale graficky ukázaly, že pouze určitý integrál pro složku odpovídající konstantě a_0 má nenulovou hodnotu (a to hodnotu odpovídající ploše obdélníku o stranách T_0 a a_0). Hodnoty určitých integrálů všech ostatních složek jsou nulové. Platí tedy, že hodnota určitého integrálu funkce $u(t)$ pro t jdoucí od 0 do T_0 je rovna součinu $T_0 \cdot a_0$, z čehož pro konstantu a_0 plyne:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) dt \quad (\text{rovnice I.3})$$

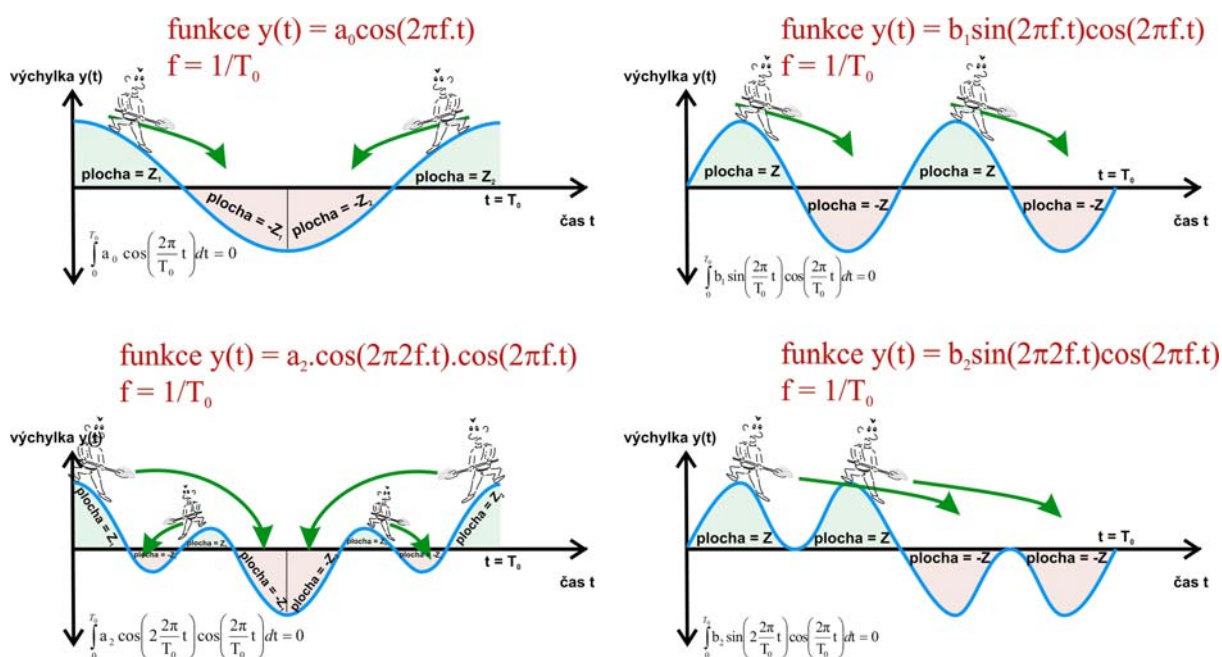
Dále v našich úvahách postupujeme tak, že vynásobíme vlnovou funkci $u(t)$ funkcí cosinus o periodě T_0 , a tuto funkci pak budeme opět vyšetřovat stejným způsobem, jako jsme to výše provedli s funkcí $u(t)$. Tedy, že prostudujeme hodnoty určitých integrálů pro jednotlivé složky Fourierovy řady, které jsou ovšem nyní všechny roznásobené funkcí $\cos(2\pi \cdot t/T_0)$. Snadno zjistíme, že jedinou složkou s nenulovou hodnotou určitého integrálu pro t jdoucí od 0 do T_0 je složka odpovídající (po roznásobení funkcí cosinus o periodě T_0) funkcí $y(t)=a_1 \cdot \cos(2\pi \cdot t/T_0) \cdot \cos(2\pi \cdot t/T_0)$, tj. složka reprezentující ve vlnové funkci $u(t)$ křivku funkce cosinus o periodě T_0 (obr. I.5). Hodnoty příslušných určitých integrálů všech zbývajících složek Fourierovy řady, roznásobených funkcí cosinus o periodě T_0 , jsou nulové (obr. I.6).

Opět využijeme faktu, že hodnota určitého integrálu funkce $u(t) \cdot \cos(2\pi \cdot t/T_0)$ pro t jdoucí od 0 do T_0 je rovna součtu příslušných určitých integrálů jednotlivých složek zkoumané funkce. Právě jsme ale graficky ukázaly, že pouze určitý integrál pro složku odpovídající konstantě a_1 má nenulovou hodnotu (a to hodnotu odpovídající ploše obdélníku o stranách $T_0/2$ a a_1 , jak ukazuje obrázek I.5). Hodnoty určitých integrálů všech ostatních složek jsou nulové. Platí tedy, že hodnota určitého integrálu funkce $u(t) \cdot \cos(2\pi \cdot t/T_0)$ pro t jdoucí od 0 do T_0 je rovna součinu $T_0 \cdot a_1/2$, z čehož pro konstantu a_1 plyne:

$$a_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt \quad (\text{rovnice I.4})$$



Obr. I.5: Schematické znázornění odvození velikosti určitého integrálu funkce $y(t) = a_1 \cdot \cos(2\pi t/T_0) \cdot \cos(2\pi t/T_0)$ pro t jdoucí od 0 do T_0 .



Obr. I.6: Schematické znázornění odvození velikosti určitého integrálu (počítaného pro t od 0 do T_0) čtyř složek Fourierovy řady po vynásobení funkcí cosinus o periodě T_0 (blíže viz text).

Analogicky bychom pak vyšetřením funkce $u(t)$ roznásobené funkcí sinus o periodě T_0 získali obdobný vztah pro konstantu b_1 :

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt \quad (\text{rovnice I.5})$$

A opakováním výše nastíněných úvah pro složky Fourierovy řady funkce $u(t)$ roznásobované postupně funkcemi sinus a cosinus o různých násobcích periody T_0 bychom pak získali odpovídající vztahy také pro všechny zbývající konstanty a_n a b_n .

Jestliže výše nastíněné úvahy zobecníme, můžeme si konstanty a_n a b_n , vyjadřující míru zastoupení křivek funkcí sinus a cosinus o příslušné periodě (či příslušné frekvenci) v celkové vlnové funkci $u(t)$, vyjádřit obecnými vztahy:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cos\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt \quad (\text{rovnice I.6})$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \sin\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt \quad (\text{rovnice I.7})$$

I. d) Komplexní tvar Fourierovy řady

Vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí ve smyslu rovnice I.2 je sice poměrně dobře srozumitelné (vzhledem k dobře srozumitelné analogii tvaru jednoduché sinusovky a vlnové funkce), což je nesporná výhoda, na druhé straně je zatíženo také nevýhodami. Jednou z nevýhod je existence dvou konstant (a_n a b_n), které sice informují o míře zastoupení sinusovky dané frekvence ve zkoumané vlnové funkci a o jejím fázovém posunu, ale tato informace není zcela transparentní a vyžaduje zohlednění obou konstant současně. Další nevýhodou je fakt, že s goniometrickými funkcemi se obecně hůře pracuje, než s některými jinými funkcemi. Naopak dobře lze obecně využít funkce exponenciální (zejména při derivaci a integraci).

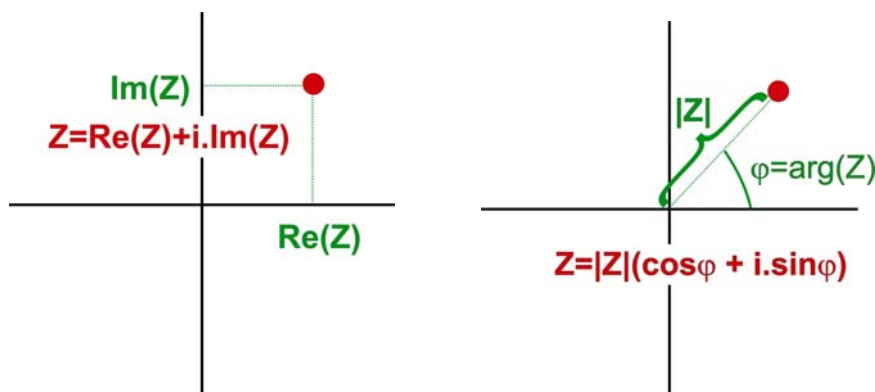
Může být proto výhodné vyjádřit si Fourierovu řadu ve formě exponenciální funkce. Toto vyjádření ovšem vyžaduje práci s komplexními čísly, což je komplikace, která by mohla být považována za velkou nevýhodu. Zkusme si ale přesto tuto problematiku stručně nastínit. Využití komplexních čísel se totiž může ukázat v tomto případě jako značně užitečné.

Vyjďeme z geometrického významu komplexního čísla a z tzv. Eulerovy věty:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (\text{rovnice I.8})$$

Uvědomíme-li si, že v našem vyjádření členů Fourierovy řady (viz rovnice I.2) odpovídá úhel φ výrazu $n \cdot 2\pi / T_0$, můžeme psát:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} &= \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) + i \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \\ e^{-i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} &= \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) - i \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \end{aligned} \quad (\text{rovnice I.9})$$



Obr. I.7: Schematické znázornění geometrického významu komplexních čísel. Komplexní číslo si lze vyjádřit jako bod v ploše, daný souřadnicemi, z nichž jedna má význam reálné a druhá imaginární složky komplexního čísla (viz obrázek vlevo). Současně lze pozici bodu (a tedy komplexní číslo) vyjádřit úhlem, který svírá spojnice bodu a středu souřadné soustavy s vodorovnou osou (tj. argumentem komplexního čísla) a vzdáleností mezi bodem a středem souřadné soustavy (tedy absolutní hodnotou komplexního čísla - viz obrázek vpravo). Toto vyjádření dobře ilustruje vztah mezi goniometrickými funkcemi a komplexními čísly, když si uvědomíme, že reálnou (respektive imaginární) složku komplexního čísla si lze vyjádřit jako kosinus (respektive sinus) argumentu komplexního čísla násobený absolutní hodnotou tohoto komplexního čísla.

Druhý ze vztahů rovnice I.9 získáme snadno prostě tím, že do prvního vztahu dosadíme namísto času t jeho zápornou hodnotu $-t$ a uvědomíme si symetrie funkcí sinus a cosinus. Nyní si vhodným součtem můžeme vyjádřit goniometrické funkce sinus a cosinus jako komplexní exponenciální funkce ve tvaru:

$$\begin{aligned}\cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} + e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t}\right) \\ \sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} - e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t}\right)\end{aligned}\tag{rovnice I.10}$$

A po dosazení do rovnice I.2 získáme:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} + e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} - e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t} \right) \right]\tag{rovnice I.11}$$

Tento výraz nám ještě nestačí, protože jsme se sice zbavili goniometrických funkcí, ale získali jsme jen zbytečně složité komplexní vyjádření, v němž přetrvává stále řada nevýhod. Rovnici I.11 lze ale ještě dále upravit a zjednodušit. Nejprve si ji můžeme upravit do tvaru:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - i.b_n)e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} + \frac{1}{2}(a_n + i.b_n)e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t} \right]\tag{rovnice I.12}$$

Z dané formy se přímo nabízí zavedení nových koeficientů A_n a B_n :

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{2}(a_n - i.b_n) \\ B_n &= \frac{1}{2}(a_n + i.b_n)\end{aligned}\tag{rovnice I.13}$$

A komplexní tvar Fourierovy řady pak můžeme přepsat:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{i.n\frac{2\pi}{T_0}t} + B_n e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t} \right]\tag{rovnice I.14}$$

Abychom se hnuli dál, potřebujeme se blíže podívat na vyjádření konstant A_n a B_n v rovnici I.13. dosadíme-li za a_n a b_n výraz z rovnice I.6 a I.7, tak pro A_n dostaneme:

$$A_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \cos\left(n\frac{2\pi.t}{T_0}\right) dt - i \cdot \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \sin\left(n\frac{2\pi.t}{T_0}\right) dt \right)\tag{rovnice I.15}$$

Což po úpravě a aplikaci Eulerových vztahů podle rovnice I.9 vede k tvaru:

$$A_n = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{-i.n\frac{2\pi}{T_0}t} dt\tag{rovnice I.16}$$

Podobně pak lze odvodit pro B_n :

$$B_n = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} dt \quad (\text{rovnice I.17})$$

Přitom pokud rozšíříme definiční obor indexu n také na záporná čísla, můžeme ukázat, že:

$$A_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{-i \cdot (-n) \frac{2\pi}{T_0} t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} dt = B_n \quad (\text{rovnice I.18})$$

A současně pro $n = 0$ vzhledem k rovnici I.3 platí:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{-i \cdot 0 \frac{2\pi}{T_0} t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot dt = a_0 \quad (\text{rovnice I.19})$$

V komplexním tvaru si tedy můžeme všechny konstanty (a_0 , A_n a B_n) vyjádřit jedinou konstantou jednoduše pouhým rozšířením indexu n na obor všech reálných čísel. Označíme-li zmíněnou jedinou konstantu jako C_n , můžeme psát:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} \quad (\text{rovnice I.20})$$

Přičemž členy s $n = 0$ odpovídají konstantě a_0 , členy s kladnými indexy n odpovídají členům násobeným v rovnici I.14 konstantou A_n a členy se zápornými indexy n pak odpovídají členům násobeným v rovnici I.14 konstantou B_n . Konstantu C_n si pak můžeme vyjádřit obecně jako:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) \cdot e^{-i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} dt \quad (\text{rovnice I.21})$$

Konstanta C_n je tedy komplexní číslo, které má svůj argument a svou absolutní velikost. Proto může jediná konstanta pro každou frekvenci v sobě zahrnovat jak informaci o míře zastoupení dané frekvence v celkové vlnové funkci $u(t)$, tak i její fázový posun.

Příklad 1: Skládání vlnových funkcí

- Využijte excelovský soubor skladani.xls, list "sinusovky"
- Zvolte následující sinusovky a složte z nich signál
- Odpovězte na otázky:

a)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 1 | 20 |
| křivka 2 | 2 | 20 |

Jaká je základní frekvence signálu?

b)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.2 | 15 |
| křivka 2 | 0.4 | 15 |
| křivka 3 | 0.6 | 15 |

Jaká je základní frekvence signálu?

c)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.2 | -15 |
| křivka 2 | 0.4 | -15 |
| křivka 3 | 0.6 | -15 |

Jaká je základní frekvence signálu? Jak se změnil signál vzhledem k signálu v bodě b)?

d)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.2 | 10 |
| křivka 4 | 0.2 | 10 |

Jaká je základní frekvence signálu? Jak se liší signál složené funkce oproti křivkám 1 a 4?

e)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.2 | 10 |
| křivka 4 | 0.2 | 30 |

Jaká je základní frekvence signálu? Jak se liší signál složené funkce oproti křivkám 1 a 4?

f)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.3 | 2 |
| křivka 2 | 0.6 | 8 |
| křivka 3 | 0.9 | 5 |
| křivka 4 | 1.2 | 8 |
| křivka 5 | 1.5 | 8 |

Jaká je základní frekvence signálu?

g)

| | frekvence | amplituda |
|----------|-----------|-----------|
| křivka 1 | 0.4 | 2 |
| křivka 2 | 0.8 | 2 |
| křivka 3 | 1.2 | 2 |
| křivka 4 | 1.6 | 2 |
| křivka 5 | 2.0 | 2 |

Jaká je základní frekvence signálu?

Upravíme signál tak, že místo sinusovky s frekvencí 1.2 Hz vložíme sinusovku s frekvencí 1.0 Hz.

Jaká je nyní základní frekvence signálu?

Znovu upravíme signál tak, že místo sinusovky s frekvencí 1.0 Hz vložíme sinusovku s frekvencí 0.9 Hz.

Jaká je nyní základní frekvence signálu?

Příklad 2: Odvození konstant a_0 , a_n a b_n Fourierovy řady

- Využijte excelovský soubor skladani.xls, listy "integrace" (list připravený pro výpočty konstant Fourierovy řady) a "data" (list se vstupními daty vlnových funkcí $u(t)$).
- Na listu "data" vyberte příslušný sloupec vstupních dat (vstupní datové soubory A až G, ve sloupečku "time" jsou vždy příslušné hodnoty času t v sekundách, ve sloupečku "data" jsou odpovídající amplitudy vlnové funkce $u(t)$).
- Vybraný sloupec vstupních dat vložte do odpovídajících sloupců na listu "integrace".
- V grafu "složená funkce" uvidíte tvar vybrané vlnové funkce $u(t)$. Určete její základní periodu T_0 a vložte ji do buňky L4.
- V buňce M1 měňte násobky "n" reprezentující násobky základní frekvence funkce $u(t)$ a tedy indexy konstant a_n a b_n Fourierovy řady. Na grafech " $\cos(N \cdot 2\pi f)$ " (respektive " $\sin(N \cdot 2\pi f)$ ") uvidíte tvar vlnové funkce po vynásobení funkcí $\cos(n \cdot 2\pi \cdot t / T_0)$ (respektive funkcí $\sin(n \cdot 2\pi \cdot t / T_0)$).
- V buňce L7 naleznete hodnotu konstanty a_0 určenou na základě integrace funkce $u(t)$ ze vzorce I.3
- V buňce L10 naleznete hodnotu konstanty a_n určenou na základě integrace funkce $u(t) \cdot \cos(n \cdot 2\pi \cdot t / T_0)$ ze vzorce I.6, v buňce L13 naleznete hodnotu konstanty b_n určenou na základě integrace funkce $u(t) \cdot \sin(n \cdot 2\pi \cdot t / T_0)$ ze vzorce I.7.
- Odpovězte na otázky:

a) Zvolte na listu data funkci "A".

Jaké jsou hodnoty konstant a_0 , a_n a b_n ($n = 1$ až 6) Fourierovy řady?

b) Zvolte na listu data funkci "B".

Jaké jsou hodnoty konstant a_0 , a_n a b_n ($n = 1$ až 6) Fourierovy řady?

c) Zvolte na listu data funkci "C".

Jaké jsou hodnoty konstant a_0 , a_n a b_n ($n = 1$ až 6) Fourierovy řady?

Jak se liší vlnová funkce v zadání "C" od vlnové funkce v zadání "B"?

d) Zvolte na listu data funkci "D".

Jaké jsou hodnoty konstant a_0 , a_n a b_n ($n = 1$ až 6) Fourierovy řady?

Otázka pro zápočet:

- zvolte si jedno ze zadání „E“ až "G" na listu "data".

Jaké jsou hodnoty konstant a_0 , a_n a b_n ($n = 1$ až 6) Fourierovy řady?

Postup:

Postup k zápočtu je shodný s postupem aplikovaným v částech a) až d) tohoto příkladu.

Odpověď:

označení zvoleného příkladu:

konstanty a_0 , a_n a b_n Fourierovy řady odpovídající zvolené vlnové funkci jsou:

a_0

a_1

a_2

a_3

b_1

b_2

b_3

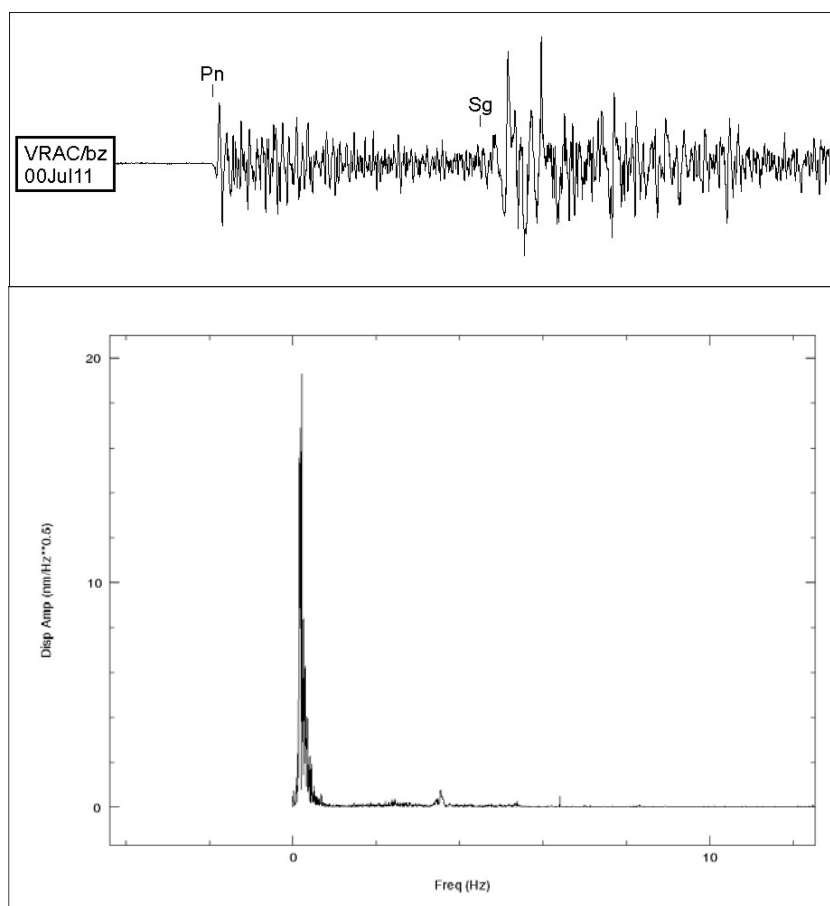
II. Seismický signál jako funkce frekvence

II. a) Fourierova transformace

Fourierova řada popsaná rovnicí I.2 (goniometrický tvar), nebo popřípadě rovnicí I.20 (komplexní tvar), popisuje zastoupení jednoduchých sinusovek o frekvenci $n \cdot f$ v celkové vlnové funkci $u(t)$. V určitém časovém okně si tedy můžeme vlnovou funkci vyjádřit nejen jako velikost amplitudy u v závislosti na čase t , tedy jako funkci $u(t)$ ale také jako velikost amplitudy U v závislosti na frekvenci f , tedy jako funkci $U(f)$. Taková funkce by nám právě nejnázorněji poskytla informaci o tom, v jaké míře se v daném časovém okně na výsledném signálu podílejí jaké frekvence (obr. II.1). Matematická operace převádějící funkci $u(t)$ popisující signál vyjádřený v závislosti na čase na funkci $U(f)$ popisující signál vyjádřený v závislosti na frekvenci se nazývá **Fourierova transformace**.

Nejsnáze si matematický princip Fourierovy transformace představíme, když vyjdeme z komplexního tvaru Fourierovy řady (rovnice I.20) a z vyjádření koeficientu C_n (rovnice I.21). Pouze si vybrané časové okno, ve kterém vyšetřujeme vlnovou funkci $u(t)$, posuňme o polovinu základní periody T_0 v tom smyslu, že nyní nebudeme počítat její koeficienty (a tedy hledat velikosti určitých integrálů - viz kapitoly I.c a I.d) v časech od 0 do T_0 , ale v časech od $-T_0/2$ do $T_0/2$. Vztah pro C_n (rovnice I.21) pak získá tvar:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T_0} t} dt \quad (\text{rovnice II.1})$$



Obr. II.1: Ukázka seismického signálu zobrazeného jako amplituda výchylky v závislosti na čase (nahore) a jeho amplitudové spektrum, kde je amplituda signálu zobrazena v závislosti na frekvenci (dole).

Dosaďme tedy do vztahu I.20 komplexní výraz pro koeficientu C_n (rovnici II.1). Tímto získáme vztah:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} dt \right] e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} \quad (\text{rovnice II.2})$$

Stanovíme-li, že perioda T_0 se blíží k nekonečnu, můžeme tuto skutečnost vyjádřit za pomoci limity:

$$u(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} dt \right] e^{i \cdot n \frac{2\pi}{T_0} t} \quad (\text{rovnice II.3})$$

Matematicky zdatnějším čtenářům se na tomto místě musím omluvit, protože další část textu pro ně bude patrně zbytečně zdouhavá, triviální a nezáživná. Ten, komu je rovnice II.3 zcela jasná, může patrně nejbližších několik odstavců směle přeskočit. My ostatní si pak vztah II.3 rozebereme poněkud blíže, abychom si ujasnili, jak mu rozumět.

Nejprve si všimněme, že ve výrazu máme exponenciální funkce, v jejichž exponentech nám vystupuje zlomek n/T_0 . Tento zlomek má význam frekvence f jednotlivých sinusovek v součtu Fourierovy řady. Jestliže $n = 1$, pak to znamená, že se nám daná sinusovka do základní periody T_0 vešla právě jednou, tudíž měla periodu T_0 a frekvenci $1/T_0$. Položili-li jsme $n = 2$, znamenalo to, že se nám daná sinusovka vešla do základní periody T_0 právě dvakrát, tudíž měla periodu $T_0/2$ a frekvenci $2/T_0$. Takhle může pokračovat pro libovolná n , z čehož vidíme, že konkrétní hodnota n určuje sinusovky o periodě T_0/n a frekvenci n/T_0 . Tedy zlomek n/T_0 můžeme v rovnici II.3 (vždy v exponentech exponenciálních funkcí) nahradit frekvencí f :

$$u(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \right] e^{i \cdot 2\pi f t} \quad (\text{rovnice II.4})$$

Dále si ve vztahu (nyní rovnice II.4) všimněme sumy prvků pro všechna n jdoucí od minus nekonečna do plus nekonečna a zlomku $1/T_0$, který figuruje bezprostředně za vyjádřením sumy. Zlomek $1/T_0$ si můžeme přepsat jako rozdíl:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{n+1}{T_0} - \frac{n}{T_0} \quad (\text{rovnice II.5})$$

Zlomek $1/T_0$ má tedy význam elementu frekvence Δf , který je daný rozdílem frekvence odpovídající indexu $(n+1)$ a frekvence odpovídající indexu n . Současně sám index n , jak jsme ukázali před chvílí, má význam frekvence (odpovídá součinu frekvence a základní periody T_0).

Sumu prvků pro všechna n jdoucí od minus nekonečna do plus nekonečna si tedy můžeme znázornit jako sumu ploch obdélníků, kde jedna strana má velikost elementu frekvence Δf a druhá strana má velikost funkční hodnoty výrazu $X(f)$ následujícího ve vztahu II.4 za zlomkem $1/T_0$:

$$X(f) = \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \right] e^{i \cdot 2\pi f t} \quad (\text{rovnice II.6})$$

Máme tu tedy sumu typu $\sum X(f)\Delta f$. Taková suma se označuje jako Riemannova suma. Jedná se vlastně o součet obdélníků o šířce Δf ohraničených funkcí $X(f)$, je to tedy veličina blízká se ploše vymezené křivkou $X(f)$ a pro element Δf jdoucí k nule (což platí v našem případě právě tehdy, jestliže T_0 jde k nekonečnu, což zrovna předpokládáme) se této ploše přímo rovná. Z kapitoly I. již víme, že plocha vymezená křivkou $X(f)$ odpovídá určitému integrálu funkce $X(f)$ integrovanému podle elementu frekvence df . Tedy, jak vidíme, námi vyšetřovaná suma prvků pro všechna n jdoucí od minus nekonečna do plus nekonečna odpovídá určitému integrálu, jehož meze se pohybují rovněž od minus nekonečna do plus nekonečna. Můžeme tedy psát:

$$u(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \right] e^{i \cdot 2\pi f t} df \quad (\text{rovnice II.7})$$

Nyní již nám zbývá poze všimnout si integrálu uvnitř hranaté závorky, respektive jeho mezí. Tyto meze jdou od $-T_0/2$ do $T_0/2$, pokud ovšem jde základní perioda T_0 od minus nekonečna do plus nekonečna, tak také její poloviny jdou od minus nekonečna do nekonečna. Můžeme tedy psát (limitu už psát nemusíme, protože ve výrazu již žádné T_0 nemáme):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \right] e^{i \cdot 2\pi f t} df \quad (\text{rovnice II.8})$$

Nyní se zaměříme na výraz v hranaté závorce. Vystupuje v něm výchylka $u(t)$, která je pro konkrétní čas t nějakým konkrétním reálným číslem. Dále je tam exponenciální funkce, která je komplexní a v jejímž exponentu vystupuje čas t a frekvence f . Pro konkrétní čas t a konkrétní frekvenci f je výsledkem zmíněné exponenciální funkce konkrétní komplexní číslo. Nenechme se rozladit skutečností, že jde o komplexní veličinu, vezměme nyní pouze v potaz to, že jde o funkci, která je závislá na čase t a frekvenci f . Tedy také součin diskutované exponenciální funkce s vlnovou funkcí $u(t)$ je pak obecně nějakou funkcí závislou na čase t a frekvenci f .

My ovšem pak dále zmíněný součin integrujeme podle času t , který jde od minus nekonečna do plus nekonečna. Máme tu tedy jakési fixní časové okno, v tomto případě nekonečné, ve kterém určujeme plochu pod křivkou danou součinem diskutované exponenciální funkce a vlnové funkce $u(t)$. Velikost této plochy tedy není závislá na nějaké volbě konkrétního času t , protože je počítána vždy pro všechna t (od minus nekonečna do plus nekonečna). I když tedy součin diskutované exponenciální funkce a vlnové funkce $u(t)$ je sám o sobě funkcí závislou na čase, integrál daného součinu pro t od minus nekonečna do nekonečna již na čase t nezávisí.

Ovšem exponenciální funkce, a tedy také součin diskutované exponenciální funkce a vlnové funkce $u(t)$, jsou závislé na frekvenci f . A tato závislost tu zůstává také po integraci pro čas od minus nekonečna do plus nekonečna. Pro různé frekvence získáme různé křivky reprezentující součin exponenciální funkce a vlnové funkce $u(t)$, a tedy pro různé frekvence budou tyto křivky vymezovat různě velké plochy.

Z diskuse nám tedy vyplývá, že výraz figurující v rovnici II.8 v hranaté závorce je funkcí, která závisí na frekvenci f a nezávisí na čase t . Můžeme si jej označit jako $U(f)$. Pak nám z rovnice II.8 vyplývají vztahy:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i \cdot 2\pi f t} dt \quad (\text{rovnice II.9})$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i \cdot 2\pi f t} df \quad (\text{rovnice II.10})$$

Rovnice II.9 nám tedy říká, jak z funkce $u(t)$ popisující amplitudu výchylky v závislosti na čase získáme funkci $U(f)$ popisující amplitudu v závislosti na frekvenci. Tento převod odpovídá Fourierově transformaci.

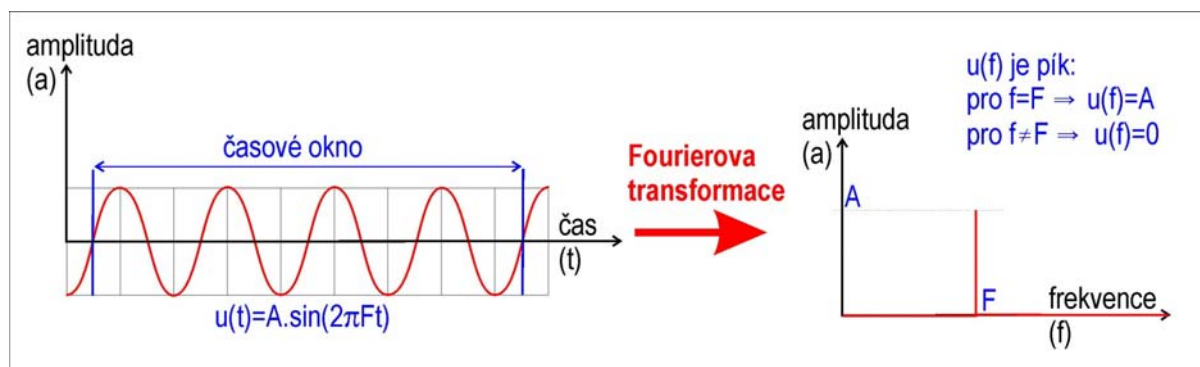
Rovnice II.10 nám pak říká, jak z funkce $U(f)$ popisující amplitudu v závislosti na frekvenci získáme funkci $u(t)$ popisující amplitudu v závislosti na čase. Tento převod odpovídá zpětné Fourierově transformaci.

Fourierova transformace nás vede ke komplexnímu vyjádření funkce $U(f)$. Jak bylo zmíněno již na konci kapitoly I, komplexní číslo nás může informovat o dvou charakteristikách současně, a to o míře zastoupení dané frekvence v celkové vlnové funkci $u(t)$ a o jejím fázovém posunu. Fázovým posunem se ovšem v dalším výkladu zabývat nebudeme. Pro účely našeho dalšího výkladu nás tak z celé komplexní veličiny zajímá pouze její velikost $|U(f)|$, která popisuje tzv. amplitudové spektrum (obr. II.1).

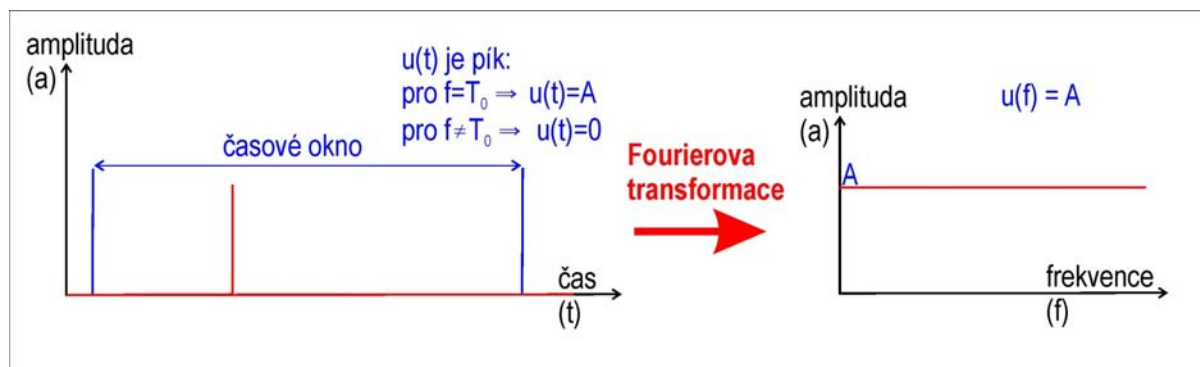
Problematiku Fourierovy transformace a amplitudového spektra si můžeme názorně ukázat na dvou speciálních případech.

Prvním příkladem je funkce $u(t)$ charakterizovaná jednoduchou sinusovkou (obr. II.2). V tomto případě je funkce popsána jednou konkrétní hodnotou frekvence F a jednou konkrétní hodnotou amplitudy A . Její frekvenční popis je tedy funkce, která má nenulovou hodnotu pouze v bodě o frekvenci F , všude jinde je nulová (tzv. impuls neboli pík).

Druhým příkladem je funkce $u(t)$ charakterizovaná naopak impulsem (píkem). Lze ukázat, že také impuls (pík) lze popsat jako součet sinusoidových křivek. V tomto případě potřebujeme sčítat nekonečně mnoho křivek (musíme použít všechny možné frekvence) a že amplituda všech jednotlivých křivek je stejná (v píku jsou obsaženy stejnou měrou všechny frekvence, viz obr. II.3).



Obr. II.2: Fourierova transformace jednoduché sinusovky. Funkce $u(t)$ znázorňující výchylku v závislosti na čase obsahuje pouze jedinou frekvenci F . Amplitudové spektrum proto ukazuje nenulovou hodnotu pouze pro frekvenci F .



Obr. II.3: Fourierova transformace impulsu (píku). Funkce $u(t)$ znázorňující výchylku v závislosti na čase obsahuje stejnou měrou všechny frekvence. Amplitudové spektrum proto ukazuje pro všechny frekvence stejnou hodnotu.

II. b) Spektrum signálu - posunutí, rychlost a zrychlení

Dosud jsme ohledně amplitudy signálu buď mluvili jako o výchylce (a tedy jsme tiše předpokládali, že jde o posunutí bodu horninového kontinua) a nebo jsme veličinu amplitudy blíže neupřesnili. V této části bychom se proto měli na tuto problematiku podívat trochu blíže.

Seismický záznam může zachycovat kmitání části kontinua ve smyslu:

- posunutí polohy částice
- rychlosti posunutí polohy částice
- zrychlení posunutí polohy částice

Všechny tři typy signálu jsou charakterizovány nějakou vlnovou funkcí, ať již vyjádřenou v závislosti na čase (funkce $u(t)$) nebo na frekvenci (funkce $U(f)$). Všechny tři typy signálu se v rámci seismologie běžně používají či používaly. Signál s amplitudou charakterizující posunutí byl běžným signálem zaznamenávaným prvními mechanickými seismometry. Elektromagnetické seismometry běžně poskytují jako svůj primární výstup signál s amplitudou charakterizující rychlost posunutí. Je to z toho důvodu, že při převodu kmitavého pohybu na elektromagnetické vlny pomocí principu cívky s kmitajícím jádrem jsou kmity elektromagnetického signálu úměrné rychlosti pohybu jádra (nikoli posunutí jádra). Rovněž signál s amplitudou vyjadřující zrychlení posunutí mají široké využití, např. při měření signálu silných otřesů v blízkosti epicentra pomocí akcelerometrů.

Všechny tři typy signálu lze matematicky relativně snadno převádět jeden na druhý za pomoci derivace či integrace signálu. Je zapotřebí si uvědomit, že rychlost je derivací posunutí podle času, a že zrychlení je derivací rychlosti podle času. Co to znamená pro jednoduchou sinusovku?

Označíme-li si $u(t)$ jako posunutí v závislosti na čase a vyjádříme-li si ho jednoduchou sinusovkou, můžeme použít rovnici I.1 - pro větší přehlednost si ji tu přepíšeme jako rovnici II.11:

$$u(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \quad (\text{rovnice II.11})$$

Necht' je pak funkce $v(t)$ odpovídající funkci s amplitudou vyjadřující rychlost posunutí částice kontinua. Tedy musí platit:

$$v(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t} \quad (\text{rovnice II.12})$$

Tahle rovnice znamená, že funkce $v(t)$ je derivací funkce $u(t)$ podle času t , ostatní veličiny vystupující ve funkci $u(t)$ (například frekvence f či amplituda A) jsou pro účely tohoto derivování brány jako konstanty. Derivací rovnice II.11 tedy získáme:

$$v(t) = 2\pi f A \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \quad (\text{rovnice II.13})$$

Stejným způsobem si můžeme vyjádřit funkci, označme si ji jako $s(t)$, kde amplitudy vyjadřují zrychlení posunutí části kontinua. Platí:

$$s(t) = \frac{\partial v(t)}{\partial t} \quad (\text{rovnice II.14})$$

A proto:

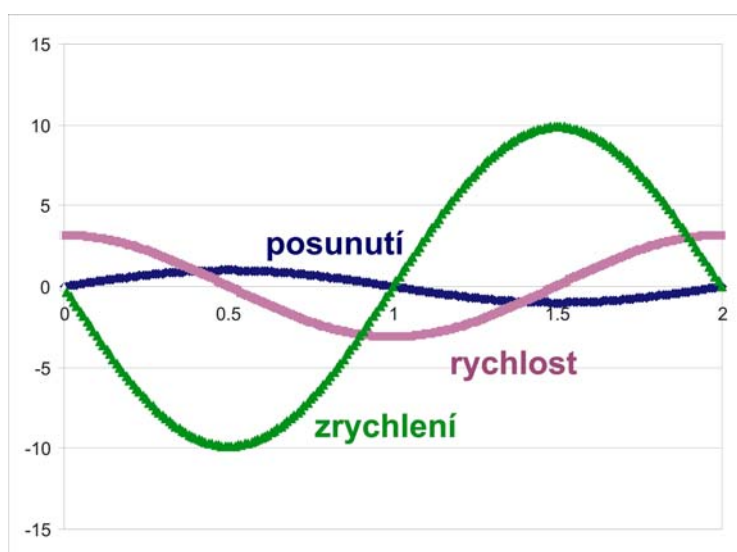
$$s(t) = -(2\pi f)^2 A \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \quad (\text{rovnice II.15})$$

Z rovnic II.11, II.13 a II.15 vidíme, že frekvence sinusovky se nezměnila, ať již vyjadřovala posunutí, rychlost nebo zrychlení. Vždy se jednalo o funkci sinus nebo cosinus z výrazu $2\pi f t$. Nicméně jestliže budeme předpokládat, že amplituda posunutí A byla kladná (viz obr. II.4), pak z rovnice II.11 plyne, že výchylka posunutí $u(t)$ v čase $t = (1/4f)$, tedy ve čtvrtině periody, je kladná (a současně maximální možná, rovna amplitudě A), zatímco z rovnice II.15 plyne, že výchylka

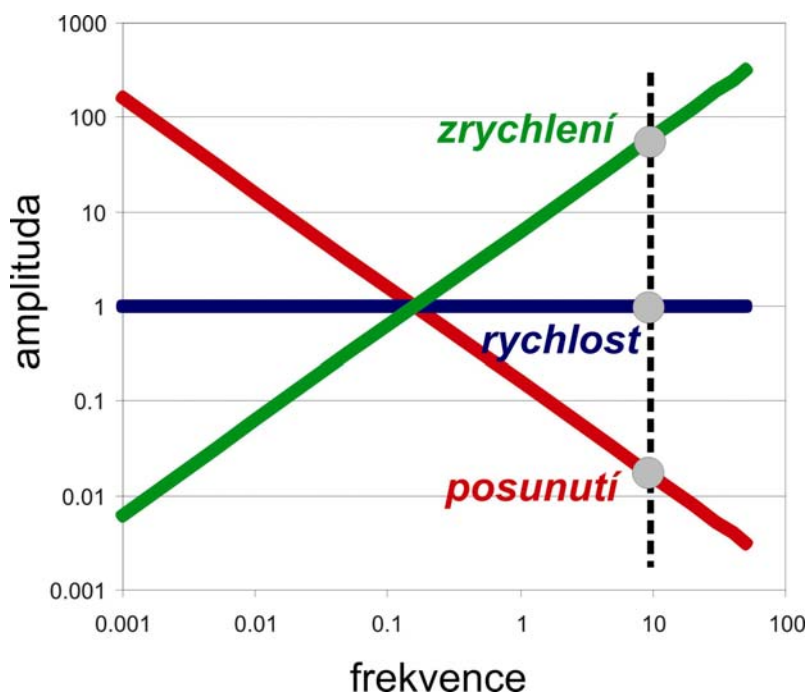
zrychlení $s(t)$ v témže čase je záporná (a současně minimální možná). Pro výchylku rychlosti $v(t)$ v diskutovaném čase $t = (1/4f)$ pak současně platí, že je rovna nule (protože je úměrná funkci cosinus). Vidíme tedy, že křivky goniometrických funkcí vyjadřujících vlnové funkce $u(t)$ pro posunutí, $v(t)$ pro rychlost a $s(t)$ pro zrychlení mají sice stále stejnou frekvenci, ale jsou fázově posunuté.

I s tou frekvencí signálu ovšem není všechno ještě tak jednoduché, jak by se mohlo zdát při pohledu na frekvenci vlnových funkcí vyjádřených jednou jednoduchou sinusovkou. Podívejme se totiž ještě na amplitudy těchto funkcí. Amplituda posunutí $u(t)$ je předem dána vstupními předpoklady, byla definována jako amplituda A . Když se ale podíváme na odpovídající vztah pro rychlost $v(t)$ (rovnice II.13), vidíme, že amplituda rychlosti je dána výrazem $2\pi fA$. Podobně v případě zrychlení $s(t)$ (rovnice II.15) je amplituda dána výrazem $-(2\pi f)^2 A$. Budeme-li tedy brát amplitudu A posunutí $u(t)$ jako výchozí, pak odpovídající amplitudy funkcí vyjadřujících rychlost a zrychlení jsou frekvenčně závislé. Amplituda rychlosti $v(t)$ je přímo úměrná frekvenci f , amplituda zrychlení $s(t)$ je přímo úměrná dokonce druhé mocnině frekvence f .

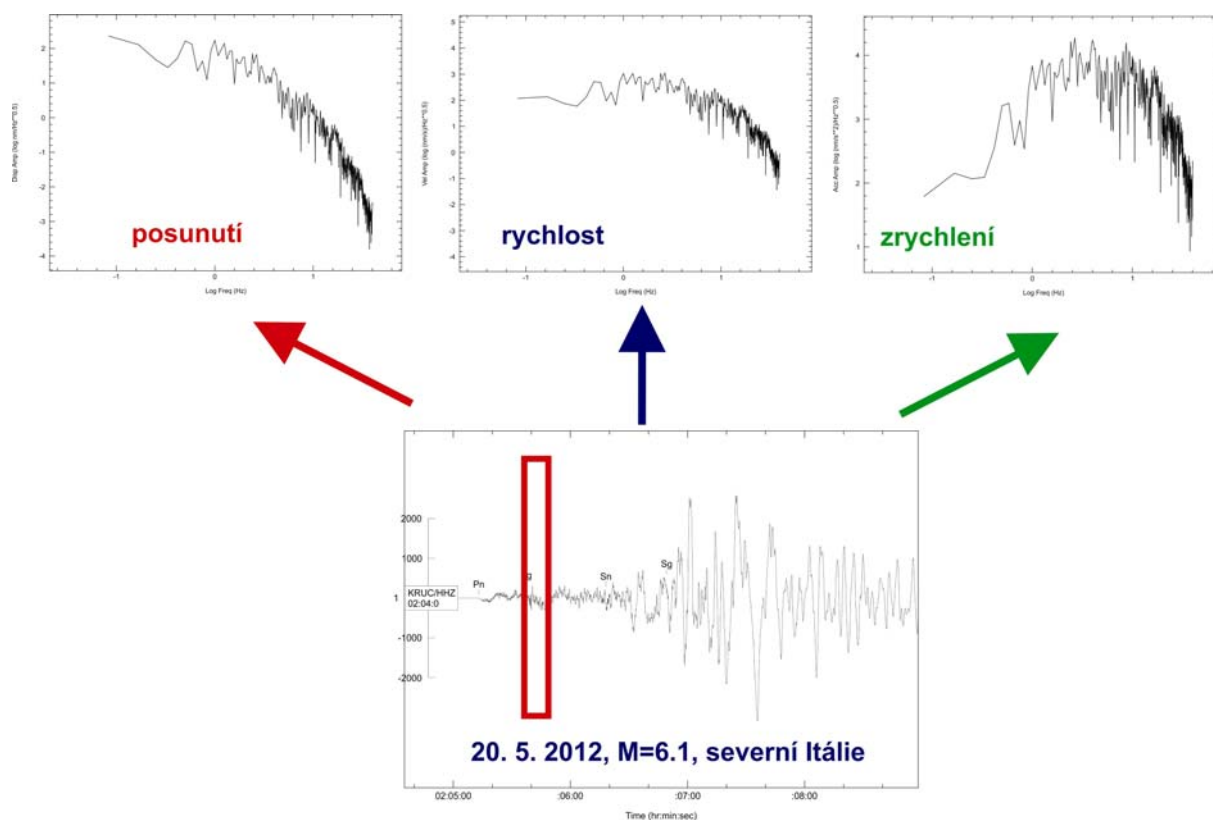
Co to znamená v případě, že signál $u(t)$ nebude jen jednoduchá sinusovka, ale že půjde o složenou funkci vyjádřenou Fourierovou řadou (rovnice I.2) a obsahující tedy více frekvencí. Pokud pak budeme převádět signál posunutí $u(t)$ na rychlost $v(t)$ či na zrychlení $s(t)$, nutně zjistíme, že s rostoucí frekvencí členů Fourierovy řady roste jejich amplituda po převodu na rychlost či zrychlení. Popřípadě, že s klesající frekvencí členů Fourierovy řady amplituda po převodu na rychlost či zrychlení klesá (obr. II.5). To ovšem jinými slovy znamená, že vyšší frekvence signálu jsou převodem na rychlost, a pak i dále ještě na zrychlení, zesilovány, zatímco nižší frekvence jsou tímto převodem (z posunutí na rychlost a z rychlosti na posunutí) potlačovány. Platí to pochopitelně i obráceně. Můžeme samozřejmě převádět signál ze zrychlení na rychlost a z rychlosti na posunutí. Jestliže jsme rychlost z posunutí získali derivací, pak obrácený převod je pochopitelně realizován integrací. Integrací vlnové funkce $s(t)$ vyjadřující zrychlení tedy získáme funkci rychlosti $v(t)$, další integrací pak dále funkci posunutí $u(t)$. A při tomto převodu musí být zachovány vztahy, které jsme si ukázaly před chvílí. Tedy převodem ze zrychlení na rychlost (popřípadě z rychlosti na posunutí) jsou vyšší frekvence signálu potlačovány a nižší frekvence signálu zesilovány. Výsledkem tedy je, že signál posunutí bude nejvíce ovlivněn členy s nízkými frekvencemi, zatímco odpovídající signál zrychlení bude nejvíce ovlivněn vysokými frekvencemi obsaženými v signálu. A tedy, přestože pro jednoduchou sinusovku platí, že se převodem z posunutí na rychlost či zrychlení její frekvence nemění, pro složený signál, jak vidíme, naopak platí, že převládající frekvence se těmito převody mění, a to výrazně. Převodem z posunutí na rychlost a zrychlení převládající frekvence roste, naopak převodem ze zrychlení na rychlost a posunutí klesá.



Obr. II.4: Schematické znázornění tvaru vlnových funkcí $u(t)$, $v(t)$ a $s(t)$, kde $u(t)$ je jednoduchá sinusovka o amplitudě A vyjadřující posunutí, $v(t)$ je pak odpovídající funkce vyjadřující rychlost a $s(t)$ funkce vyjadřující zrychlení. Bližší viz text.



Obr. II.5: Schematické znázornění tvaru vlnových funkcí $U(f)$, $V(f)$ a $S(f)$ vyjádřených v závislosti na frekvenci f , kde $U(f)$ je posunutí, $V(f)$ je pak odpovídající funkce vyjadřující rychlost a $S(f)$ funkce vyjadřující zrychlení. Blíže viz text.



Obr. II.6: Časová vlnová funkce (rychlost posunutí) seismického signálu zemětřesení v severní Itálii zaregistrovaného stanicí KRUC (dole) a spektra posunutí, rychlosti a zrychlení (nahore) pro časové okno (viz červený obdélník) v místě seismické fáze Pg (korová fáze, podélná vlna přímá).

Schematicky diskutované vztahy mezi signálem vyjadřujícím posunutí, rychlost a zrychlení dobře vyjadřuje obrázek II.5, který dobře dokumentuje, že např. závislost změny amplitudy při přechodu z rychlosti na zrychlení je lineární. Význam vztahů mezi posunutím, rychlostí a zrychlení si můžeme názorně ukázat také na spektru reálného seismického jevu. Na obrázku II.6 vidíme v dolní části záznam seismického signálu zemětřesení s epicentrem v severní Itálii, tak jak byl zaregistrován seismickou stanicí KRUC nacházející se na jižní Moravě u Moravského Krumlova. Na záznamu je zobrazena vlnová funkce vyjadřující rychlost posunutí částic horninového kontinua v závislosti na čase. Tomuto časovému záznamu (respektive jeho části vyznačené červeným obdélníkem) tedy odpovídá spektrum rychlosti (tedy grafické vyjádření amplitud vlnové funkce pro rychlost v závislosti na frekvenci) v horní části obrázku uprostřed. Vlevo je pak zobrazeno spektrum téhož signálu a téhož časového okna po převodu na posunutí, vpravo je spektrum téhož signálu a téhož časového okna po převodu na zrychlení. Všimněte si, jak ve spektru posunutí výrazně poklesly amplitudy v pravé části spektra, kde jsou znázorněny vyšší frekvence. A podobně, jak v případě spektra zrychlení výrazně poklesly amplitudy v levé části spektra odpovídající nízkým frekvencím.

Příklad 3: Seismický signál jako vlnová funkce – Fourierova transformace, spektrum

- využijeme excelovský soubor fft-vstup2.xls

Vstupní oblast nástroje „Analýza dat, Fourierova analýza“ volíme B5:B4100.

Výstupní oblast nástroje „Analýza dat, Fourierova analýza“ volíme E5:E4100.

1. V listu sinusovka sestrojíme signál tvořený jednoduchou sinusovkou (zvolte např. amplitudu 10 a frekvenci 0.01).

Vybereme v menu Nástroje položku Analýza dat, Fourierova analýza a vypočteme spektrum.

Jaký je tvar amplitudového spektra?

2. Upravíme sinusovku (zvolte poloviční frekvenci). Opět vypočteme spektrum.

Co se změní v grafu amplitudového spektra?

3. V listu sinusovky sestrojíme signál složený ze dvou jednoduchých sinusovek (zvolte např. amplitudu 2 a frekvenci 0.05 první sinusovky a amplitudu 2 a frekvenci 0.03 druhé sinusovky).

Vypočteme spektrum. Jaký je tvar amplitudového spektra?

4. Upravíme složený signál (šestinásobně zvýšíme amplitudu jedné ze sinusovek).

Vypočteme spektrum. Jaký je nyní tvar amplitudového spektra?

5. V listu peak sestrojíme signál tvořený jedním píkem o amplitudě 100 v čase 500.

Vypočteme spektrum. Jaký je tvar amplitudového spektra?

6. Zvýšíme amplitudu píku z hodnoty 100 na hodnotu 500.

Vypočteme spektrum. Co se změní v grafu amplitudového spektra?

7. Změníme polohu píku z času 500 na čas 100.

Vypočteme spektrum. Co se změní v grafu amplitudového spektra?

Otázka pro zápočet:

- zvolte si jedno ze zadání „Příklad1“ až "Příklad5". Na spodním grafu vidíte časový záznam signálů tvořený složením dvou nebo čtyř sinusovek o různých frekvencích. Jaké to jsou frekvence?

Postup:

Na zvoleném listu „Příklad X“ vypočteme spektrum signálu (amplitudy signálu jsou ve sloupci B) pomocí nástroje „Analýza dat, Fourierova analýza“ a vložíme toto spektrum do výstupní oblasti E5:E4100. Na horním grafu se zobrazí amplitudové spektrum signálu, na kterém odečteme dané frekvence.

Odpověď:

číslo zvoleného příkladu:

Frekvence sinusovek ve zvoleném signálu jsou:

| | |
|--|----|
| | Hz |
| | Hz |
| | Hz |
| | Hz |

Příklad 4: Typy seismického signálu: posunutí, rychlost zrychlení

- využijeme excelovský soubor derivace-integrace.xls

1. Vytvoříme nejprve jednoduchý signál "šumu" složením sinusovek:

| a) | | b) | | c) | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 10 Hz | 1 | 10 Hz | 1 | 10 Hz | 10 |
| 1 Hz | 1 | 1 Hz | 1 | 1 Hz | 1 |
| 0.1 Hz | 1 | 0.1 Hz | 10 | 0.1 Hz | 1 |

Jak se mění amplituda signálu pro různé frekvence u derivovaného a integrovaného signálu? Jaká je převládající frekvence u signálu, na který byla aplikována derivace, a jaká je převládající frekvence signálu, u něhož došlo k integraci?

2. Vytvoříme signál „šumu“ složením sinusovek:

| frekvence | amplituda |
|-----------|-----------|
| 10 Hz | 5 |
| 1 Hz | 1 |
| 0.1 Hz | 1 |

Nyní vytvoříme dvě fáze „užitečného signálu“ složeného ze sinusovek:

| 1. signál | | 2. signál | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| začátek | 1 s | začátek | 6 s |
| útlum | 2 | útlum | 1 |
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 3 Hz | 50 | 0.2 Hz | 50 |
| 5 Hz | -100 | 0.8 Hz | -100 |
| 8 Hz | 40 | 3 Hz | -100 |

| 1. signál | | 2. signál | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| začátek | 1 s | začátek | 6 s |
| útlum | 2 | útlum | 0.5 |
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 3 Hz | 50 | 0.2 Hz | 150 |
| 5 Hz | -100 | 0.8 Hz | -350 |
| 8 Hz | 40 | 3 Hz | -100 |

Charakterizují-li amplitudy vytvořeného signálu posunutí, ve kterém grafu charakterizují amplitudy rychlost posunutí?

Charakterizují-li amplitudy vytvořeného signálu posunutí, ve kterém grafu charakterizují amplitudy zrychlení posunutí?

Jak se liší poměr maximální amplitudy prvního a druhého „užitečného signálu“ v grafu charakterizujícím posunutí a rychlost (respektive zrychlení) posunutí? Umíte vysvětlit, proč se tento poměr liší?

Příklad 5: Spektrum reálných seismických dat

- pro práci s daty využijeme program *Sgraph* (Abdelwahed 2010, 2012)

- obecný postup:

- a) načtete příslušná data
- b) vhodně upravte časové okno (menu Routine Tools - Zoom)
- c) Pomocí rychlé Fourierovy transformace spočtete spektrum (menu Routine Tools - Fourier Transform - FFT)
- d) Signál integrujte (menu Routine Tools - Integration), načtete do pracovní plochy a spočtete spektrum integrovaného signálu.
- e) Obě vypočítaná spektra porovnejte.

1. soubor brg20090721_0604.gse (stanice BRG, Polsko, Lubin, M=4.0)

2. soubor brg20090809_1106.gse (stanice BRG, Japonsko, souostroví Izu, M=7.1)

3. soubor mox20090828_0200.gse (stanice MOX, Čína, Qinghai, M=6.2)

4. soubor gfu090811095500-023512.gse (stanice KHC, Rakousko, M=2.4)

5. soubor wern20081010_0807.gse (stanice WERN, západní Čechy, M=3.7)

III. Tvar seismického signálu

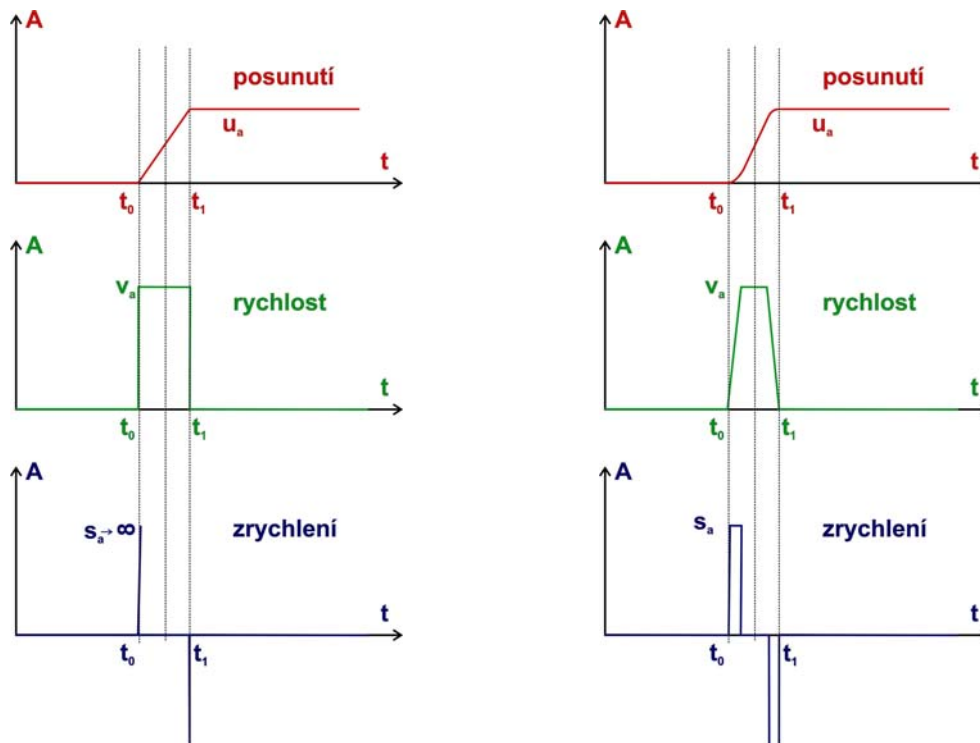
Vlnové funkce, které jsme si teoreticky rozebírali v předešlých částech (ať již šlo o jednoduché sinusovky nebo o složitější součty sinových a cosinových funkcí), se sice skutečnému seismickému signálu podobají, ale v některých dalších ohledech se od něj liší. Jedním z hlavních rozdílů je ten, že skutečná seismická fáze je v časovém obrazu omezena na nějaký konkrétní časový úsek, ve kterém je patrná. Kmitání odpovídající dané seismické fázi se objeví v nějakém čase, často náhle, před nímž v daném místě žádný projev dané fáze neexistuje. Pak následuje vlnové klubko, leckdy obsahující jen několik málo kmitů, jehož amplituda pak klesá (rychleji či pomaleji) vlivem útlumu, až je amplituda dané fáze natolik malá, že není v celkovém signálu rozeznatelná.

Zkusme si tedy zde, na tomto místě zamyslet nad popisem vlnové funkce, která by lépe charakterizovala skutečný seismický signál, včetně jeho omezení v čase.

III. a) Ideální tvar seismické fáze

Chceme-li se zamyslet nad ideálním tvarem seismického signálu, je zapotřebí vyjít z nějakých předpokladů upřesňujících mechanismus vzniku tohoto signálu. Protože v rámci seismologie jsou v naprosté většině studovány jevy vzniklé v důsledku náhlých prokluzů na zlomových plochách, vyjděme ze z tohoto mechanismu (prokluzu na zlomové ploše) jako ze základního předpokladu.

Podívejme se nejprve na to, jak může náš základní předpoklad o náhlém prokluzu na zlomové ploše limitovat ideální tvar seismické fáze přímo v místě zdroje signálu. Nacházíme se tedy v místě poblíž zlomu, na němž došlo náhle k posunutí. V námi sledovaném místě mělo toto posunutí amplitudu u_a (viz obr. III.1). Můžeme předpokládat, že toto posunutí, jakkoli bylo náhlé, probíhalo s konečnou rychlostí. Dělo se tedy v nějakém konečném, ale nenulovém čase, dejme tomu od času t_0 do času t_1 . Co potom můžeme předpokládat o idealizovaném tvaru funkcí popisujících posunutí, rychlost a zrychlení na zlomu.



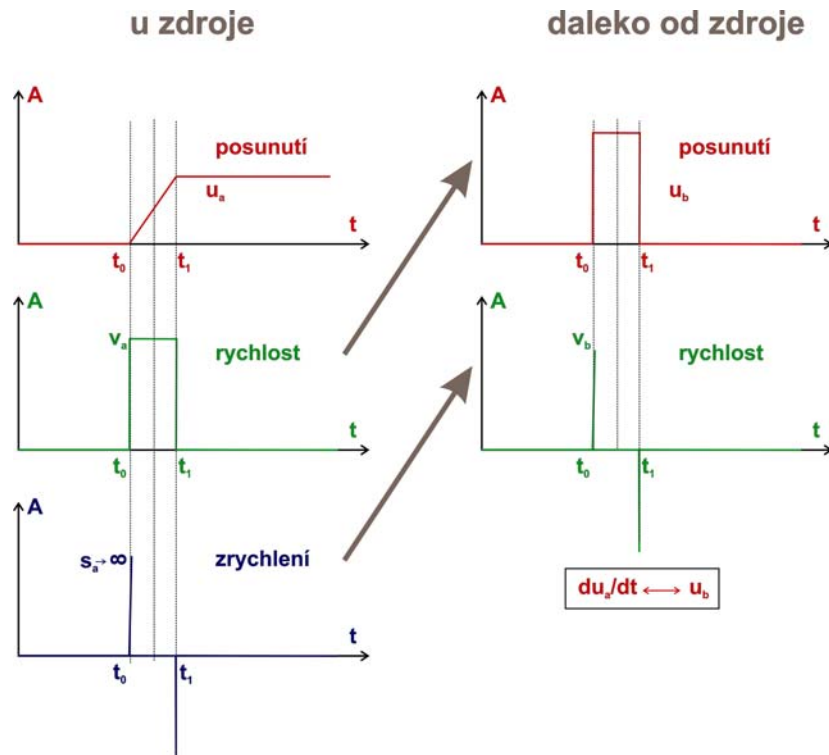
Obr. III.1: Schematické znázornění ideálního tvaru funkce popisující posunutí, rychlosti posunutí a zrychlení posunutí na zlomové ploše v závislosti na čase. Vlevo jsou funkce předpokládající konstantní rychlost posunutí, vpravo pak funkce předpokládající lichoběžníkový tvar funkce rychlosti posunutí.

Začneme těmi nejjednoduššími možnými předpoklady. Předpokládejme tedy pro začátek, že rychlost posunutí bodu horninového kontinua v blízkosti zlomu byla po dobu jevu konstantní a označme si ji jako v_a (obrázek III.1 vlevo). Funkci zrychlení v závislosti na čase si pak můžeme znázornit jako obdélník o šířce $t_1 - t_0$ a o výšce v_a . Hovoříme pak o obdélníkové **zdrojové funkci** seismického signálu. Je-li rychlost konstantní, pak závislost posunutí u_a na čase je lineární. To by nám nevadilo, naopak, s čím jednodušším modelem můžeme pracovat, tím lépe. Pokud se ale podíváme na funkci vyjadřující zrychlení v tomto modelu, vidíme, že tato funkce degraduje na jednoduchou, ale nereálnou závislost, kdy zrychlení s_a je v čase t_0 a t_1 nekonečně veliké a ve všech ostatních časových úsecích je nulové.

Nekonečně velkým zrychlením se snadno vyhneme zavedením lichoběžníkové **zdrojové funkce** (obrázek III.1 vpravo). V tomto případě hodnota rychlosti po nějakou dobu narůstá a později klesá v souladu s konstantním, ale konečným zrychlením s_r . Mezi dobou nárůstu a poklesu rychlosti je pak časový úsek, kdy je rychlost konstantní. Funkce popisující závislost rychlosti na čase tak má lichoběžníkový tvar. S lichoběžníkovou zdrojovou funkcí budeme pracovat ještě za chvíli a při té příležitosti si objasníme, jak se právě tomuto tvaru funkce dostaneme z jednoduchých modelů pohybu na zlomu.

Na tomto místě se ale ještě podívejme, jak se bude lišit tvar seismického signálu, budeme-li se nacházet nikoli v blízkosti, ale naopak ve velké vzdálenosti od zdroje. Tvar signálu ve velké vzdálenosti od zdroje značně zajímá, protože právě dále od zdroje obvykle sledujeme signál za pomoci měření seismických stanic.

Dále od zdroje je signál zcela jistě ovlivněn mechanickými vlastnostmi prostředí, kterým se šíří. Navíc i základní úvahy o funkci popisující posunutí nám jasně ukazují, že tu musí být oproti situaci v blízkosti zdroje, značný rozdíl. V blízkosti zlomu jsme předpokládali, že došlo k posunutí, které bylo trvalé. Ve velké vzdálenosti od zdroje ale toto trvalé posunutí nepozorujeme. Pozorujeme vychýlení bodu horninového kontinua z jeho původní polohy, které může vést k harmonickým kmitům (v závislosti na elastických vlastnostech prostředí), ale které není trvalé.



Obr. III.2: Porovnání ideálního tvaru funkce signálu v blízkosti zdroje (vlevo) a ve velké vzdálenosti od zdroje (vpravo).

Zanedbáme-li vliv pružnosti prostředí, můžeme tedy posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje nejjednodušším způsobem popsat obdélníkovou funkcí. Signál se po té, co doputuje ze zdroje ke vzdálenému místu detekce, projeví náhlým posunutím, které nějakou dobu trvá a pak se bod kontinua vrátí do původní polohy. Porovnáme-li takto pojatou funkci posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje s dříve diskutovanými funkcemi posunutí $u(t)$, rychlosti posunutí $v(t)$ a zrychlení $s(t)$ v blízkosti zdroje, vidíme, že funkce posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje svým charakterem odpovídá zdrojové funkci rychlosti posunutí $v(t)$ v blízkosti zdroje (obr. III.2). Stručně je možné funkce popisující posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje charakterizovat jako derivaci zdrojové funkce posunutí v blízkosti zdroje podle času.

Změna tvaru signálu v průběhu jeho šíření horninovým prostředím se dá popsat za pomoci tzv. **Greenovy funkce**. Protože v rámci našich lekcí se nebudeme příliš věnovat úlohám, pro jejichž řešení je zapotřebí hlubších znalostí problematiky Greenovy funkce, nastíníme si ji tady co nejjednodušším způsobem.

Uvažujme nejprve opravdu značně zjednodušeně. Mějme třeba nějakou funkci popisující náš signál v místě ξ a v čase τ a označme si ji $u_a(\xi, \tau)$. Tento signál prošel horninovým prostředím a projevil se v místě x a v čase t způsobem, který můžeme popsat novou funkcí $u_b(x, t)$. Podívejme se na frekvenční charakteristiku těchto funkcí. Pomocí Fourierovy transformace si obě funkce můžeme vyjádřit v závislosti na frekvenci namísto na čase. Můžeme si je označit jako $U_a(\xi, f)$ a $U_b(x, f)$. Veličiny ξ a x uvedené u našich funkcí vyjadřují pouze to, že sledujeme funkce signálů v nějakých konkrétních místech ξ a x a že se změnou místa by se charakter funkcí změnil. My se ale pro tuto chvíli nebudeme hýbat z místa, takže veličiny ξ a x jsou pro nás konstanty a u funkcí $U_a(f)$ a $U_b(f)$ budeme sledovat pouze závislost na frekvenci. Projev průchodu signálu horninovým prostředím tu pak vidíme jako změnu spektra námi sledovaných funkcí. U funkce $U_b(f)$ popisující signál po průchodu horninovým prostředím zjišťujeme, že některé frekvence jsou oproti funkci $U_a(f)$ zeslabené nebo naopak zesílené, a to v různé míře v závislosti na frekvenci. Tento vztah si můžeme popsat další funkcí, označme si ji jako $H(f)$, kde pro libovolnou frekvenci f_i nám $H(f_i)$ vyjadřuje poměr mezi zastoupením dané frekvence ve druhém signálu $U_b(f_i)$ a v prvním signálu $U_a(f_i)$. Obecně tedy můžeme psát velmi jednoduchý vztah:

$$U_b(f) = U_a(f) \cdot H(f) \quad (\text{rovnice III.1})$$

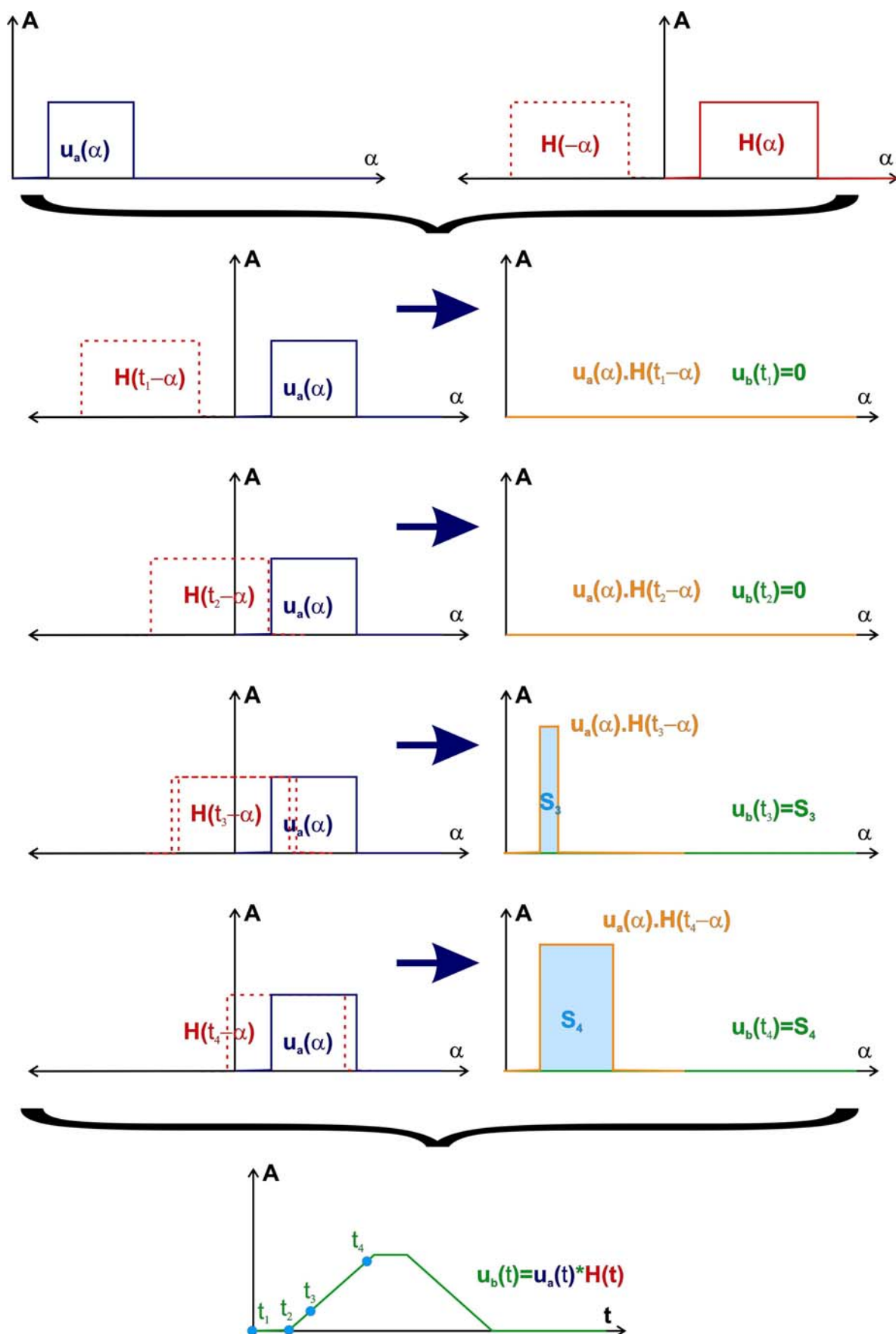
Takto jednoduše lze ovšem vztah mezi první funkcí (před průchodem horninovým prostředím) a druhou funkcí (po průchodu horninovým prostředím) pouze tehdy vyjádříme-li si dané funkce v závislosti na frekvenci, nikoli na čase. Ke vztahu s funkcemi vyjádřenými v závislosti na čase bychom se dostali za pomoci zpětné Fourierovy transformace (rovnice II.10). Aniz bychom sledovali tuto problematiku hlouběji, můžeme říci, že v časové závislosti (na čase t) pak rovnice III.1 vede k poněkud komplikovanějšímu vztahu:

$$u_b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_a(\alpha) H(t - \alpha) d\alpha \quad (\text{rovnice III.2})$$

kde α je integrační konstanta a má v tomto případě rovněž význam času. Integrál v rovnici III.2 vyjadřuje operaci mezi dvěma funkcemi, v tomto případě funkcemi $u_a(t)$ a $G(t)$, která má široké využití. Jde o operaci konvoluce označovanou obecně znakem $*$. Rovnici III.2 tak můžeme zjednodušeně zapsat ve formě:

$$u_b(t) = u_a(t) * H(t) \quad (\text{rovnice III.3})$$

Funkce $u_b(t)$ popisující signál po průchodu horninovým prostředím je tedy obecně výsledkem konvoluce mezi funkcí $u_a(t)$ popisující signál před průchodem horninovým prostředím a funkce $H(t)$ popisující vliv prostředí.



Obr. III.3: Schematické znázornění principu konvoluce $u_b(t) = u_a(t) * H(t)$, v případě konvoluce obdélníkové funkce $u_a(t)$ s obdélníkovou funkcí $H(t)$ (blíže viz text).

Konvoluci si můžeme názorně představit například následujícím způsobem. Máme graf funkce $u_a(t)$ v závislosti na čase. Také funkci $H(t)$ si představíme ve formě grafu, který ovšem zrcadlově obrátíme souměrně podle svislé osy (toto obrácení je dáno zápornou integrační konstantou α u funkce H v rovnici III.2). Nyní graf funkce H přesouváme podél svislé osy přes graf funkce u_a . Pro každou pozici posouvaného grafu funkce H (tato pozice je definována v rovnici III.2 časem t ve výrazu $t-\alpha$) vytvoříme novou funkci, která je součinem funkce u_a a posunuté (a obrácené) funkce H , a určíme plochu pod křivkou této nové funkce (tato plocha odpovídá určitému integrálu v rovnici III.2).

Z uvedeného zjednodušeného popisu konvoluce vyplývá jako důležitý důsledek ten fakt, že pokud je funkcí u_a tzv. Diracova funkce δ , pak konvolucí $u_a * H$ je opět funkce H . Diracova funkce je funkce tvaru jednoduchého píku, kdy pro $x = 0$ je hodnota $\delta(x) = 1$, zatímco pro všechna ostatní x je hodnota $\delta(x) = 0$. Je to tedy funkce tvaru píku, kde hodnota píku je 1. Jestliže přes takovou funkci přejíždíme libovolnou jinou funkcí, například naší funkcí H , pak funkce daná součinem zmíněného píku a posunuté funkce H bude opět pík, přičemž tento pík bude mít hodnotu odpovídající funkční hodnotě funkce H v čase t_i . Určitý integrál Dirakovy funkce má hodnotu 1. Určitý integrál funkce tvaru píku o hodnotě $H(t_i)$ má tedy hodnotu $H(t_i)$. A proto výsledkem konvoluce Dirakovy funkce s funkcí $H(t)$ musí být opět funkce $H(t)$. Tato vlastnost konvoluce se nám bude v následujících úvahách hodit.

Zkusme být nyní v našem jednoduchém přiblížení trochu konkrétnější, abychom lépe vyjádřili vztah mezi funkcí popisující kinematiku a dynamiku částic horninového prostředí v blízkosti zdroje a funkcí popisující signál ve velké vzdálenosti od zdroje. Co všechno ovlivňuje tvar signálu v místě daleko od zdroje. Do vztahu bude vstupovat zdrojová funkce $u_a(\xi, \tau)$, popisující posunutí v blízkosti zdroje v místě ξ a v čase τ . Ta ale vyjadřuje pouze kinematiku ve zdroji, nikoli dynamiku. Abychom popsali dynamické charakteristiky zdroje, musíme do vztahu zapojit také seismický moment $M(\xi, \tau)$ působící v místě ξ a v čase τ . A konečně pak také Greenovu funkci $G(x, t, \xi, \tau)$, která nám popisuje, jaký je v místě x a v čase t vliv horninového prostředí na signál iniciovaný v místě ξ a v čase τ . Během našeho povídání jsme si ovšem ukázali, že ideální tvar signálu ve velké vzdálenosti od zdroje odpovídá derivaci zdrojové funkce $u_a(t)$ podle času t . Jestliže tedy v blízkosti zdroje měla funkce $u_a(t)$ pro posunutí tvar rampy či schodu, pak její první derivace, tedy funkce popisující rychlost posunutí v blízkosti zdroje $v_a(t)$, má tvar obdélníku či píku (pro krátké časy $t_1 - t_0$, viz obrázek III.1). Směle tedy můžeme předpokládat, že derivace zdrojové funkce podle času, se kterou bychom měli pracovat při vyjádření signálu ve velké vzdálenosti od zdroje, má tvar píku. Před malou chvílí jsme si ovšem ukázali, že konvolujeme-li pík s libovolnou funkcí H , tak získáme opět funkci tvaru funkce H . Tudíž tento pík v našem vyjádření můžeme zanedbat. Zůstává nám tedy seismický moment M a Greenova funkce G a můžeme (bez odvozování) konstatovat, že tvar signálu $u_b(t)$ v místě x ve velké vzdálenosti od zdroje můžeme popsat vztahem:

$$u_b(x, t) = M(\xi, \tau) * G(x, t, \xi, \tau) \quad (\text{rovnice III.4})$$

III. b) Funkce odezvy

Na tomto místě se na chvíli zastavme a vraťme se k našim obecným úvahám, které vyústili v rovnice III.1 a III.3. V diskusi kolem těchto rovnic jsme zvažovali vliv horninového prostředí na tvar signálu. Ale tvar seismické signálu, se kterým pracujeme, není ovlivněn pouze průchodem horninovým prostředím. Také výstupem seismometru, který měří kmity zemského povrchu, není funkce věrně popisující dané kmity, ale je to funkce ovlivněná vlastnostmi přístroje. Označíme-li si $u_a(t)$ jako funkci popisující signál v místě zdroje, $g(t)$ jako funkci popisující vliv horninového prostředí a $I(t)$ jako funkci popisující vliv přístroje, pak si signál $u_1(t)$, který získáme jako záznam na přístroji můžeme zjednodušeně popsat vztahem:

$$u_1(t) = u_a(t) * g(t) * I(t) \quad (\text{rovnice III.5})$$

Podobně můžeme tvar signálu ovlivňovat tzv. filtrací (problematikou filtrace se budeme zabývat v kapitole IV), jejímž cílem je z vlnové funkce signálu odstranit některé nežádoucí frekvence.

Všechny tyto vlivy na signál, tedy vliv horninového prostředí, vliv přístroje, vliv filtru (popřípadě další možné vlivy měnící tvar signálu) si tedy můžeme vyjádřit nějakou funkcí, které říkáme **odezva**. Tvar signálu ovlivněného čímkoli, co můžeme charakterizovat odezvou $r(t)$, získáme jednoduše konvolucí původního signálu s funkcí odezvy (viz rovnice III.3). Mnohem jednodušší je pracovat s odezvou v případě funkcí vyjádřených v závislosti na frekvenci. Pak konvoluce degraduje na prostý součin a nový (ovlivněný) signál $U_b(f)$ získáme prostým součinem původního spektra $U_a(f)$ se spektrem odezvy $R(f)$. Křivka odezvy $R(f)$ tedy ukazuje hodnoty, kterými musíme roznásobit jednotlivé body funkce $U_a(f)$, abychom získali funkci $U_b(f)$. Popisuje tedy jakými násobky zvětšujeme jednotlivé části původního spektra. Křivku odezvy $R(f)$ proto v případě, že jde o funkci popisující vliv přístroje či filtru, můžeme nazývat **křivkou zvětšení**.

III. c) Útlum

Uvažujeme-li tvar reálného seismického signálu, nemůžeme opomenout vzít v úvahu také vliv elasticity horninového prostředí. I když ideální tvar signálu ve velké vzdálenosti od zdroje může být dostatečně věrně vyjádřen, jak jsme si ukázali v předešlých částech, jednoduchým impulsem, tento impuls vede v elastickém prostředí k tlumeným kmitům.

Tlumené kmity jednoduchého signálu o frekvenci f si obecně můžeme vyjádřit vztahem:

$$u(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(2\pi f t + \varphi_0) \quad (\text{rovnice III.6})$$

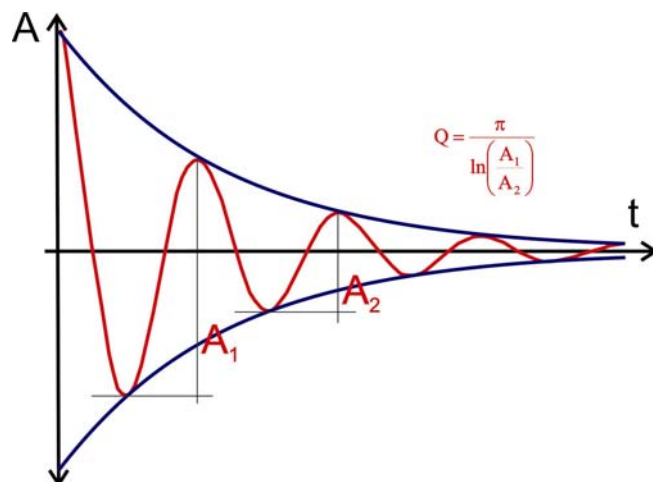
kde A_0 amplituda harmonické funkce v čase $t = 0$, φ_0 je fázový posun sledované harmonické funkce a δ je součinitel tlumení.

Změnu amplitudy A v závislosti na čase t si tedy můžeme popsat jako:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (\text{rovnice III.7})$$

Tento vztah nám ale nestačí, protože harmonická funkce popisující reálný seismický signál je složená, obsahuje harmonické funkce o více frekvencích, a součinitel tlumení je veličina závislá mimo jiné také na frekvenci signálu. Útlum reálného signálu si tedy můžeme lépe vyjádřit jiným, ovšem podobným vztahem:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\pi f t}{Q}} \quad (\text{rovnice III.8})$$



Obr. III.4: Změna amplitudy A v závislosti na čase t při tlumených kmitech a vztah faktoru Q k amplitudám dvou po sobě následujících oscilací tlumených kmitů.

kde Q je parametr popisující poměr mezi poměr mezi amplitudami dvou následujících cyklů harmonické funkce A_1 a A_2 (obr. III.4):

$$Q = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)} \quad (\text{rovnice III.9})$$

Rovnicí III.8 popisujeme, jak se mění vlivem útlumu amplituda tlumených kmitů v závislosti na čase, když ji sledujeme v jednom konkrétním místě. Zajímavé ovšem může být sledovat naopak to, jak se mění amplituda nějaké výchylky, sledujeme-li signál v různých místech vyjádřených vzdáleností x , ovšem vždy v časech odpovídajících příchodu daného sledovaného signálu do dané vzdálenosti. Tuto změnu amplitudy signálu v závislosti na vzdálenosti můžeme popsat vztahem:

$$A(x) = A_0 e^{-\frac{\pi}{Qv}x} \quad (\text{rovnice III.10})$$

kde v je fázová rychlost sledované fáze seismického signálu. Z rovnice III.10 plyne, že vyšší frekvence budou průchodem signálu na větší vzdálenost od zdroje tlumeny mnohem rychleji, než frekvence nižší.

III. d) Spektrum přirozeného zemětřesení

Vraťme se ještě k našim úvahám o ideálním tvaru signálu v blízkosti zdroje a ve velké vzdálenosti od zdroje. Během nich bylo zmíněno, že tvar funkce posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje odpovídá tvaru funkce rychlosti posunutí v místě zdroje. Má-li tedy funkce posunutí v místě zdroje tvar šikmé rampy a funkce rychlosti je pak obdélníková funkce, pak ve velké vzdálenosti od zdroje bude mít funkce posunutí tvar obdélníkové funkce (obr. III.2).

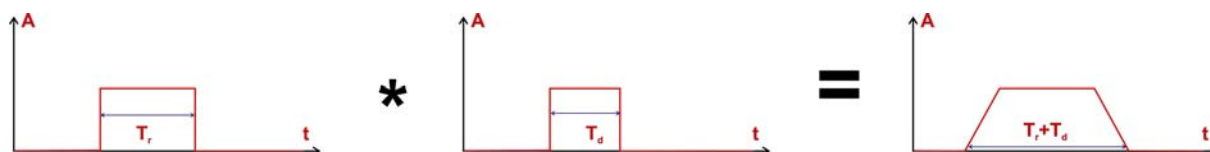
Při našich úvahách v části III.a) jsme vycházeli z myšlenky, že zdrojem signálu je posunutí na zlomu. A toto posunutí si můžeme v nejjednodušším zobrazení vyjádřit právě funkcí tvaru šikmé rampy, kde šikmá část odpovídá době T_d , po kterou dochází v daném místě zlomové struktury ke střížnému posouvání horninových bloků. Nejjednodušší vyjádření funkce rychlosti tohoto posunutí v_d na zlomu je tedy pak obdélníková funkce. Ve velké vzdálenosti od zdroje se pak toto posunutí na zlomu projeví obdélníkovou funkcí výchylky $u_d(t)$.

Jenomže pouhé posunutí podél zlomové plochy nevyjadřuje kinematiku zdroje úplně. I v případě nejjednoduššího modelu je zapotřebí ještě vzít v úvahu, že k posouvání nedochází ve všech místech zlomové struktury současně, ale že se ruptura na zlomové zóně šíří nějakou konečnou rychlostí v_r po dobu T_r . Uvažujeme-li obdélníkový tvar zlomu o šířce W a délce L a předpokládáme-li, že se ruptura šíří ve směru délky zlomu a postihne celou jeho délku, pak ke střížnému posouvání v bodě o vzdálenosti x od okraje ruptury (ve směru délky) dojde v čase $t(x)$:

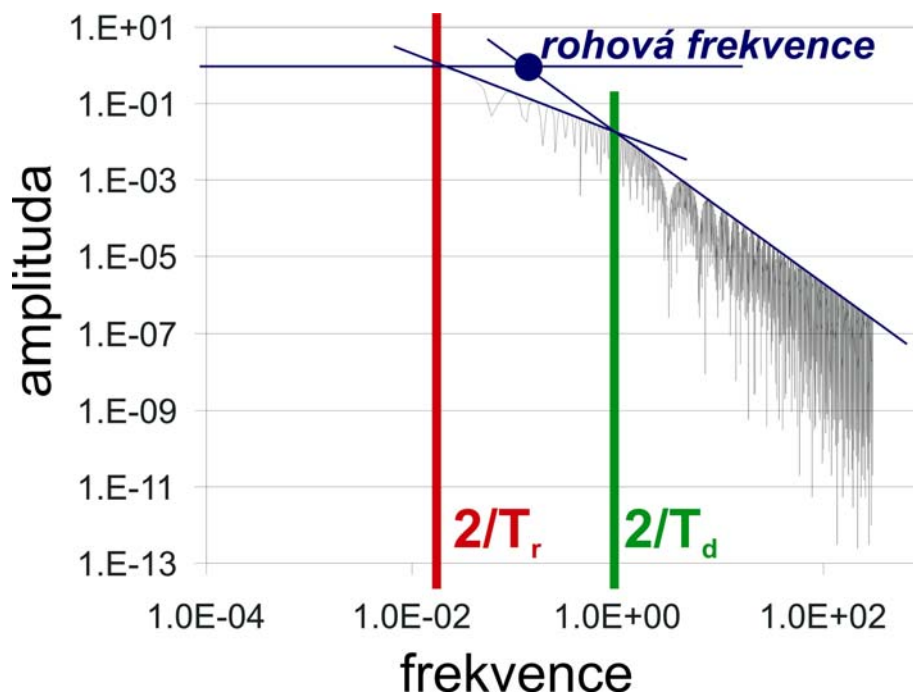
$$t(x) = t_0 + \frac{x}{v_r} \quad (\text{rovnice III.11})$$

kde t_0 je čas, kdy se začala ruptura šířit. Celková doba šíření ruptury T_r je, jak je patrné z rovnice III.11, podílem délky ruptury L a rychlosti šíření ruptury v_r .

Uvedený jednoduchý model kinematiky v místě zlomu (tzv. **Haskellův model**) tedy vede k tomu, že vedle funkce popisující posunutí podél zlomové plochy v individuálním místě zlomu se na zdrojové funkci podílí ještě také další funkce popisující šíření ruptury. Také ta se ve velké vzdálenosti od zdroje projeví obdélníkovou funkcí výchylky, kterou si můžeme označit jako $u_r(t)$. První derivace obou funkcí (tedy funkce rychlosti posunutí a funkce rychlosti šíření ruptury) lze tedy v místě zdroje popsat obdélníkovými funkcemi $u_d(t)$ a $u_r(t)$ a obě se tedy ve velké vzdálenosti od zdroje projeví jako dvě funkce posunutí popsané obdélníkovými funkcemi o šířkách T_d a T_r .



Obr. III.5: Schematické znázornění konvoluce funkce popisující výchylku velké vzdálenosti od zdroje odpovídající šíření ruptury (obdélníková funkce o šířce T_r) a funkce popisující výchylku ve velké vzdálenosti odpovídající posunutí podél zlomu v individuálním bodě zlomu (obdélníková funkce o šířce T_d). Výsledkem konvoluce je obdélníková funkce o šířce $T_r + T_d$.



Obr. III.6: Spektrum $U_c(f)$ lichoběžníkové zdrojové funkce $u_c(t)$ popisující signál posunutí ve velké vzdálenosti od zdroje a rozdělení spektra na tři frekvenční oblasti (blíže viz text).

Výsledná funkce výchylky $u_c(t)$, tedy výsledný tvar zdrojové funkce ve velké vzdálenosti od zdroje, je pak dán konvolucí obou obdélníkových funkcí (obr. III.5):

$$u_c(t) = u_r(t) * u_d(t) \quad (\text{rovnice III.12})$$

Nyní tedy můžeme zúročit naše dlouhé objasňování principu konvoluce v části III.a), a to dokonce právě na příkladu konvoluce obdélníkových funkcí (obr. III.3). Zvážíme-li totiž, co jsme si o konvoluci pověděli, tak vidíme, že konvolucí dvou obdélníkových funkcí je funkce lichoběžníková (obr. III.5). A navíc, pokud první funkce, tj. funkce $u_r(t)$ popisující výchylku ve velké vzdálenosti od zdroje odpovídající šíření ruptury, měla šířku T_r a druhá funkce, funkce $u_d(t)$ popisující výchylku ve velké vzdálenosti odpovídající posunutí podél zlomu v individuálním bodě zlomu, měla šířku T_d , pak výsledná lichoběžníková funkce $u_c(t)$ musí mít šířku $T_r + T_d$. Nejjednodušším úplným vyjádřením funkce výchylky ve velké vzdálenosti od zdroje, zohledňujícím jak posouvání podél zlomové plochy, tak i konečnou rychlost šíření ruptury, je tedy lichoběžníkový impuls.

Další důležité informace o charakteru signálu získáme z jeho spektra. Uvážíme-li význam seismického momentu na signál ve velké vzdálenosti od zdroje (viz rovnice III.4), můžeme pomocí Fourierovy transformace (rovnice II.10) získat pro funkci $U_c(f)$ popisující spektrum výchylky (posunutí) ve velké vzdálenosti od zdroje vztah:

$$U_c(f) \cong M_0 \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f T_r}{2}\right)}{\frac{\pi f T_r}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f T_d}{2}\right)}{\frac{\pi f T_d}{2}} \right| \quad (\text{rovnice III.13})$$

kde M_0 je seismický moment, T_r je doba potřebná k vytvoření ruptury a T_d je doba potřebná k posunutí na jednom individuálním místě ruptury.

Na rovnici III.13 je důležité, že pro frekvence $f < 2/T$ nabývá výraz $|\sin(\pi \cdot f \cdot T/2)/(\pi \cdot f \cdot T/2)|$ hodnoty velmi blízké hodnotě 1, a může tak být ve vztahu zanedbán. Na základě uvedeného faktu pak můžeme pomocí rovnice III.13 rozlišit ve spektru signálu posunutí tři frekvenční oblasti (obr III.6):

$$f < \frac{2}{T_r} \Rightarrow U_c(f) \approx M_0$$

$$\frac{2}{T_r} < f < \frac{2}{T_d} \Rightarrow U_c(f) \approx M_0 \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f T_r}{2}\right)}{\frac{\pi f T_r}{2}} \right| \approx M_0 \cdot \frac{2}{\pi f T_r} \quad (\text{rovnice III.14})$$

$$\frac{2}{T_d} < f \Rightarrow U_c(f) \approx M_0 \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f T_r}{2}\right)}{\frac{\pi f T_r}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f T_d}{2}\right)}{\frac{\pi f T_d}{2}} \right| \approx M_0 \cdot \frac{4}{(\pi f)^2 T_r T_d}$$

Ze vztahů III.14 (a z obrázku III.6) plyne, že první část spektra ($f < 2/T_r$) je plochá a jeho amplituda odpovídá hodnotě seismického momentu M_0 . Druhá část spektra ($2/T_r < f < 2/T_d$) má klesající tendenci úměrnou hodnotě $1/f$ (tj. převrácené hodnotě frekvence). A konečně třetí část spektra ($2/T_d < f$) má opět klesající tendenci, ovšem úměrnou hodnotě $1/f^2$.

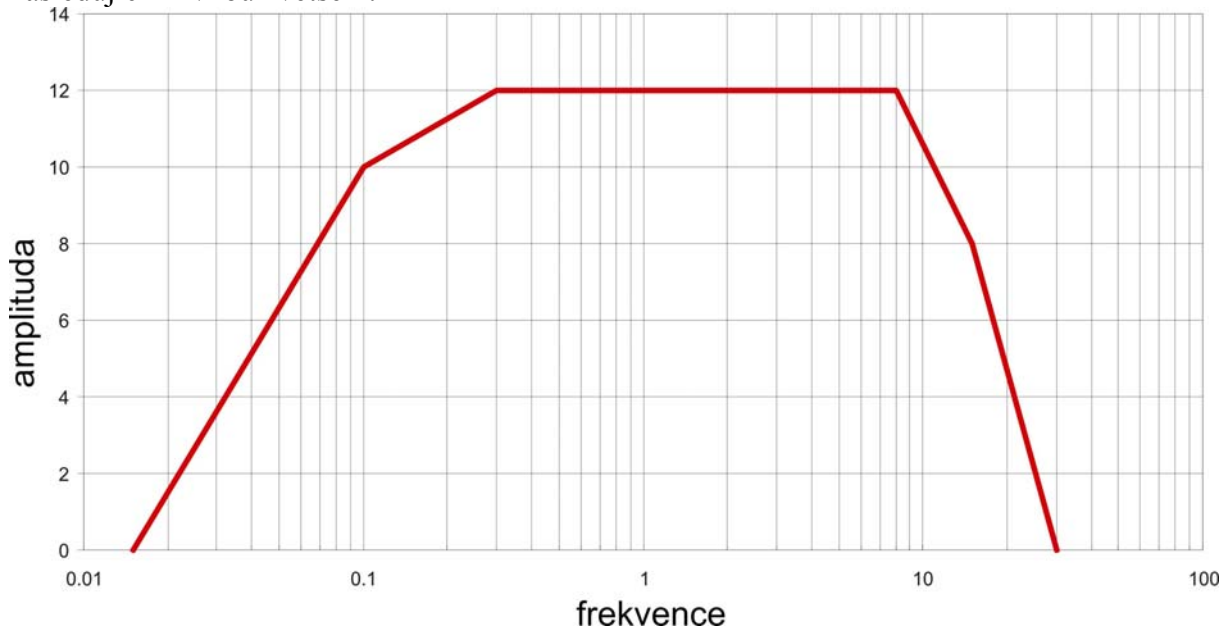
Vykreslíme-li spektrum do grafu s logaritmickými osami (nevynášíme tedy amplitudu a frekvenci, ale logaritmus amplitudy a logaritmus frekvence), budou mít všechny tři části spektra lineární charakter. Získáme tak lomenou čáru se třemi úseky oddělenými dvěma body. Tyto body, na kterých dochází k poklesu spektra pro vyšší frekvence, nazýváme **rohová frekvence**. Obecně tedy pro každé spektrum signálu zdrojové funkce ve velké vzdálenosti od zdroje můžeme odvodit dvě rohové frekvence. V praxi ovšem rozlišujeme jednu rohovou frekvenci f_c , která leží na spojnici prodloužení první (ploché) a třetí (nejstrmější) části spektra a pro kterou platí:

$$f_c = \frac{1}{T_r + 2T_d} \quad (\text{rovnice III.15})$$

Hodnota rohové frekvence tedy závisí na době šíření ruptury a je tedy závislá také na velikosti porušené zóny či na velikosti uvolněné energie.

Příklad 6: Výpočet zesílení z odezvy aparatury

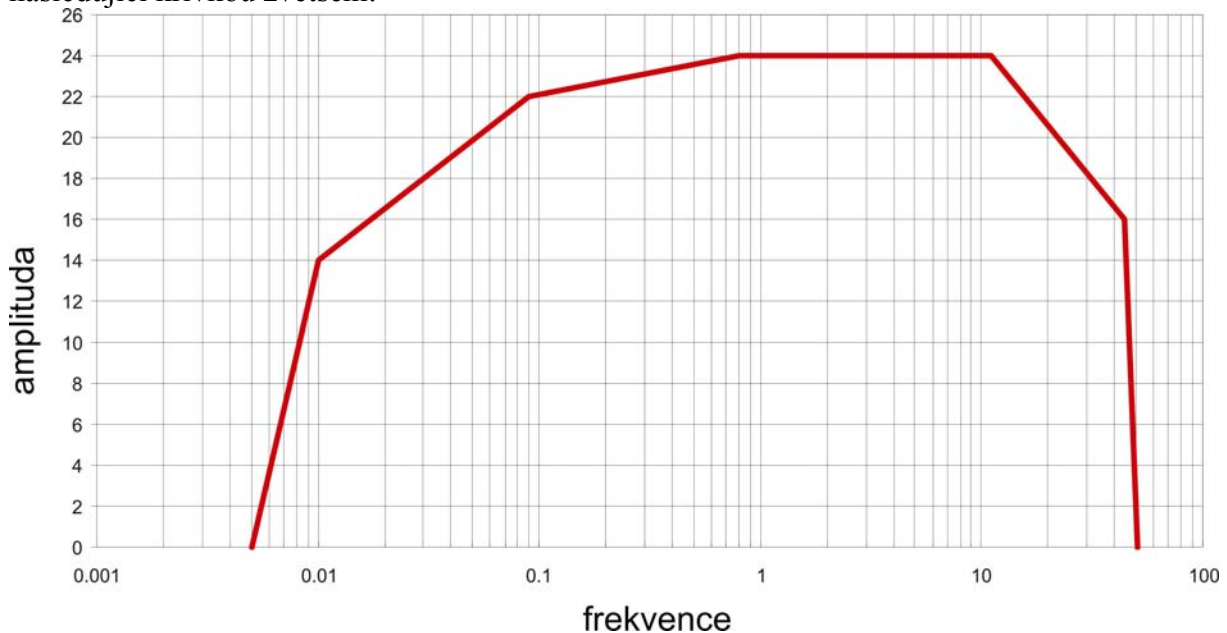
1. Předpokládejme, že odezva charakterizující vliv seismické aparatury na signál je dán následující křivkou zvětšení:



Jaká bude skutečná amplituda, jestliže byly v signálu poskytnutém aparaturou odečteny níže dané amplitudy a frekvence?

a) amplituda: 24 frekvence: 4Hz; b) amplituda: 2 frekvence: 0.1Hz

2. Předpokládejme, že odezva charakterizující vliv seismické aparatury na signál je dán následující křivkou zvětšení:



Jaká bude skutečná amplituda, jestliže byly v signálu poskytnutém aparaturou odečteny níže dané amplitudy a frekvence?

a) amplituda: 12 frekvence: 9Hz; b) amplituda: 6 frekvence: 0.02Hz

3. Předpokládejme, že odezva charakterizující vliv seismické aparatury na signál je dán následující křivkou zvětšení:



Jaká bude skutečná amplituda, jestliže byly v signálu poskytnutém aparaturou odečteny níže dané amplitudy a frekvence?

- a) amplituda: 20 frekvence: 5Hz; b) amplituda: 30 frekvence: 3Hz
 c) amplituda: 50 frekvence: 0.07Hz; d) amplituda: 5 frekvence: 0.7Hz

Předpokládejme, že amplitudy udávají rychlost posunutí. Jaké amplitudy bychom odečetly na signálu, který bychom převedly na zrychlení, jestliže odečty na rychlostním záznamu byly:

- a) amplituda: 50 frekvence: 0.07Hz; b) amplituda: 5 frekvence: 0.7Hz

$$A_s = A_v(2\pi.f)$$

Příklad 7: Útlum a jeho vliv na frekvenční charakteristiku signálu

- využijeme excelovský soubor utlum.xls

1. Vytvoříme signál jedné fáze (1.signál) složením sinusovek:

a)

| 1. signál | |
|-----------|-----------|
| začátek | 1 s |
| Q_{ta} | 30 |
| frekvence | amplituda |
| 0.5 Hz | 10 |
| 1 Hz | 10 |
| 3 Hz | 10 |
| 4 Hz | 10 |
| 6 Hz | 10 |

b)

| 1. signál | |
|-----------|-----------|
| začátek | 1 s |
| Q_{ta} | 30 |
| frekvence | amplituda |
| 0.5 Hz | 1 |
| 1 Hz | 2 |
| 3 Hz | 10 |
| 4 Hz | 20 |
| 6 Hz | 40 |

c)

| 1. signál | |
|-----------|-----------|
| začátek | 1 s |
| Q_{ta} | 30 |
| frekvence | amplituda |
| 0.5 Hz | 0.5 |
| 1 Hz | 2 |
| 3 Hz | 30 |
| 4 Hz | 50 |
| 6 Hz | 100 |

zvolte rychlosti seismických vln:

$$v_p = 8040 \text{ ms}^{-2}$$

$$v_s = 4480 \text{ ms}^{-2}$$

zvolte faktor Q pro útlum v závislosti na vzdálenosti:

$$Q_p = 1400$$

$$Q_s = 600$$

Měňte vzdálenost x od 100 km do 20.000 km.

Mění se frekvenční charakteristika signálu? Pokud ano, jak?

2. Vytvoříme signál dvou fází ("P" a "S") složením sinusovek:

a)

| 1. signál | | 2. signál | |
|---------------|-----------|--------------|-----------|
| začátek | 1 s | začátek | 5 s |
| $Q_{t\alpha}$ | 30 | $Q_{t\beta}$ | 40 |
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 3 Hz | 10 | 3 Hz | 10 |
| 4 Hz | 10 | 4 Hz | 10 |
| 6 Hz | 10 | 6 Hz | 10 |

b)

| 1. signál | | 2. signál | |
|---------------|-----------|--------------|-----------|
| začátek | 1 s | začátek | 5 s |
| $Q_{t\alpha}$ | 30 | $Q_{t\beta}$ | 40 |
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 0.5 Hz | 1 | 0.5 Hz | 2 |
| 1 Hz | 2 | 1 Hz | 4 |
| 3 Hz | 5 | 3 Hz | 10 |
| 4 Hz | 10 | 4 Hz | 20 |
| 6 Hz | 20 | 6 Hz | 40 |

c)

| 1. signál | | 2. signál | |
|---------------|-----------|--------------|-----------|
| začátek | 1 s | začátek | 5 s |
| $Q_{t\alpha}$ | 30 | $Q_{t\beta}$ | 40 |
| frekvence | amplituda | frekvence | amplituda |
| 0.5 Hz | 1 | 0.5 Hz | 10 |
| 1 Hz | 2 | 1 Hz | 10 |
| 3 Hz | 5 | 3 Hz | 10 |
| 4 Hz | 10 | 4 Hz | 10 |
| 6 Hz | 20 | 6 Hz | 10 |

zvolte rychlosti seismických vln:

$$v_p = 5800 \text{ ms}^{-2}$$

$$v_s = 3360 \text{ ms}^{-2}$$

zvolte faktor Q pro útlum v závislosti na vzdálenosti:

$$Q_p = 250$$

$$Q_s = 150$$

Měňte vzdálenost x od 10 km do 100 km.

Mění se frekvenční charakteristika signálu? Pokud ano, jak?

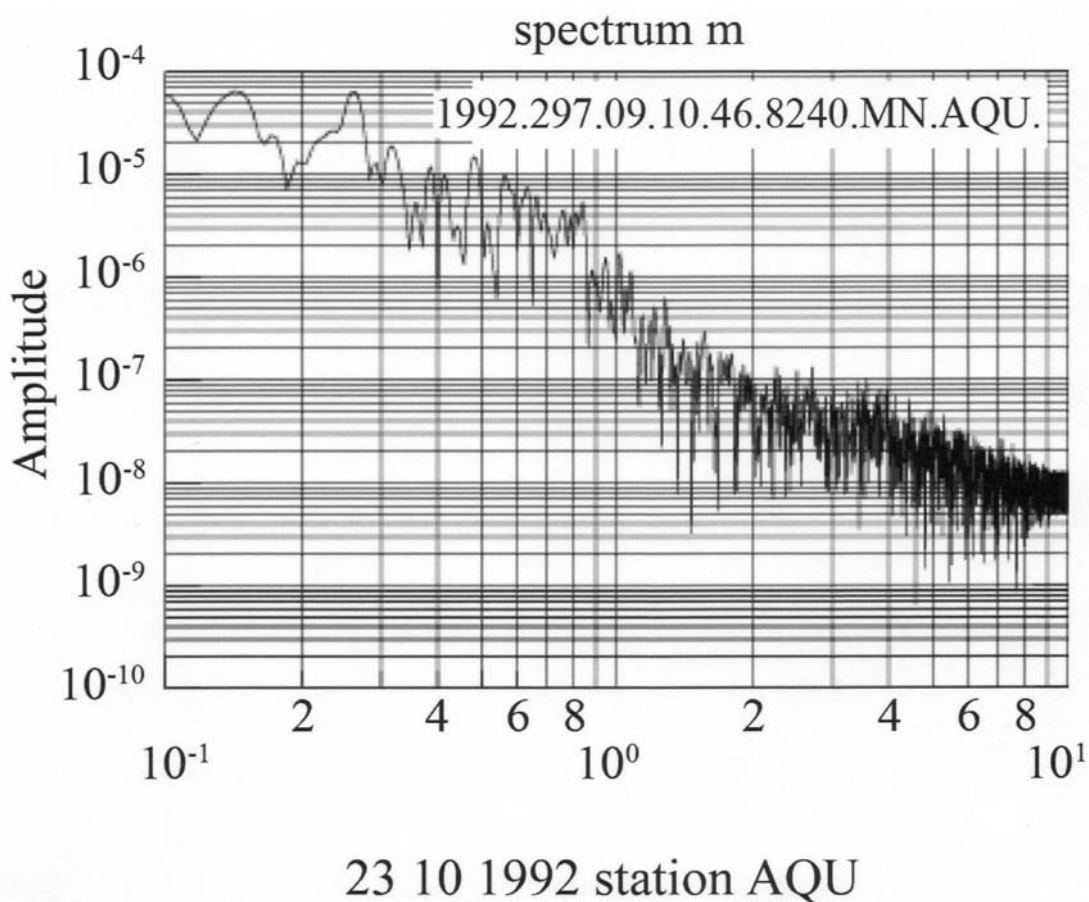
Mění se poměr maximální amplitudy prvního a druhého signálu ("P" a "S" vlny)? Pokud ano, jak?

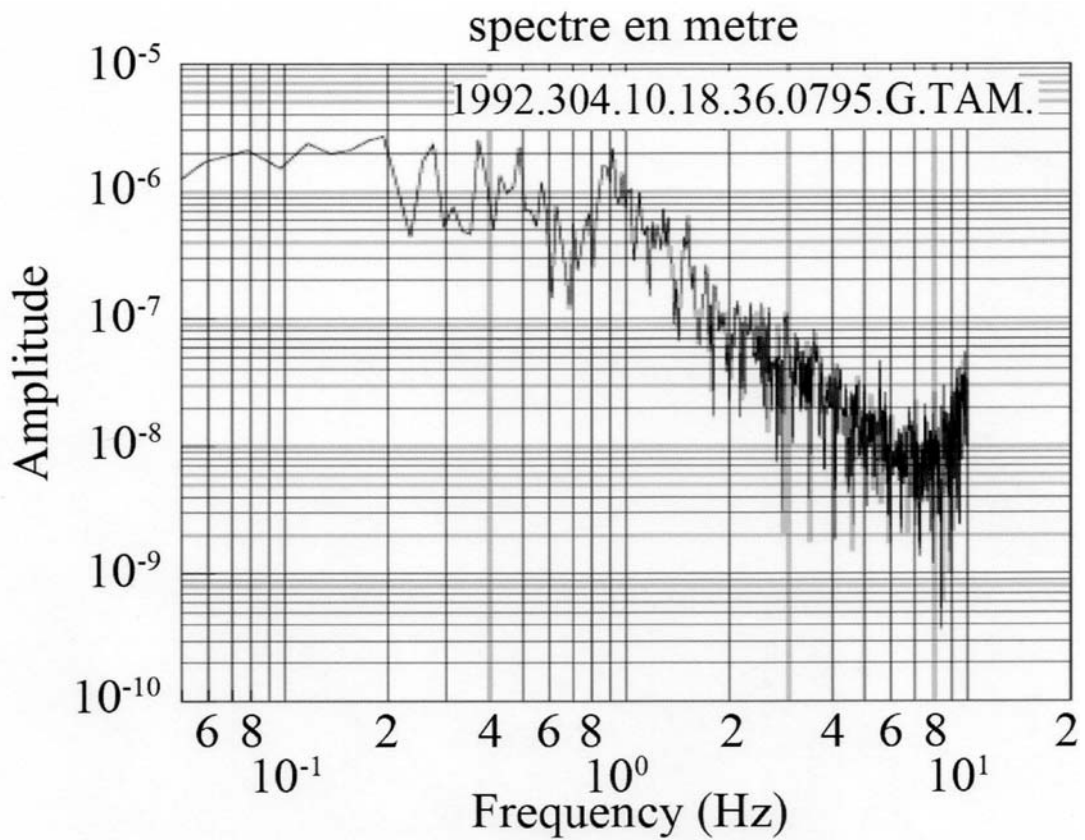
Příklad 8: Spektrum zemětřesení a rohová frekvence

Využijte spektra posunutí středně silných zemětřesení určená ze záznamů pořízených v regionálních vzdálenostech k řešení následujících úkolů (spektra jsou převzata z práce: Bensaïd et al. 2014):

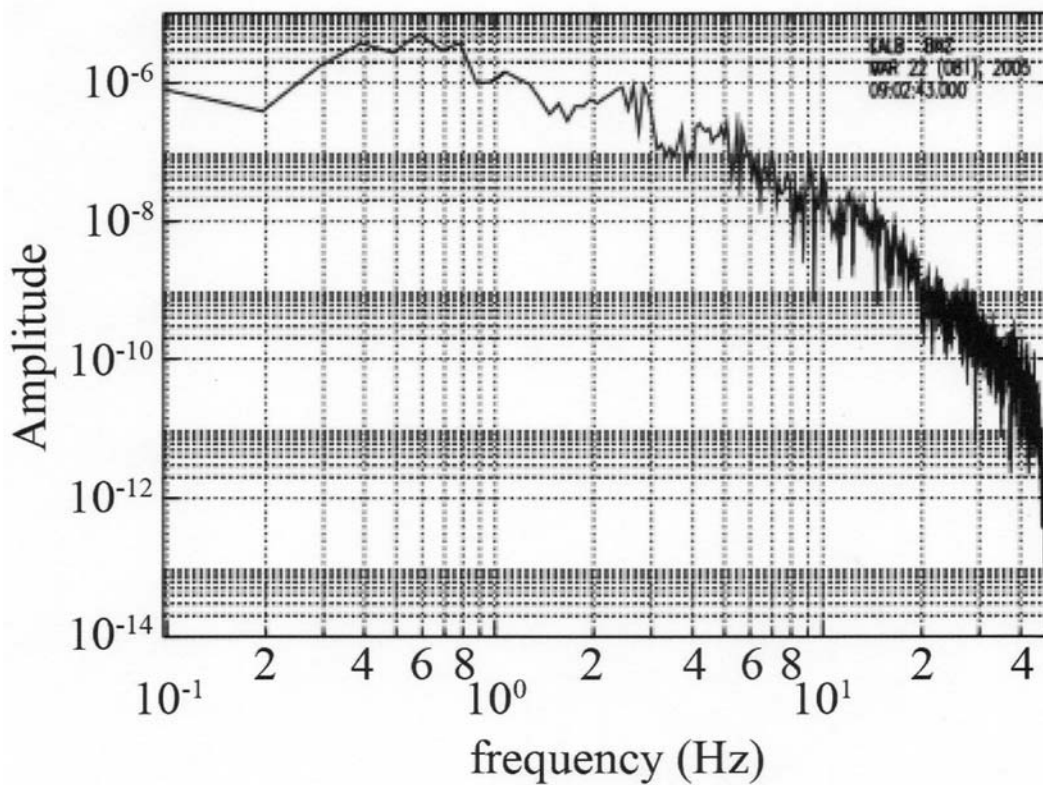
1. Určete ploché a klesající části spektra.
2. Určete hodnoty amplitudy ploché části spektra.
3. Určete hodnoty rohové frekvence f_c .
4. Porovnejte amplitudy ploché části spektra a rohové frekvence jednotlivých záznamů. Co z nich plyne, jestliže o daných jevech a záznamech víme následující údaje:

23/10/1992, magnitudo =5.2, epicentrální vzdálenost stanice AQU = 1980 km
 30/10/1992, magnitudo =5.1, epicentrální vzdálenost stanice TAM = 1357 km
 22/03/2005, magnitudo =4.7, epicentrální vzdálenost stanice EALB = 100 km
 11/08/2007, magnitudo =5.1, epicentrální vzdálenost stanice IFR = 43 km
 21/01/2008, magnitudo =4.1, epicentrální vzdálenost stanice M018 = 175 km
 25/01/2008, magnitudo =4.3, epicentrální vzdálenost stanice IFR = 111 km
 28/09/2008, magnitudo =4.5, epicentrální vzdálenost stanice M019 = 225 km
 28/09/2008, magnitudo =4.5, epicentrální vzdálenost stanice M018 = 133 km

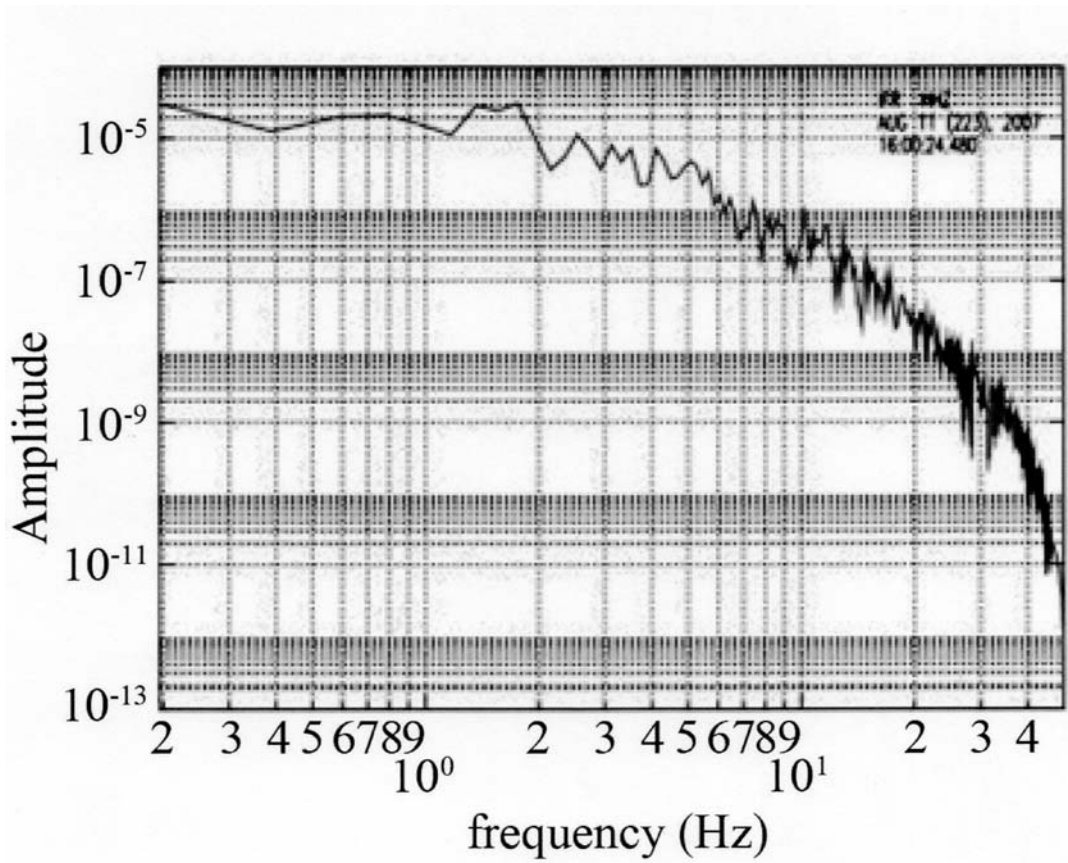




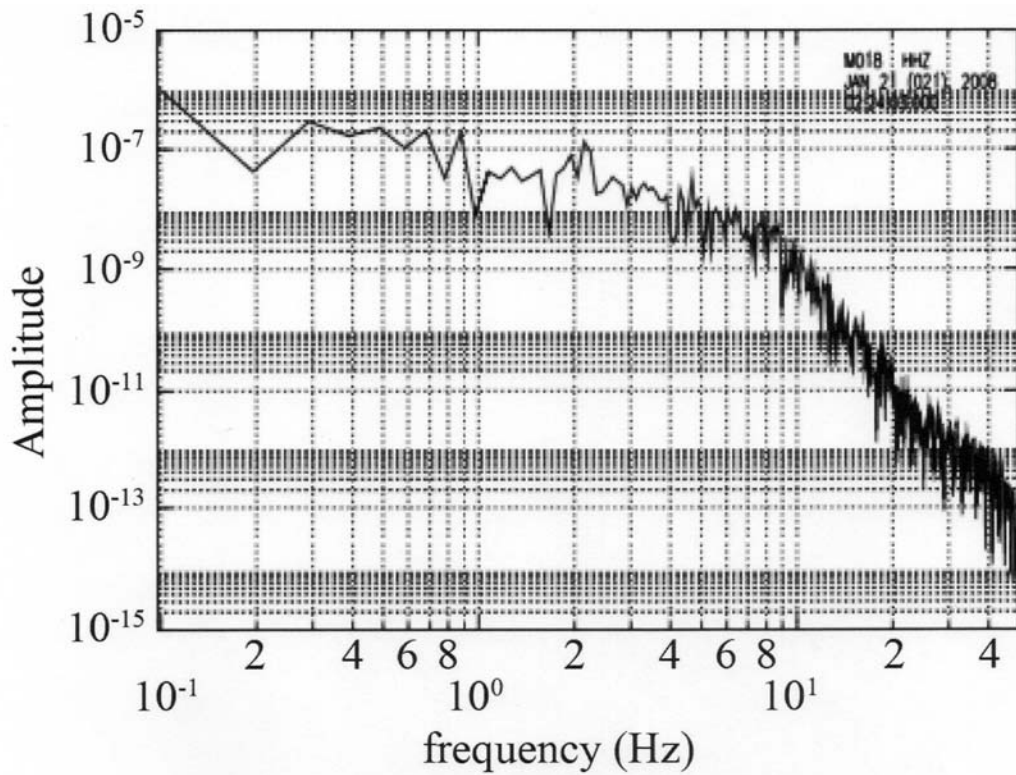
30 10 1992 station TAM



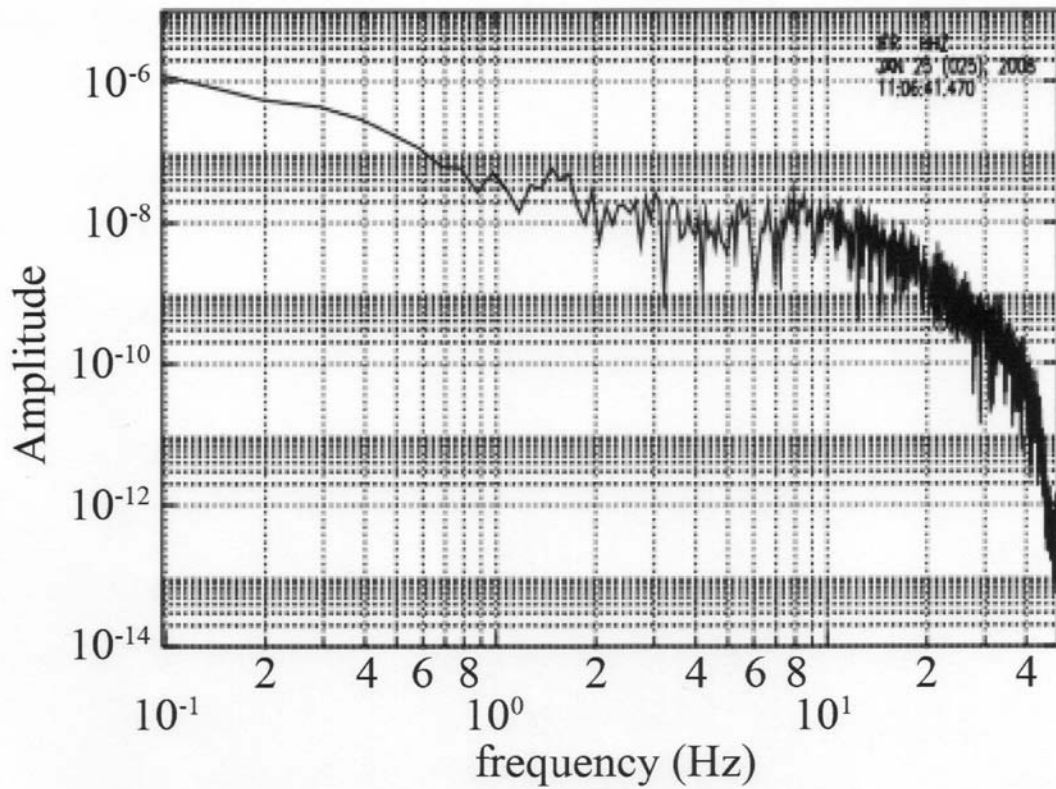
22 03 2005 station EALB (IGN)



11 08 2007 station IFR (WM)

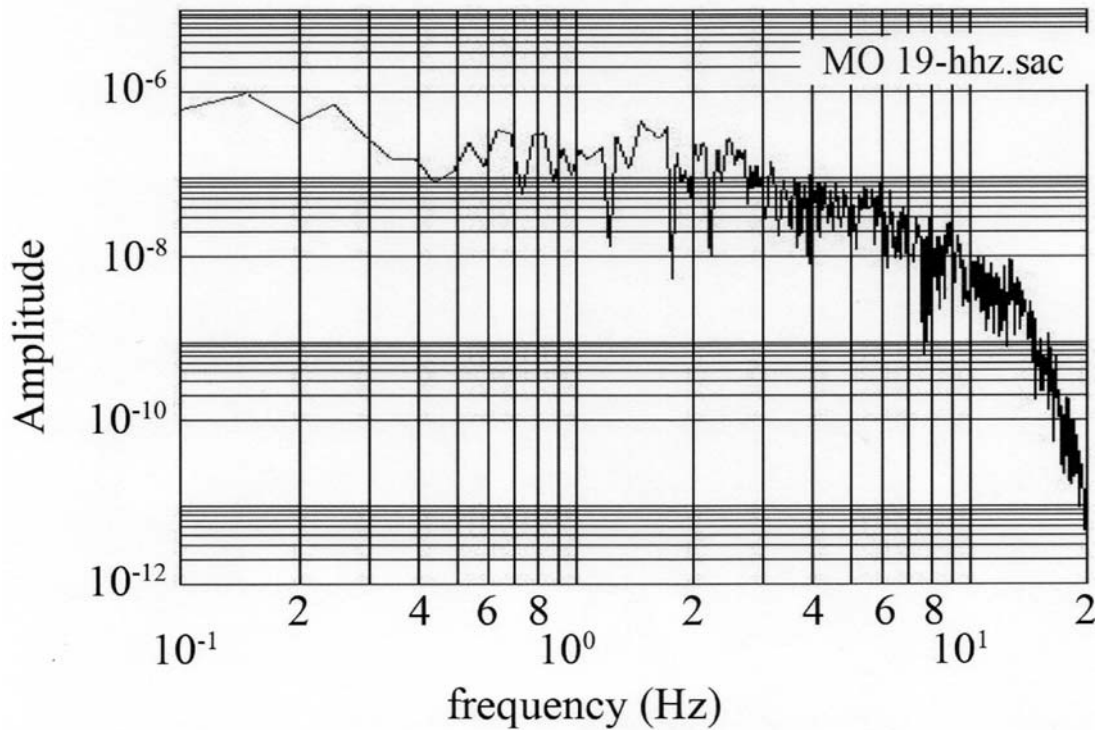


21 01 2008 station M018 (Siberia)

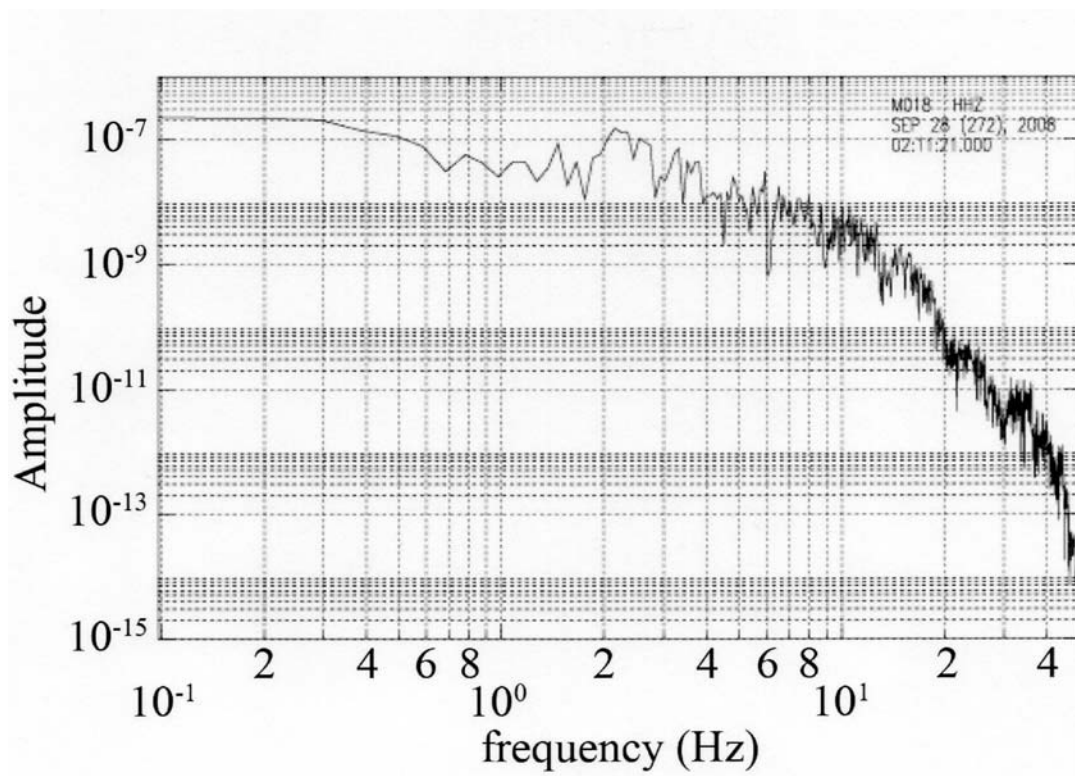


25 01 2008 station IFR (WM)

spectre en metre



28 09 2008 station M019 (Siberia)



28 09 2008 station M018 (Siberia)

IV. Digitalizace a filtrace

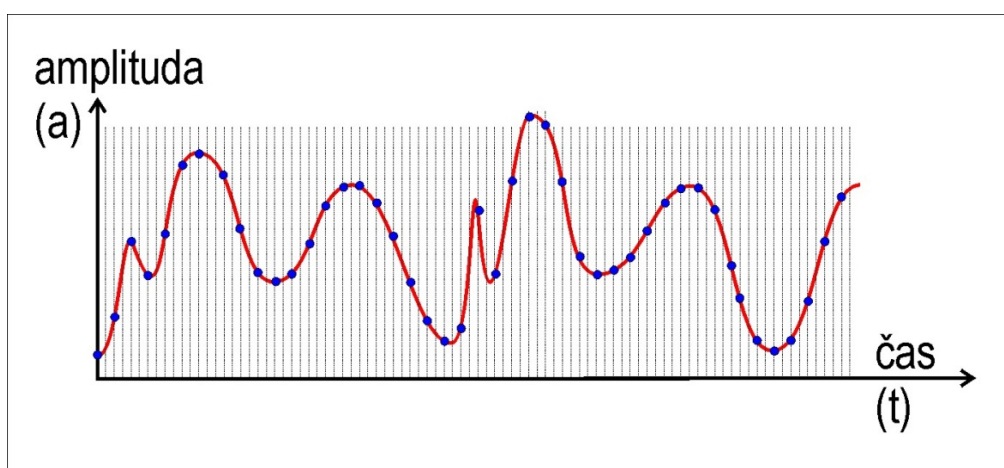
Jak plyne z předešlých kapitol, seismický signál je během svého průchodu od zdroje k místu registrace zásadně ovlivňován charakteristikou horninového prostředí. Dále je pozměněn také v průběhu vlastního měření seismometrem. Tyto vlivy nelze nijak obejít, horninové prostředí a seismometr bude charakter signálu ovlivňovat vždy, bez ohledu na to, zda si to my sami přejeme či nepřejeme.

Při následném zpracování dat ovšem bývá rutinně přistupováno k dalšímu ovlivnění charakteristiky signálu, který není z principu nezbytně nutný, ale který je užitečný a bez kterého by některé procedury zpracování signálu byly krajně obtížné. Měníme naměřený signál, protože si to přejeme, a přejeme si to proto, že nám to značně usnadňuje další práci směřující k určení charakteristik zdroje původního signálu. Ke zmíněným vlivům, aplikovaným na signál obvykle záměrně, patří především vlivy digitalizace a filtrace signálu.

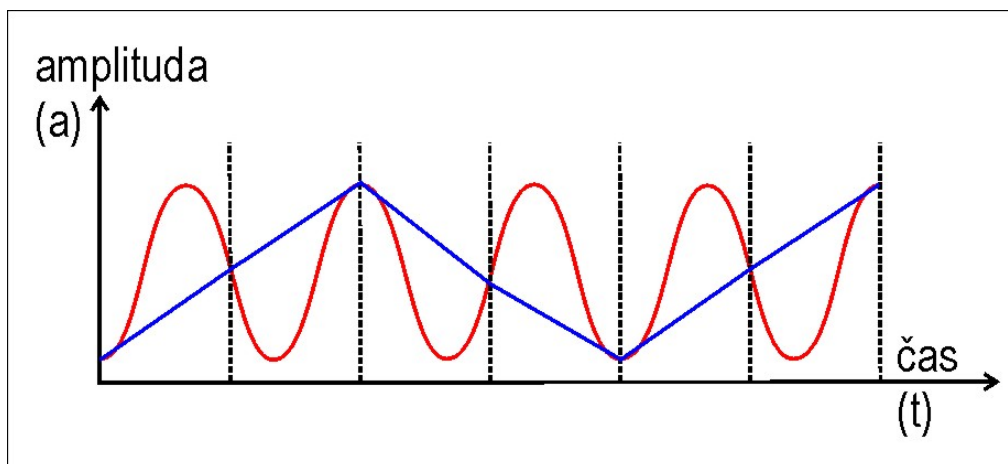
IV. a) Digitalizace signálu

Výstupem seismometru je spojitý (analogový) signál, který nelze uložit ve formě počítačového souboru o konečné velikosti. Analogový záznam signálu je totiž obecně popsán nekonečně velkým množstvím prvků – buď nekonečným množstvím bodů na křivce popisující amplitudu v závislosti na čase, nebo nekonečným počtem sinusovek, které svým součtem skládají záznam při Fourierově expanzi. Proto je nezbytnou podmínkou pro počítačové zpracování záznamu jeho digitalizace, kdy je spojitý záznam převáděn na nespojitý, obsahující konečný počet prvků. Amplitudy nespojitého signálu jsou pak známy jen pro předem definované diskrétní body na časové ose (obr. IV.1). Informace o amplitudách mezi těmito body se při digitalizaci ztrácí a proces digitalizace je proto nevratný.

Digitální záznam je tím detailnější, čím více bodů s odečtenou amplitudou připadá na daný časový úsek. Počet bodů odečtených v jedné sekundě záznamu nazýváme **vzorkovací frekvencí**. Tato frekvence významně ovlivňuje tvar digitálního záznamu. Pokud je vzorkovací frekvence mnohem vyšší, než frekvence původního záznamu, pak jej diskrétní digitální záznam popisuje dostatečně podrobně a původní funkci pak lze z digitálního záznamu dostatečně věrně rekonstruovat. Pokud je ale vzorkovací frekvence vzhledem k frekvenci původního záznamu nízká, pak diskrétní záznam nemůže popsat vyšší frekvence původní funkce. Spojíme-li navíc diskrétní body rovnou čarou (modrá křivka) získáme funkci, která má mnohem nižší frekvenci, než původní funkce, a původní funkci se nijak nepodobá (obr. IV.2). Tomuto jevu se říká **alias-efekt**.



Obr. IV.1: Schematické znázornění vzorkování signálu při procesu digitalizace. Digitální záznam obsahuje údaje o amplitudách pouze pro vybrané diskrétní body (modrá kolečka). Informace o průběhu křivky původního analogového záznamu (červená čára) mezi vybranými body je při procesu digitalizace nenávratně ztracena.



Obr. IV.2: Ukázka alias-efektu. Původní signál (červená čára) je vzorkován příliš nízkou vzorkovací frekvencí, diskrétní body pak definují signál o zcela jiné (nižší) frekvenci (modrá křivka).

K alias-efektu dochází, pokud je frekvence signálu vyšší, než polovina vzorkovací frekvence. Aby tedy mohl být signál digitalizován, musí být vzorkovací frekvence alespoň dvakrát větší, než je frekvence signálu. Tato mezní frekvence signálu, který je možné při dané vzorkovací frekvenci digitalizovat (tj. polovina zvolené vzorkovací frekvence), se nazývá **Nyquistova frekvence**:

$$f_{Ny} = \frac{f_s}{2} \quad (\text{rovnice IV.1})$$

kde f_{Ny} je Nyquistova frekvence a f_s je vzorkovací frekvence digitalizovaného signálu.

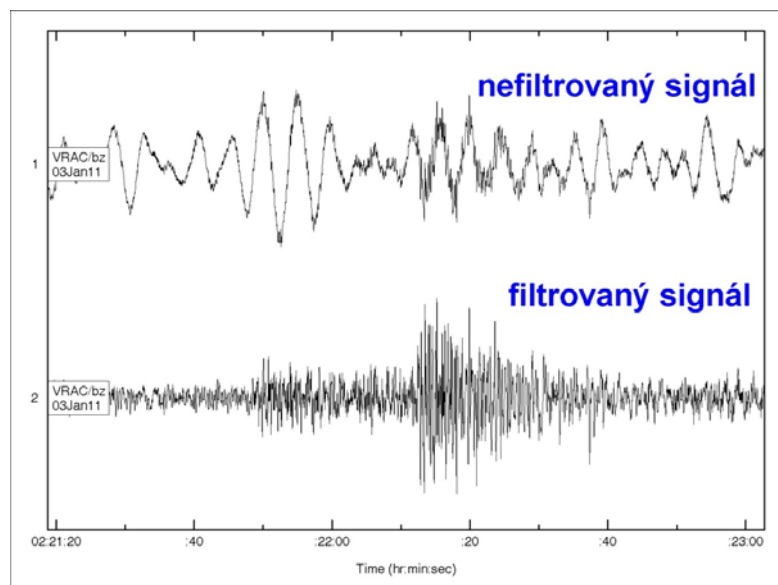
Aby tedy mohl být signál digitalizován, aniž by došlo k alias-efektu, musí být zajištěno, že nebude obsahovat žádné vyšší frekvence, než je Nyquistova frekvence. Vyšší frekvence musí být ze signálu odstraněny. Proces, který ze signálu odstraní určité rozmezí frekvencí a jiné ponechá, se nazývá **filtrace**. Filtr odstraňující ze signálu všechny frekvence vyšší, než je frekvence Nyquistova, je nazýván anti-alias filtrem.

IV. b) Filtrace seismických dat

K filtraci signálu je nutné přistoupit i z jiných důvodů, než je odstranění vlivu alias efektu při digitalizaci. Dalším typickým důvodem filtrace je např. odstranění nežádoucího šumu. Šumem se rozumí signál, který není součástí seismických vln generovaných sledovaným jevem, a který naopak tyto vlny (tzv. užitečný signál) ruší (obr. IV.3).

Seismický šum vykazuje celosvětově jisté podobnosti, pokud jde o jeho spektrum. Lze v něm rozlišit dvě významná maxima. První maximum je nízkofrekvenční (převládající frekvence mají hodnoty desetiny až setiny Hz) a jeho původ je předpokládán v přírodních procesech (nárazy velkých vln na mořské pobřeží, které se šíří hluboko do vnitrozemí ve formě signálu tvořícího nízkofrekvenční složku seismického šumu – tzv. **mikroseismy**). Druhé maximum ve spektru šumu má obvykle frekvence o řádu jednotek až desítek Hz a je většinou představováno průmyslovým šumem (doprava, průmyslová činnost apod.).

Podobně jako u seismického šumu, také ve spektru užitečného signálu určité frekvence dominují a jiné mají jen zanedbatelný význam. Filtrace, při které jsou ponechány dominantní frekvence užitečného signálu, zatímco ostatní frekvence jsou potlačeny (hlavně frekvence dominující v šumu), pak výrazně usnadní další zpracování takového seismického signálu a odečtení potřebných údajů pro výpočet parametrů zdroje.



Obr. IV.3: Ukázka rozdílu mezi nefiltrovaným (nahore) a filtrovaným signálem (dole), kdy z filtrovaného signálu byly odstraněny rušivé frekvence šumu.

Lze rozlišit čtyři základní typy filtru podle toho, jaký úsek frekvencí chceme odstranit a jaký chceme zachovat (obr. IV.4):

Dolní propust: propouští nezměněný dlouhoperiodický signál, signál s frekvencí vyšší, než je mezní frekvence (rohová frekvence) je zcela potlačen.

Horní propust: propouští nezměněný vysokofrekvenční signál, signál s nižší vyšší, než je mezní frekvence (rohová frekvence) je zcela potlačen.

Pásmová propust: propouští nezměněný signál v pásmu mezi dvěma předem zvolenými frekvencemi, ostatní signál je zcela potlačen.

Pásmová zádrž: potlačí signál v pásmu mezi dvěma předem zvolenými frekvencemi, ostatní signál propustí nezměněný.

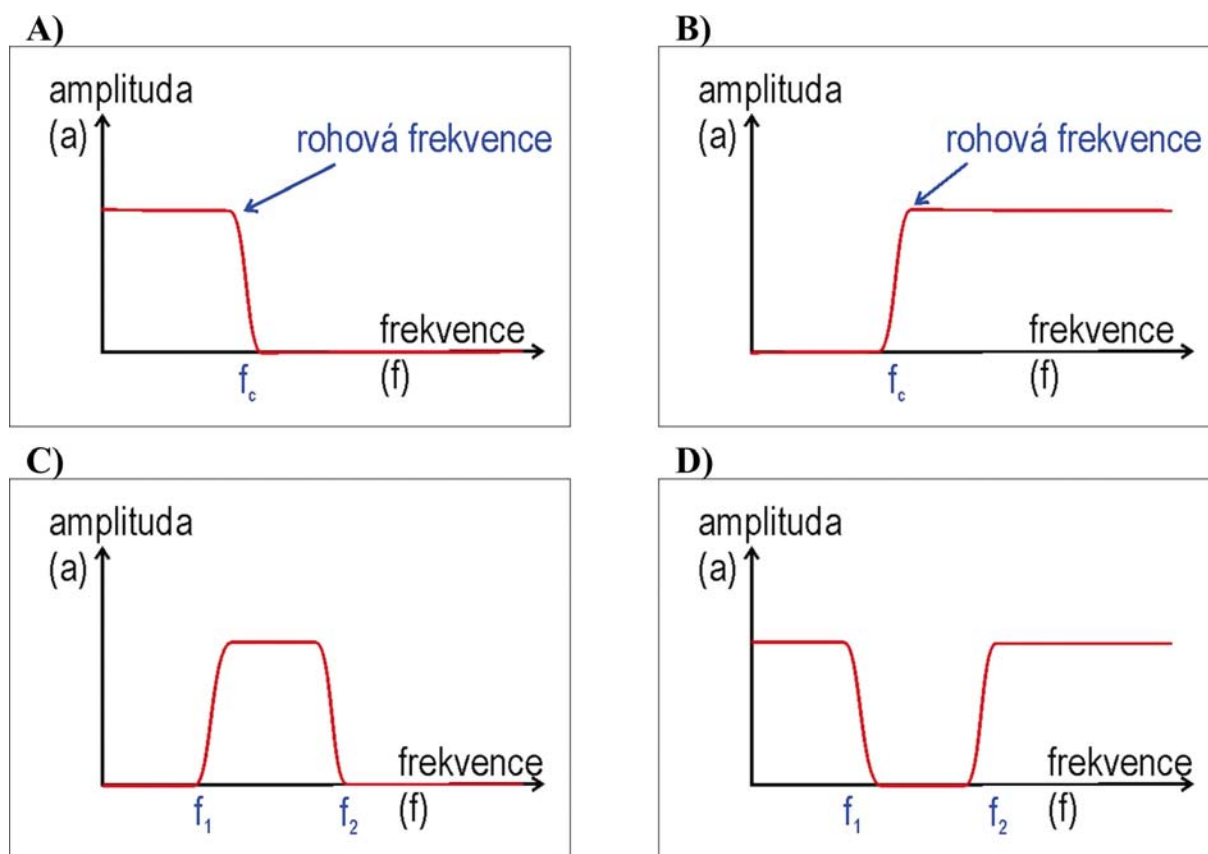
V každém případě lze filtr chápat jako zařízení (či proces), do něhož vstupuje původní vlnová funkce $u_a(t)$ a z něhož vystupuje nová, pozměněná funkce $u_b(t)$, přičemž změna spočívá v potlačení nežádoucích frekvencí. Vztah mezi měřenou funkcí $u_a(t)$ a výstupní funkcí $u_b(t)$ je možné (podobně jako u seismometru) matematicky vyjádřit pomocí další funkce $h(t)$, kterou tomto případě nazýváme **odezvou filtru**:

$$u_b(t) = u_a(t) * h(t) \quad (\text{rovnice IV.2})$$

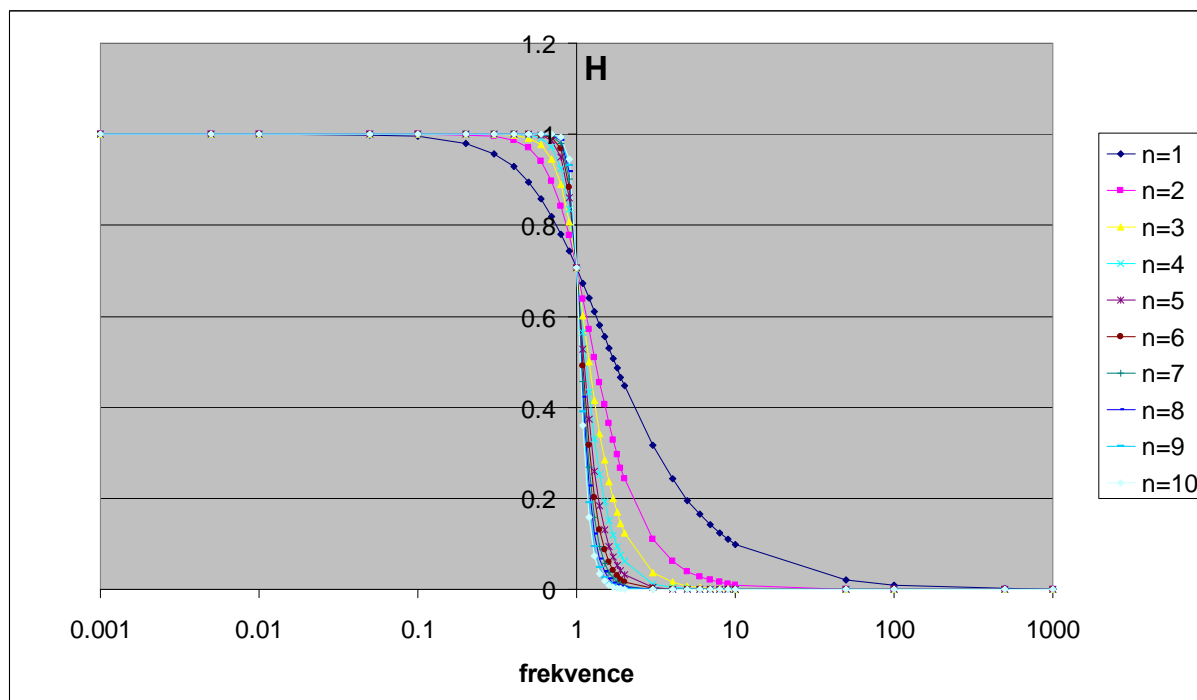
Existuje velké množství způsobů filtrace lišících se konkrétním charakterem odezvy filtru, ať již jde o filtry ve smyslu zařízení měnících charakteristiku analogového signálu, nebo ve smyslu digitálních procesů měnících digitální záznam. Jejich podrobná diskuse by dalece přesahovala rámec lekce, pro kterou je tvořen tento text. Proto se omezíme na stručnou diskusi pouze jednoho typu filtru, tzv. **Butterworthova filtru**, který je v rámci seismologie využíván nejširěji. Odezvu Butterworthova filtru typu dolní propustě $H(\omega)$ si můžeme vyjádřit vztahem:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} \quad (\text{rovnice IV.3})$$

kde ω je úhlová frekvence ($\omega = 2\pi f$), ω_0 je rohová úhlová frekvence filtru a n je řád filtru.



Obr. IV.4: Schematické znázornění křivek odezvy různých typů filtrů: A) dolní propust; B) horní propust; C) pásmová propust; D) pásmová zádrž.



Obr. IV.5: Odezva H Butterworthova filtru typu dolní propust' při hodnotách n od 1 do 10 (blíže viz text).

Grafické znázornění odezvy $H(f)$ Butterworthova filtru (obr. IV.5) ukazuje jeho výhody, důležité pro zpracování seismologických dat. K výhodám patří zejména plochá charakteristika funkce odezvy pro frekvence, které filtr propouští. To znamená, že amplitudy signálu těchto frekvencí nejsou filtrací zkreslené. Strmost křivky odezvy Butterworthova filtru mezi plochou částí propuštěných frekvencí a částí zadržovaných frekvencí záleží na parametru n (obr. IV.5). Tato strmost je v případě Butterworthova filtru nižších řádů obecně menší, než strmost jiných typů filtrů (např. Čerbyševův filtr, eliptický filtr apod.), tato nevýhoda může být ale kompenzována použitím filtru vyšších řádů (vyšších hodnot parametru n).

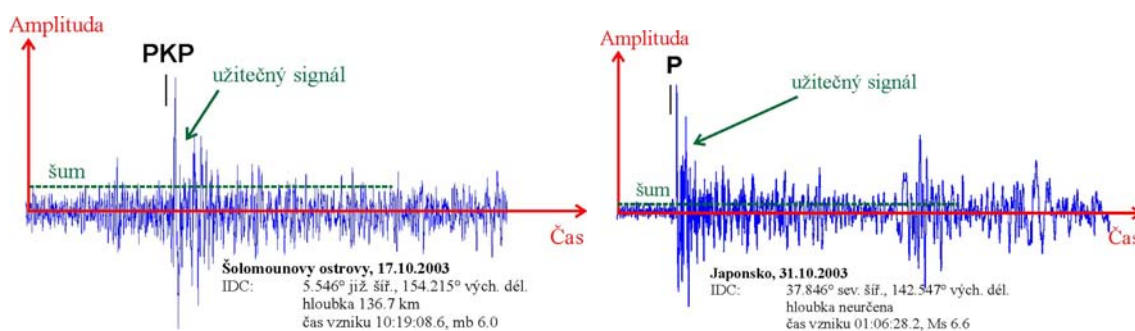
Vzhledem k tomu, že filtrovaný signál $u_b(t)$ je výsledkem konvoluce původního signálu $u_a(t)$ a funkce odezvy filtru $h(t)$ (rovnice IV.1) a vzhledem k charakteru operace konvoluce (viz obr. III.3) může jakákoli část původního signálu $u_a(t)$ ovlivňovat jakoukoli část nově odvozené funkce $u_b(t)$. To znamená, že ta část původního signálu $u_a(t)$, která obsahuje tzv. užitečný signál, tj. signál odpovídající fázi seismického jevu, který doputoval k dané seismické stanici v čase t_{ph} , může při filtraci ovlivnit také tu část nové funkce signálu $u_b(t)$, která předchází času t_{ph} tedy příchodu zkoupané seismické fáze. Ve filtrovaném záznamu se tak mohou před začátkem seismické fáze objevit některé artefakty způsobené filtrací, které mohou být mylně považovány za součást vlastní seismické fáze a vést k chybnému odečtu času příchodu seismické fáze t_{ph} .

Dalším prvkem, na který je třeba dát při filtraci pozor, je fázový posun. V části I a II jsme si vysvětlovali, že funkce popisující signál ve formě Fourierovy řady a její Fourierova transformace jsou komplexní (viz rovnice I.20, I.21, II.9 a II.10). Tedy, že jejich koeficienty jsou komplexní čísla, která v sobě nesou informaci nejen o amplitudě sinusovky dané dílčí frekvence, ale také o její fázi. My se v našem kurzu soustředíme na amplitudovou část spektra a problematiku fázového spektra zanedbáváme. Na tomto místě je ale přece jen zapotřebí vzít ho alespoň vzdáleně v úvahu. Filtrace totiž může měnit nejen amplitudové, ale také fázové spektrum. A posunutí fáze pak může mít za následek takové tvarové změny užitečného signálu, kvůli kterým může být přehlednutá počáteční část sledované seismické fáze, což by opět vedlo k chybě odečtu času příchodu t_{ph} této seismické fáze. Diskutované fázové posunutí lze ovšem při filtraci kompenzovat (tzv. "zero-phase" filtry).

IV. c) Nasazení seismické fáze

Obvyklým cílem základního zpracování seismického signálu je rozlišení jednotlivých seismických fází charakterizovaných vlnovými klubkami, odečet času příchodu každé jednotlivé seismické fáze do místa detekce a určení maximální amplitudy a odpovídající periody jednotlivých fází. Odečet času příchodu jednotlivé seismické fáze na záznamu signálu pořízeném seismickou stanicí v místě detekce je označován také jako **nasazení** seismické fáze.

Nasazení seismické fáze tedy vyžaduje dobré rozpoznání začátku vlnového klubka, které danou seismickou fází reprezentuje. Přesnost, s jakou může být čas začátku vlnového klubka rozpoznán, závisí na více faktorech. Zkusme si na tomto místě zmínit některé z těch zásadních.



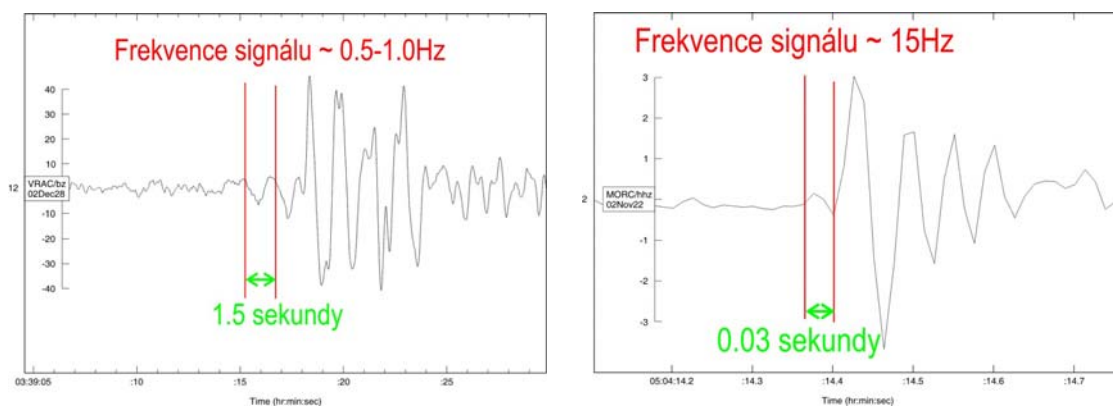
Obr. IV.6: Ukázka dvou signálů vzdálených zemětřesení s odlišným poměrem amplitudy seismické fáze a šumu (vlevo - zašuměný záznam s nízkým poměrem amplitudy seismické fáze a šumu, na kterém je obtížné rozeznat začátek seismické fáze; vpravo - záznam s vyšším poměrem amplitudy signálu a šumu umožňující dostatečně přesný odečet času příchodu seismické fáze).

Pro dobré zpracování signálu seismické fáze je velmi významným faktorem poměr mezi amplitudou signálu dané seismické fáze a amplitudou šumu (obr. IV.6). Při malém poměru amplitudy signálu seismické fáze a amplitudy šumu může být obtížné danou seismickou fází na záznamu vůbec detekovat, natož odečíst čas začátku jejího vlnového klubka. Problém s vysokou úrovní šumu může být řešen filtrací, pokud se frekvence šumu liší od frekvence užitečného signálu. Často je ale záznam rušen šumem, jehož frekvence je podobná frekvenci užitečného signálu. V takovém případě (při velké úrovni šumu) může docházet k velkým chybám při odečtu času příchodu seismických fází.

Vedle úrovně šumu může přesnost odečtu začátku vlnových klubek jednotlivých fází limitovat také tvar těchto vlnových klubek. Především jde o charakter tvaru začátku daného vlnového klubka. V případě impulsního charakteru začátku vlnového klubka má již jeho první zákmit velkou hodnotu amplitudy (v některých případech, zejména u primárních fází vzdálených jevů, může být již s prvním zákmitem spojena maximální amplituda dané fáze), což zvyšuje šanci na dostatečně vysoký poměr mezi amplitudou seismické fáze a šumu a tedy na možnost dostatečně přesného odečtu času příchodu seismické fáze. V případě pozvolného nárůstu amplitud jednotlivých zákmitů na začátku vlnového klubka však naopak může být krajně obtížné (až nemožné) odečíst přesně čas začátku daného vlnového klubka, protože amplitudy prvních zákmitů vlnového klubka mohou být oproti amplitudě šumu nízké, někdy i menší než šum.

Důležitým faktorem v odečtu času příchodu seismické fáze je dále vzorkovací frekvence záznamu a převládající frekvence sledované seismické fáze. Charakter digitálního záznamu mezi jednotlivými vzorky neznáme. Nelze proto postihnout změnu v záznamu s větší přesností, než je velikost vzorku. I v případě impulsního charakteru začátku vlnového klubka sledované seismické fáze a zanedbatelné úrovně šumu tedy nelze očekávat větší přesnost odečtu času nasazení seismické fáze, než je přesnost s chybou odpovídající délce jednoho vzorku (obvykle se bude ale chyba pohybovat spíše na úrovni násobků délky vzorku).

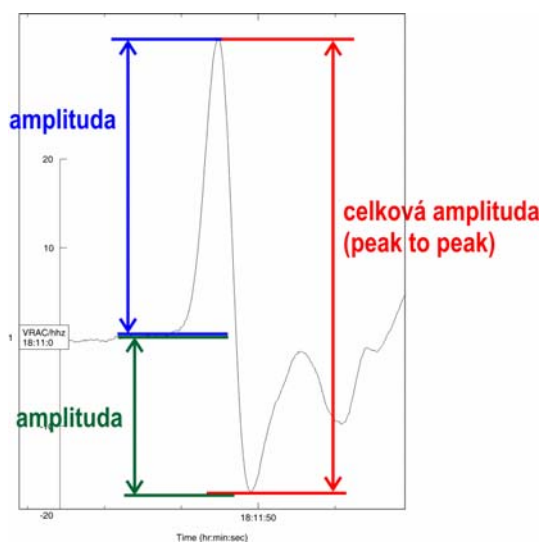
S ohledem na nutnost ochrany před alias-efektem (viz část IV.a) jsou ovšem v záznamu zachovány pouze ty části signálu, jejichž frekvence je větší než dvojnásobek vzorkovací frekvence. Větší význam pro přesnost odečtu příchodu seismické fáze má proto převládající frekvence užitečného signálu, a to zejména v případě vyšší úrovně šumu a v případě pozvolného nástupu vlnového klubka seismické fáze. Nad úroveň šumu budou v případě záznamu s velkým šumem vycházet především části vlnového klubka s vyššími hodnotami amplitudy. Přehlédnutí prvních zákmitů vlnového klubka tak může vést k chybě v odečtu času nasazení seismické fáze, která je srovnatelná s převládající periodou (respektive s prvními násobky převládající periody) signálu dané seismické fáze (obr. IV.7). Větší přesnosti odečtů nasazení tak lze rutinně dosahovat u záznamů lokálních a regionálních jevů, jejichž signál se vyznačuje vyšší převládající frekvencí, oproti záznamům jevů vzdálených (teleseismických).



Obr. IV.7: Vliv převládající frekvence signálu seismické fáze na přesnost odečtu času nasazení dané seismické fáze (vlevo - signál vzdáleného zemětřesení s převládající frekvencí přibližně 0.5 až 1 Hz, chybné určení času začátku vlnového klubka na úrovni dvou sousedních maxim vede k chybě odečtu cca ± 1.5 s; vpravo - signál lokálního seismického jevu s převládající frekvencí přibližně 15 Hz, chybné určení času začátku vlnového klubka na úrovni dvou sousedních maxim vede k chybě odečtu cca ± 0.03 s).

Důležitým prvkem základního zpracování seismického signálu je rovněž odečet maximální amplitudy dané seismické fáze a odpovídající frekvence. Tento údaj je zásadní například pro určení magnitudy seismického jevu.

Záporná a kladná výchylka obvykle není stejná, proto není amplituda odečítána jako jedna z těchto výchylek, ale přihlíží se k oběma. Amplituda, která je součtem záporné a kladné výchylky, se nazývá **celková (nebo totální) amplituda** (peak-to-peak amplituda - viz obr. IV.8). Do vzorců pro výpočet magnitudy se ale někdy dosazují poloviční hodnoty celkové amplitudy (tzv. half-peak-to-peak amplituda).



Obr. IV.8: Schematické znázornění odečtu celkové (peak-to-peak) amplitudy seismické fáze.

Příklad 9: Digitalizace dat a alias efekt

- využijeme excelovský soubor signál3.xls
- budeme pracovat v listu „vzorkování“
- jako „původní funkce“ není ve skutečnosti zobrazen analogový signál, ale nespojitý signál se vzorkováním 1000 Hz – pro účely tohoto cvičení je ale tento postup dostatečný

1. Nejprve volte frekvence signálu ve sloupci P (SIN), pro který je sestavena složená křivka funkcí sinus:

a)

| frekvence | amplituda |
|-----------|-----------|
| 10 | 1 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 40, 30, 15, 8, 3

b)

| frekvence | amplituda |
|-----------|-----------|
| 1 | 1 |
| 50 | 1 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 40, 30, 15, 7, 4, 1.8

c)

| frekvence | amplituda |
|-----------|-----------|
| 10 | 1 |
| 31 | 10 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 45, 35, 15, 8

Změnil se nějak tvar signálů?

Je frekvence výstupního signálu stejná, nebo rozdílná, oproti vstupnímu signálu? Pokud se liší, jak se liší?

2. Nyní volte frekvence signálu jak ve sloupci P (SIN), pro který je sestavena složená křivka funkcí sinus, tak ve sloupci Q (COS), pro který je sestavena složená křivka funkcí cosinus:

a)

| frekvence | amplituda SIN | amplituda COS |
|-----------|---------------|---------------|
| 10 | 0 | 1 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 40, 25, 11

b)

| frekvence | amplituda SIN | amplituda COS |
|-----------|---------------|---------------|
| 5 | 1 | 1 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 40, 15, 6

c)

| frekvence | amplituda SIN | amplituda COS |
|-----------|---------------|---------------|
| 10 | 1 | 0 |
| 20 | 0 | 1 |

Volíme postupně různé vzorkovací frekvence: 1000, 200, 80, 30, 22, 15, 8, 3

Změnil se nějak tvar signálů?

Je frekvence výstupního signálu stejná, nebo rozdílná, oproti vstupnímu signálu? Je fáze výstupního signálu stejná, nebo rozdílná, oproti vstupnímu signálu? Pokud se frekvence či fáze liší, jak se liší?

Příklad 10: Filtrace dat a nasazení času příchodu seismické fáze

- pro práci s daty využijeme program **SGRAPH** (Abdelwahed 2010, 2012)

- obecný postup:

- a) načtěte příslušná data
- b) vhodně zfiltrujte
- c) odečtěte časy příchodů detekovaných seismický fází
- d) zkuste odhadnout, o jaké seismické fáze se jedná

1. výrazné jevy:

- a) soubor brg20090721_0604.gse (stanice BRG, Polsko, Lubin, M=4.0)
- b) soubor wern20081010_0807.gse (stanice WERN, ČR, západní Čechy, M=3.7)
- s) soubor brg20090809_1106.gse (stanice BRG, Japonsko, souostroví Izu, M=7.1)
- d) soubor VRAC130924113600-015209.GSE (stanice VRAC, Pákistán, M=7.7)

2. jevy s užitečným signálem skrytým v šumu:

- a) soubor KRUC131002052500-014502.GSE (stanice KRUC, Rakousko, M=2.1)
- b) soubor BRG20131005_1013.GSE (stanice BRG, Německo, M=2.0)
- c) soubor CLL20131001_1946.GSE (stanice CLL, Středoatlantický hřbet, M=5.1)
- d) soubor MORC131005210800-014811.GSE (stanice MORC, Fidži, M=4.8)

3. U libovolného, vámi zvoleného jevu, porovnejte spektra vlnové funkce před a po filtraci.

Otázka pro zápočet:

Použijte soubor KRUC131003001700-014544.GSE (stanice KRUC, Rakousko, M=1.9).

Podle potřeby zfiltrujte a odečtěte čas příchodu alespoň jedné seismické fáze.

Odpověď: Čas příchodu zvolené seismické fáze je:

část B: Seismický paprsek

Seismický signál lze chápat také jako seismický paprsek šířící se horninovým prostředím od zdroje. V nehomogenním prostředí se pak takový paprsek může odrážet a lámat, popřípadě může docházet k jeho difrakci či interferenci. Přitom je vždy možné tento paprsek charakterizovat jednak rychlostí seismického signálu podél daného paprsku, jednak orientací tohoto paprsku v prostoru, tedy jeho azimutem a jeho inklinací.

V. Dráha seismického paprsku

Zkusme se nejprve zamyslet nad tím, jak bude probíhat seismický paprsek horninovým prostředím v závislosti na rozložení rychlostí seismických vln v tomto horninovém prostředí.

V. a) Homogenní prostředí

Nejjednodušším možným modelem rozložení rychlostí v horninovém prostředí je homogenní model, který předpokládá, že v daném prostoru je rychlost seismických vln všude stejná. V takovém prostředí neexistují rychlostní rozhraní, nemůže zde tedy docházet k odrazu ani lomu seismického paprsku. Lze tedy sledovat pouze přímé vlny, které se budou šířit od zdroje k místu detekce nejkratší možnou dráhou. Paprsky tedy budou rovné, bez zakřivení, a bude je možné aproximovat úsečkou o délce D . Pro dobu šíření t seismického signálu od zdroje k místu detekce bude platit:

$$t = \frac{D}{v} \quad (\text{rovnice V.1})$$

kde v je rychlost seismické vlny. V seismologii ovšem sledujeme obvykle dobu šíření seismické vlny v závislosti na epicentrální vzdálenosti X . Křivka popisující závislost mezi dobou šíření seismické vlny a epicentrální vzdáleností se nazývá **hodochrona**. V případě, že zdroj seismického signálu (tedy hypocentrum) leží na povrchu (tedy v nulové hloubce) je dráha D přímo rovna epicentrální vzdálenosti a vztah V.1 přechází ve velmi jednoduchou lineární závislost:

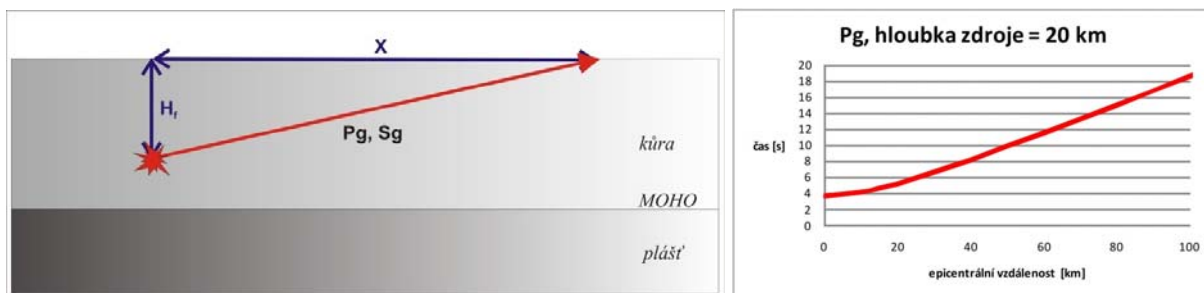
$$t = \frac{X}{v} \quad (\text{rovnice V.2})$$

Hodochrona přímé vlny v případě nulové hloubky hypocentra je tedy přímka. Z rovnice V.2 si lze pak jednoduše vyjádřit např. epicentrální vzdálenost a odvodit tak vzdálenost seismického jevu od stanice, na které byl pořízen záznam daného otřesu. Problémem může ovšem být, že kromě epicentrální vzdálenosti je neznámou proměnnou při řešení tohoto typu úlohy také doba šíření t seismické fáze od zdroje k místu detekce. Tento problém lze snadno vyřešit, pokud jsou na záznamu odečteny alespoň dvě seismické fáze. Nechť jsou tedy odečteny časy nasazení přímé vlny podélné P_g a přímé vlny příčné S_g . Podélná vlna P_g se homogenním prostředím šíří rychlostí v_{P_g} a od zdroje k místu detekce se šířila po dobu t_{P_g} . Podobně příčná vlna S_g se homogenním prostředím šíří rychlostí v_{S_g} a od zdroje k místu detekce se šířila po dobu t_{S_g} . Dráhy obou paprsků, jak vlny P_g tak i vlny S_g , jsou ale totožné a jejich délka je rovna epicentrální vzdálenosti X . Pak z kombinace rovnic V.2 pro vlnu P_g a S_g můžeme snadno odvodit:

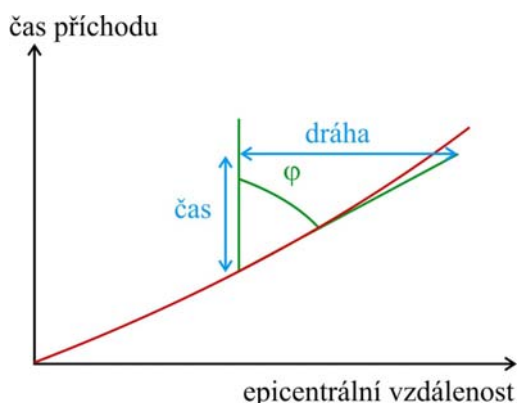
$$t_{S_g} - t_{P_g} = \frac{X}{v_{S_g}} - \frac{X}{v_{P_g}} = X \frac{v_{P_g} - v_{S_g}}{v_{P_g} \cdot v_{S_g}} \quad (\text{rovnice V.3})$$

A tedy:

$$X = (t_{S_g} - t_{P_g}) \frac{v_{S_g} \cdot v_{S_g}}{(v_{P_g} - v_{S_g})} \quad (\text{rovnice V.4})$$



Obr. V.1: Schematický náčrt paprsku přímé vlny v rychlostně homogenním prostředí (vlevo) a hodochrona této přímé vlny (vpravo).



Obr. V.2: Sklon hodochrony přímé vlny jako funkce rychlosti (blíže viz text).

K určení epicentrální vzdálenosti X pak tedy není nutné znát doby šíření seismických fází t_{P_g} a t_{S_g} , ale pouze jejich rozdíl, který je možné snadno odečíst z vlnového záznamu seismometru.

Pokud je hypocentrum umístěno v nenulové hloubce (obr. V.1), pak vztah mezi epicentrální vzdáleností X a časem t nabývá tvaru:

$$t = \frac{\sqrt{X^2 + H_f^2}}{v} \quad (\text{rovnice V.5})$$

kde H_f je hloubka hypocentra.

Hodochrona popsaná takovýmto vztahem již nemá tvar přímky, ale hyperboly. Zakřivení hyperboly je ale významné zejména pro malé hodnoty epicentrální vzdálenosti. Při dostatečně vysokých hodnotách epicentrální vzdálenosti lze hodochronu přímé vlny aproximovat přímkou i pro nenulové hloubky hypocenter. Sklon takové přímky φ je pak funkcí rychlosti dané přímé seismické vlny (viz obr. V.2):

$$\tan \varphi = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = v_{P_g, S_g} \quad (\text{rovnice V.6})$$

Přestože hodochrona je zakřivená, dráha paprsku je stále přímková, protože prostředí je stále rychlostně homogenní. I v případě hypocentra nacházejícího se v nenulové hloubce lze tedy snadno odvodit epicentrální vzdálenost v závislosti na rozdílu odečtů času příchodu dvou seismických fází, např. přímé podélné vlny P_g a přímé příčné vlny S_g . Poze je zapotřebí si uvědomit, že délka dráhy D není přímo rovna epicentrální vzdálenosti X , ale že je rovna přeponě pravoúhlého trojúhelníku se stranami o délkách X a H_f .

Vyjdeme-li pak z rovnice V.4 a vezmeme-li v potaz výše zmíněné skutečnosti, můžeme snadno odvodit vztah:

$$X = \sqrt{(t_{Sg} - t_{Pg})^2 \cdot \frac{v_{Sg}^2 \cdot v_{Sg}^2}{(v_{Sg} - v_{Sg})^2} - H_f^2} \quad (\text{rovnice V.7})$$

V. b) Vrstevnatý model

S modelem rychlostně homogenního prostředí si v seismologii obvykle nevystačíme. Je zapotřebí použít také model, který by byl stále ještě co nejjednodušší, ale který by obsahoval rychlostní rozhraní, díky kterým by se prostředím mohly šířit také vlny odražené a lomené. Takovým jednoduchým modelem je model vrstevnatý, kdy je horninové prostředí rozděleno do vrstev. Jednotlivé vrstvy se liší hodnotou rychlostí seismických vln, každá individuální vrstva je ale rychlostně homogenní.

Přímá vlna, která se šíří pouze v rámci jedné vrstvy, prochází v takovém případě pouze plně homogenním prostředím a můžeme pro ni použít vztahy diskutované v předešlé části V.a. Věnujme se tedy dále vlnám odraženým a lomeným.

Paprsek odražené vlny směřuje, v případě hypocentra situovaného v nulové hloubce, nejprve dolů k rychlostnímu rozhraní, od něhož se odrazí a směřuje zpět k povrchu. Paprsek tak vytváří trojúhelník, který lze rozdělit na dva shodné trojúhelníky s přeponou $D/2$ a o stranách $X/2$ a h , kde h je hloubka rychlostního rozhraní. Pro čas t šíření seismické vlny pak můžeme z daného trojúhelníka odvodit:

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + X^2}}{v} \quad (\text{rovnice V.8})$$

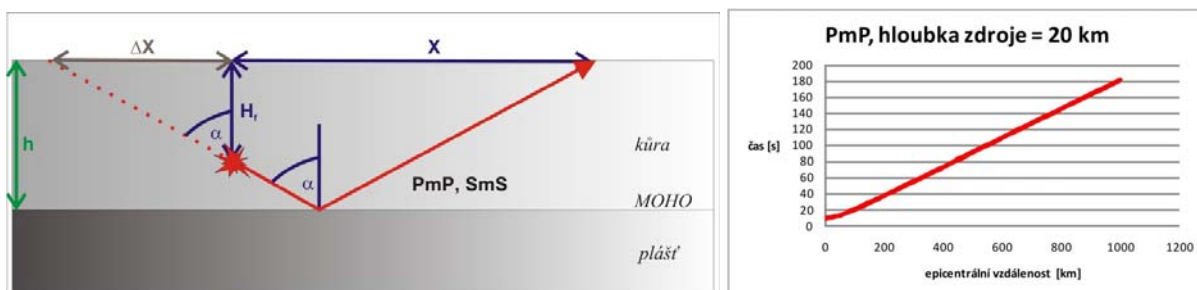
kde X je epicentrální vzdálenost a v je rychlost seismické vlny. Z rovnice V.8 plyne, že hodochronou odražené vlny je hyperbola.

Pokud je hypocentrum umístěno v nenulové hloubce, pak je epicentrální vzdálenost menší o hodnotu ΔX a doba šíření vlny kratší o čas Δt (obr. V.3). Čas Δt odpovídá času, za který by vlna urazila dráhu Δs :

$$\Delta s = \sqrt{\Delta X^2 + H_f^2} \quad (\text{rovnice V.9})$$

kde H_f je hloubka hypocentra.

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků na obrázku V.3 (vlevo) vidíme, že:



Obr. V.3: Schematický náčrt paprsku vlny PmP odražené od MOHO discontinuity v rychlostně homogenním prostředí zemské kůry (vlevo) a hodochrona této odražené vlny (vpravo) při zdroji v hloubce 20 km.

$$\tan \alpha = \frac{X + \Delta X}{2h} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta X}{H_f} \quad (2)$$

(rovnice V.10)

Pro úsek vzdálenost ΔX pak můžeme odvodit:

$$\Delta X = \frac{X \cdot H_f}{2h - H_f} \quad (3)$$

(rovnice V.11)

A časový úsek Δt si pak můžeme vyjádřit vztahy:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\sqrt{\Delta X^2 + H_f^2}}{v} = \frac{\sqrt{\frac{X^2 \cdot H_f^2}{(2h - H_f)^2} + H_f^2}}{v} \quad (4)$$

(rovnice V.12)

Vztah pro odraženou vlnu se zdrojem v hloubce H_f pak nabude tvar:

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + (X + \Delta X)^2}}{v} - \Delta t \quad (5)$$

(rovnice V.13)

do kterého můžeme dosadit vztahy z rovnic V.11 a V.12 a úpravou pak postupně získáme:

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + \left(X + \frac{X \cdot H_f}{2h - H_f}\right)^2}}{v} - \frac{\sqrt{\frac{X^2 \cdot H_f^2}{(2h - H_f)^2} + H_f^2}}{v}$$

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + \frac{(X(2h - H_f) + X \cdot H_f)^2}{(2h - H_f)^2}}}{v} - \frac{\sqrt{\frac{X^2 \cdot H_f^2 + (2h - H_f)^2 H_f^2}{(2h - H_f)^2}}}{v}$$

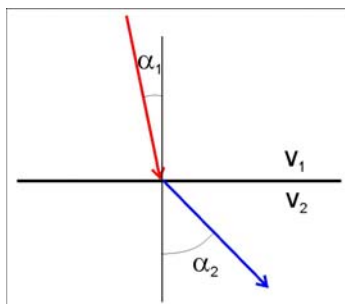
$$t = \frac{\frac{\sqrt{4h^2(2h - H_f)^2 + (2Xh - XH_f + X \cdot H_f)^2}}{\sqrt{(2h - H_f)^2}} - \frac{\sqrt{X^2 \cdot H_f^2 + (2h - H_f)^2 H_f^2}}{\sqrt{(2h - H_f)^2}}}{v}$$

$$t = \frac{\sqrt{4h^2(2h - H_f)^2 + 4h^2 X^2} - \sqrt{X^2 \cdot H_f^2 + (2h - H_f)^2 H_f^2}}{2h - H_f} \cdot \frac{1}{v}$$

$$t = \frac{2h\sqrt{(2h - H_f)^2 + X^2} - H_f\sqrt{(2h - H_f)^2 + X^2}}{2h - H_f} \cdot \frac{1}{v}$$

$$t = \frac{(2h - H_f)\sqrt{(2h - H_f)^2 + X^2}}{2h - H_f} \cdot \frac{1}{v} \quad (6)$$

(rovnice V.14)



Obr.V.4: Schematické znázornění lomu seismického paprsku na rychlostním rozhraní.

Což pak po poslední úpravě vede ke vztahu:

$$t = \frac{\sqrt{(2h - H_f)^2 + X^2}}{v} \quad (\text{rovnice V.15})$$

který je i nadále rovnicí hyperboly.

Projděme nyní vztahy pro paprsek lomené vlny. Lomenou vlnou budeme rozumět vlnu, která se láme podél rychlostního rozhraní. Lom seismického paprsku na rychlostním rozhraní popisuje tzv. Snellův zákon:

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = p \quad (\text{rovnice V.16})$$

kde α_1 je úhel dopadu, α_2 je úhel lomu, v_1 je rychlost seismického signálu v první vrstvě, v_2 je rychlost seismického signálu ve druhé vrstvě (viz obr. V.4) a p je paprskový parametr. Pokud se tedy paprsek láme podél rozhraní, je úhel lomu $\alpha_2 = 90^\circ$. Ze Snellova pravidla (rovnice V.16) potom plyne, že paprsek musí na rozhraní dopadnout pod určitým úhlem i , který je funkcí rychlostí v_1 a v_2 a je označován jako tzv. kritický úhel:

$$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2} \quad (\text{rovnice V.17})$$

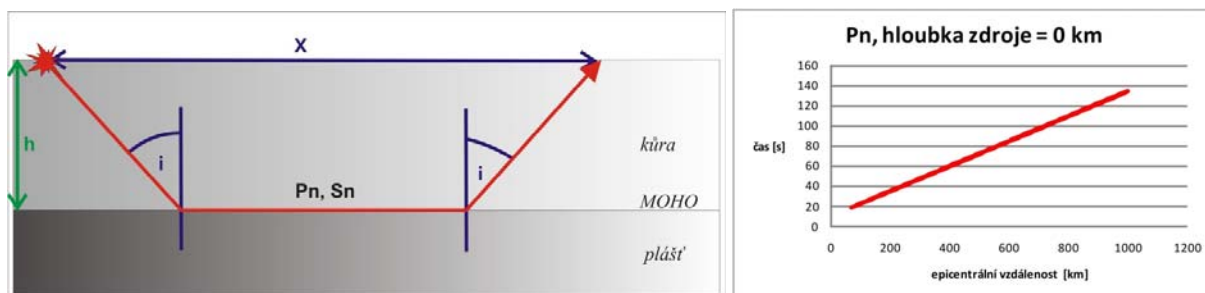
Pro vlnu lomenou podél prvního rychlostního rozhraní pak získáme v případě zdroje ležícího v nulové hloubce vztah:

$$t = \frac{X}{v_2} + 2h \frac{\cos(i)}{v_1} \quad (\text{rovnice V.18})$$

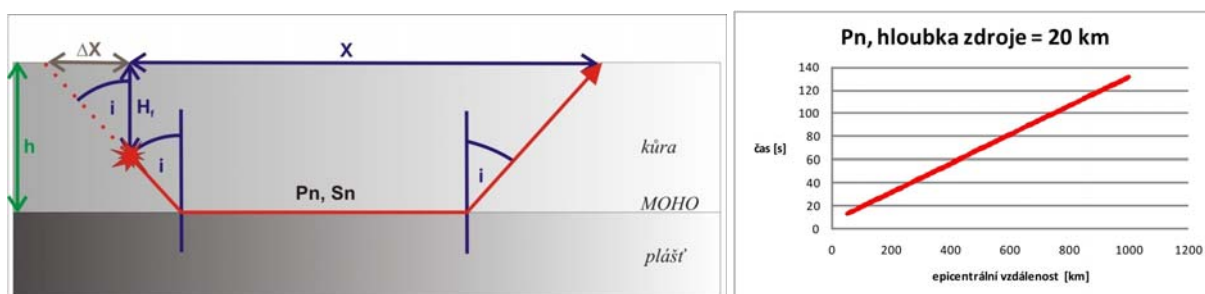
kde X je epicentrální vzdálenost, h je hloubka rychlostního rozhraní, v_1 je rychlost seismické vlny v první vrstvě, v_2 je rychlost seismické vlny v druhé vrstvě, i je kritický úhel a t je čas šíření dané fáze lomené vlny. Z rovnice V.18 je zřejmé, že hodochrona lomené vlny má tvar přímky (obr. V.5).

V malých epicentrálních vzdálenostech bude nejdříve detekována vlna přímá, ve větších epicentrálních vzdálenostech pak vlna lomená. Nazvěme mezní vzdálenost X_c . V této vzdálenosti budou vlna přímá a lomená detekovány ve stejný čas:

$$X_c = 2h \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}} \quad (\text{rovnice V.19})$$



Obr.V.5: Schematický náčrt paprsku vlny Pn lomené podél MOHO diskontinuity v rychlostně homogenním prostředí zemské kůry (vlevo) a hodochrona této lomené vlny (vpravo) při zdroji na zemském povrchu.



Obr.V.6: Schematický náčrt paprsku vlny Pn lomené podél MOHO diskontinuity v rychlostně homogenním prostředí zemské kůry (vlevo) a hodochrona této lomené vlny (vpravo) při zdroji v hloubce 20 km.

V případě zdroje v hloubce je epicentrální vzdálenost menší o hodnotu ΔX a doba šíření vlny kratší o čas Δt (obr. V.6). Čas Δt odpovídá času, za který by vlna urazila dráhu Δs :

$$\Delta s = \frac{H_f}{\cos(i)} \tag{rovnice V.20}$$

kde H_f je hloubka hypocentra.

Časový úsek Δt i délkový úsek ΔX si pak můžeme vyjádřit vztahy:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_1} = \frac{H_f}{v_1 \cdot \cos(i)} \tag{rovnice V.21}$$

$$\Delta X = H_f \cdot \tan(i) \tag{rovnice V.22}$$

Z rovnic V.21 a V.22 je patrné, že hodnoty ΔX a Δt jsou nezávislé na epicentrální vzdálenosti. Ve sledovaném případě zdroje v hloubce má hodochrona lomené vlny opět tvar přímky (viz obr. V.6 vpravo):

$$t = \frac{X + \Delta X}{v_2} + 2h \frac{\cos(i)}{v_1} - \Delta t \tag{rovnice V.23}$$

Vraťme se nyní k rovnici V.18 popisující hodochronu v případě hypocentra s nulovou hloubkou. Pro jednoduchost se v další diskusi problematiky lomených vln omezíme pouze na tyto případy. Vezmeme v úvahu ještě vztah pro paprskový parametr p (rovnice V.16) a můžeme pak zavést parametr η_1 :

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 \cdot p^2}}{v_1} \quad (\text{rovnice V.24})$$

Rovnici V.18 pak můžeme přepsat do tvaru:

$$t = X \cdot p + 2h \cdot \eta_1 \quad (\text{rovnice V.25})$$

Rovnice V.25 stále ještě pracuje pouze s vlnou lomenou podél prvního rychlostního rozhraní. Pracuje tedy pouze se dvěma vrstvami. Vrstevnatý model ovšem většinou obsahuje více vrstev, než pouze dvě. Je tedy zapotřebí prodiskutovat ještě vztahy pro případ, kdy paprsek prochází přes více rychlostních rozhraní a láme se až na n-tém rozhraní. Pro tyto úvahy se ukazuje výhoda zápisu vztahů ve formě rovnice V.25, protože ji snadno můžeme zobecnit do tvaru:

$$t = X \cdot p + 2 \sum_{i=1}^n h_i \cdot \eta_i \quad (\text{rovnice V.26})$$

kde h_i je mocnost i-té vrstvy a pro parametr η_i platí:

$$\eta_i = \frac{\sqrt{1 - v_i^2 \cdot p^2}}{v_i} \quad (\text{rovnice V.27})$$

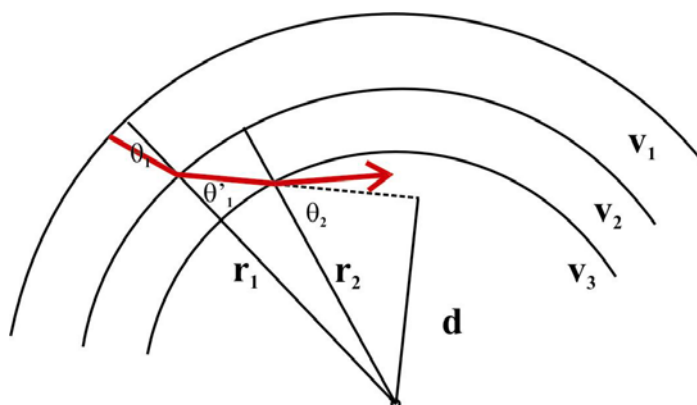
V souvislosti se zde nastíněným povídáním o průběhu paprsků odražených a lomených vln je zapotřebí zmínit ještě některé souvislosti týkající se nomenklatury seismických vln. V textu či na obrázcích byly zmíněny některé korové fáze, a to fáze přímých vln Pg a Sg, fáze vln odražených od MOHO diskontinuity PmP a SmS a fáze vln lomených podél MOHO diskontinuity Pn a Sn (blíže k nomenklaturám seismických vln viz např. Storchak et al. 2003). V případě fází PmP, SmS, Pn a Sn je jejich definice patrně dostatečně srozumitelná. Jedná se o vlny odražené či lomené na MOHO diskontinuitě, bez ohledu na to, kolika dalšími vrstvami paprsky těchto fází prošly.

V případě přímých vln Pg a Sg je vhodné si ujasnit, že jde o fáze, jejichž paprsek prochází pouze zemskou kůrou a nedosahuje MOHO diskontinuity (tj. ani se na MOHO diskontinuitě neodráží ani se na ní neláme). Může se však lámat na jiných rychlostních rozhraních v rámci zemské kůry, pokud jsou tato rozhraní začleněna do vrstevního modelu. Na místě detekce pak může být pozorováno více seismických fází, které budou odpovídat různým paprskům probíhajícím pouze zemskou kůrou (např. paprsek přímé vlny v užším slova smyslu, který se nedotýká žádného rychlostního rozhraní definovaného modelem; paprsky odražené na i-tém rozhraní definovaném uvnitř zemské kůry a paprsky lomené podél i-tého rozhraní definovaného uvnitř zemské kůry). Jako vlna Pg (respektive Sg) pak bývá obvykle chápána ta fáze, která je z daných možností (splňujících podmínku, že paprsek nedosahuje MOHO diskontinuity) nejrychlejší (tj. která je v místě detekce zaznamenána jako první).

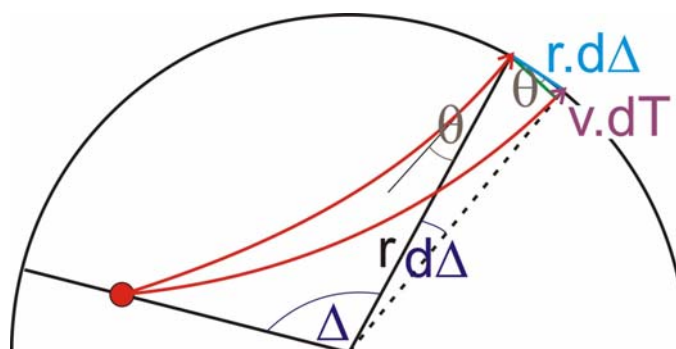
Pro úplnost je pak ještě vhodné zmínit definici fází Pb a Sb, které jsou definovány jako seismické vlny lomené podél tzv. Conradovy diskontinuity (na rozhraní spodní a svrchní kůry) a nebo jako fáze, jejichž paprsek probíhá spodní kůrou, ale nedosahuje MOHO diskontinuity (Storchak et al. 2003). V praxi se ale vyčlenění těchto fází často zanedbává z důvodu jejich obtížné identifikace.

V. c) Šíření signálu ve sférickém tělese Země

V této kapitole jsme zatím tiše předpokládali, že povrch i rychlostní rozhraní mají rovinný charakter. Ve sférickém modelu Země jsou ovšem tyto plochy zakřivené. Jestliže si označíme jako θ_1 úhel dopadu a θ_1' úhel lomu na prvním rychlostním rozhraní a jako θ_2 úhel dopadu a θ_2' úhel lomu na prvním rychlostním rozhraní, pak v rovinném modelu platí rovnost $\theta_1' = \theta_2$. Ve sférickém modelu se zakřivenými plochami rychlostních rozhraní ale vlivem zakřivení tato rovnost neplatí. Proto nelze aplikovat jednoduše Snellovo pravidlo podle rovnice V.16, která je sestavena pro rovinný model.



Obr.V.7: Schematický náčrt průběhu paprsku vlny, která se láme na zakřivených rychlostních rozhraních ve sférickém modelu Země.



Obr.V.8: Schematický náčrt změny parametrů seismického paprsku při zvětšení epicentrální vzdálenosti místa návratu paprsku o $d\Delta$. (blíže viz text).

Ve sférickém modelu Země můžeme rozeznat dva pravouhlé trojúhelníky se společnou stranou o délce d (obr. V.7). Jeden z trojúhelníků pak jednu stranu rovnu délce r_1 , odpovídající vzdálenosti prvního rychlostního rozhraní od středu Země, a velikost úhlu ve vrcholu proti straně d rovnu θ_1' . Druhý trojúhelník pak má jednu stranu rovnu délce r_2 , odpovídající vzdálenosti druhého rychlostního rozhraní od středu Země, a velikost úhlu ve vrcholu proti straně d rovnu θ_2 . Z těchto trojúhelníků pak plyne:

$$d = r_1 \sin(\theta_1') = r_2 \sin(\theta_2) \quad (\text{rovnice V.28})$$

A tedy:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_1'}{v_2} \Leftrightarrow \frac{r_1 \cdot \sin\theta_1}{v_1} = \frac{r_1 \cdot \sin\theta_1'}{v_2} = \frac{r_2 \cdot \sin\theta_2}{v_2} \Leftrightarrow \frac{r_1 \cdot \sin\theta_1}{v_1} = \frac{r_2 \cdot \sin\theta_2}{v_2} \quad (\text{rovnice V.29})$$

Z odvození v rovnici V.29 pak plyne obecný tvar Snellova zákona platný pro sférický model tělesa Země:

$$p = \frac{r \cdot \sin(\theta)}{v} \quad (\text{rovnice V.30})$$

Pro naše pozdější úvahy je důležitý jeden z významů paprskového parametru. Představme si paprsek o paprskovém parametru p , který se vrací k povrchu v epicentrální vzdálenosti Δ (úhlová vzdálenost v radiánech), přičemž signál k průchodu po dráze paprsku D potřebuje čas T (viz obr. V.8). Nyní uvažujme další paprsek, který na povrch bude vycházet jen o něco dále, takže se epicentrální vzdálenost místa návratu prodlouží o $d\Delta$. Druhý paprsek bude tedy delší o hodnotu dD . K průchodu po delší dráze bude signál potřebovat delší čas a o to o dT . Také paprskový parametr druhého paprsku se bude pochopitelně lišit a to hodnotu dp . Zaměříme se na místo, kde oba právě zmíněné paprsky vycházejí na povrch. Můžeme si tam (ve shodě s obrázkem V.8) představit pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden vrchol má úhel odpovídající úhlu θ , pod kterým první paprsek přichází k zemskému povrchu (Lze to ukázat na základě podobnosti pravoúhlých trojúhelníků). Délka protější odvěsny bude v tomto trojúhelníku odpovídat rozdílu délek obou paprsku dD , kterou si ovšem můžeme vyjádřit jako součin rychlosti v a rozdílu časů průchodů dT . Přepona bude odpovídat délce oblouku sestavenému na zemském povrchu mezi místy výstupu prvního a druhého paprsku (uvažujeme pouze malou změnu v dráze paprsku, takže zakřivení můžeme zanedbat), který si můžeme vyjádřit jako součin poloměru Země r a úhlu $d\Delta$ vyjádřeného v radiánech. Z diskutovaného trojúhelníka si pak můžeme vyjádřit:

$$\sin(\theta) = \frac{v \cdot dT}{r \cdot d\Delta} \quad (\text{rovnice V.31})$$

Dosadíme-li ovšem rovnici V.31 do rovnice V.30, získáme:

$$p = \frac{r \cdot v \cdot dT}{v \cdot r \cdot d\Delta} = \frac{dT}{d\Delta} \quad (\text{rovnice V.32})$$

Paprskový parametr p tedy odpovídá změně času dělené změnou úhlové epicentrální vzdálenosti v radiánech. Čas dělený dráhou je obrácená hodnota rychlosti ($1/v$), pro kterou se běžně používá pojem pomalost. Paprskový parametr tedy odpovídá zdánlivé úhlové pomalosti seismického paprsku sledované podél povrchu Země.

Příklad 11: Odhad vzdálenosti seismického jevu, výpočet v homogenním prostředí

- nejprve použijme parametrická data

A) Hrubý odhad v případě, kdy neznáme rychlosti seismických vln obecný postup:

- Určete časový rozdíl mezi příchodem fáze Pg a Sg v sekundách.
- Hrubý odhad vzdálenosti od seismického zdroje v kilometrech pak je osminásobek zjištěného časového rozdílu.

1. PG 01:12:35.0 SG 01:12:45.0

2. PG 08:22:58.4 SG 08:23:03.1

3. PG 12:59:49.9 SG 13:00:04.3

B) Odvození v případě, kdy známe hodochrony, prostředí považujeme za homogenní (použijte parametrická data z části A, hodochrony jsou na druhé straně tohoto zadání) obecný postup:

- Určete časový rozdíl mezi příchodem fáze Pg a Sg v sekundách.
- Odečtete z grafu vzdálenost od seismického zdroje odpovídající zjištěnému časovému rozdílu.
- Porovnejte výsledky v části A a B.

C) Výpočet v případě, kdy známe rychlosti seismických vln, prostředí považujeme za homogenní (použijte parametrická data z části A)

obecný postup:

- Určete časový rozdíl mezi příchodem fáze Pg a Sg v sekundách.
- Určete vzdálenost od seismického zdroje podle vztahu:

$$X = \frac{v_{Pg} \cdot v_{Sg} \cdot (t_{Sg} - t_{Pg})}{(v_{Pg} - v_{Sg})}$$

- Porovnejte výsledky v části A a C.

Použijte následující rychlosti:

1. $v_{Pg} = 5.93$ km/s; $v_{Sg} = 3.48$ km/s (hodnoty odvozené ze stanic JAVC, KRUC, MORC a VRAC během projektu CELEBRATION 2000)

2. $v_{Pg} = 5.8$ km/s; $v_{Sg} = 3.36$ km/s (hodnoty podle modelu IASPEI91)

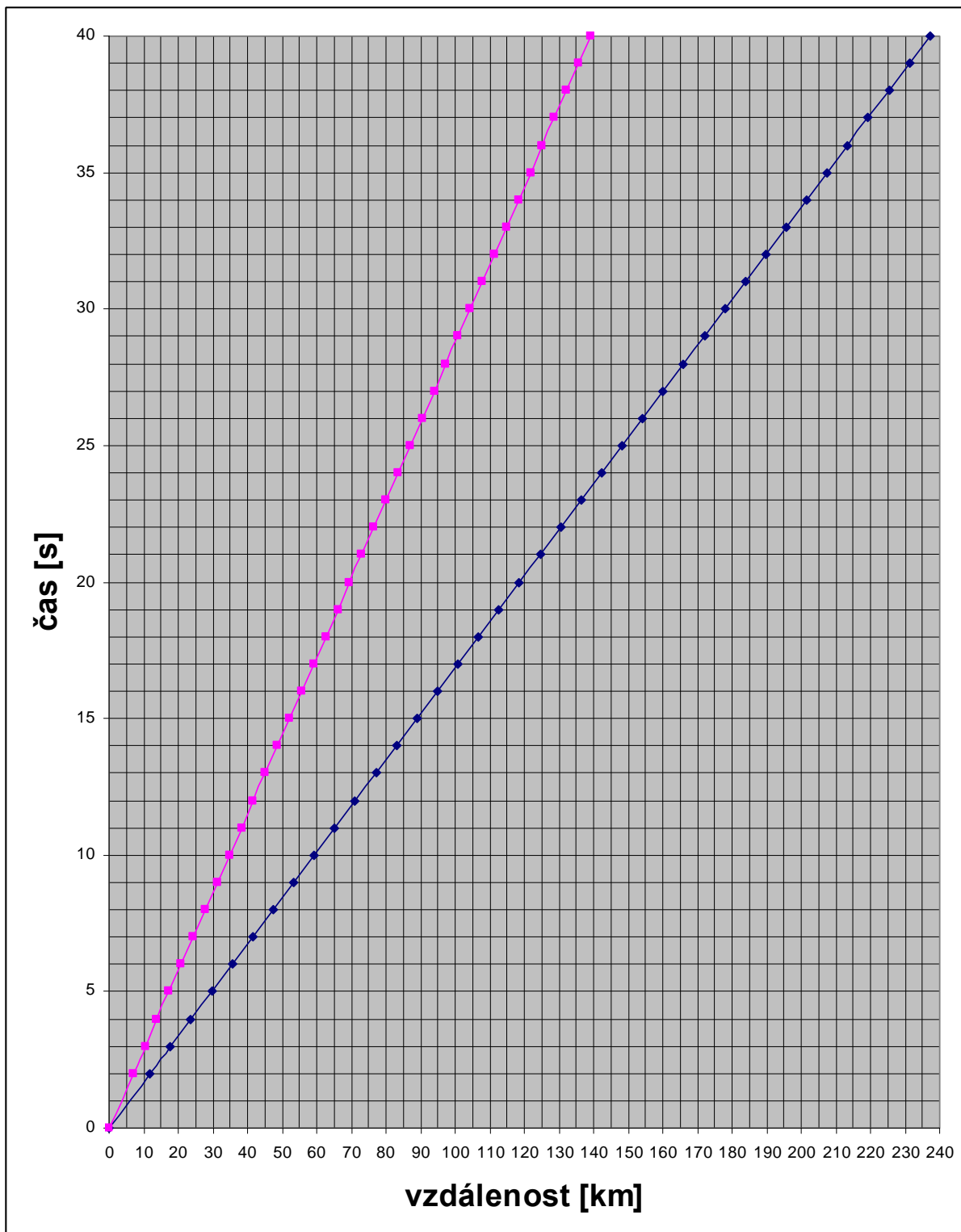
- použijeme reálná seismická data, časy příchodů potřebných seismických fází musíme sami odečíst (pro práci s daty využijeme program *SGRAPH* - Abdelwahed 2010, 2012)

- obecný postup:

- Načtete příslušná data
- odečtete časy příchodů fází Pg a Sg
- Určete vzdálenost od zdroje podle některého z výše popsaných postupů (A nebo C)

1. soubor brg20090721_0604.gse (stanice BRG, Polsko, Lubin, M=4.0)

2. soubor wern20081010_0807.gse (stanice WERN, ČR, západní Čechy, M=3.7)



Příklad 12: Sestrojení hodochron ve vrstevnatém modelu, výpočet epicentrální vzdálenosti

- použijeme excelovskou tabulku model.xls

A) Sestrojte hodochrony pro dvouvrstevné prostředí pro hloubky zdroje 0, 2, 5 a 10 km. obecný postup:

- Otevřete list „2 vrstvy“ souboru model.
- Vložte příslušné rychlosti a mocnosti jednotlivých vrstev.
- Zadejte postupně dané hloubky seismického zdroje.
- Definujte na grafu hodochrony příslušných seismických fází. Jaký je jejich průběh?

1.

| | mocnost vrstvy [km] | podélná vlna [km/s] | příčná vlna [km/s] |
|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| V ₁ | 30 | 5.9 | 3.5 |
| V ₂ | | 8.2 | 4.7 |

2.

| | mocnost vrstvy [km] | podélná vlna [km/s] | příčná vlna [km/s] |
|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| V ₁ | 35 | 5.9 | 3.47 |
| V ₂ | | 7.9 | 4.3 |

B) Sestrojte hodochrony pro vícevrstevné prostředí pro hloubky zdroje 0, 5, 10 a 15 km. obecný postup:

- Otevřete list „4 vrstvy“ souboru model.
- Vložte příslušné rychlosti a mocnosti jednotlivých vrstev.
- Zadejte postupně dané hloubky seismického zdroje.
- Definujte na grafu hodochrony příslušných seismických fází. Jaký je jejich průběh?

1.

| | mocnost vrstvy [km] | podélná vlna [km/s] | příčná vlna [km/s] |
|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| V ₁ | 2 | 4.7 | 2.72 |
| V ₂ | 13 | 5.5 | 3.18 |
| V ₃ | 19 | 6.2 | 3.58 |
| V ₄ | | 7.0 | 4.05 |

2.

| | mocnost vrstvy [km] | podélná vlna [km/s] | příčná vlna [km/s] |
|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| V ₁ | 2 | 1.45 | 1.0 |
| V ₂ | 13 | 5.8 | 3.2 |
| V ₃ | 9.4 | 6.8 | 3.9 |
| V ₄ | | 8.11 | 4.49 |

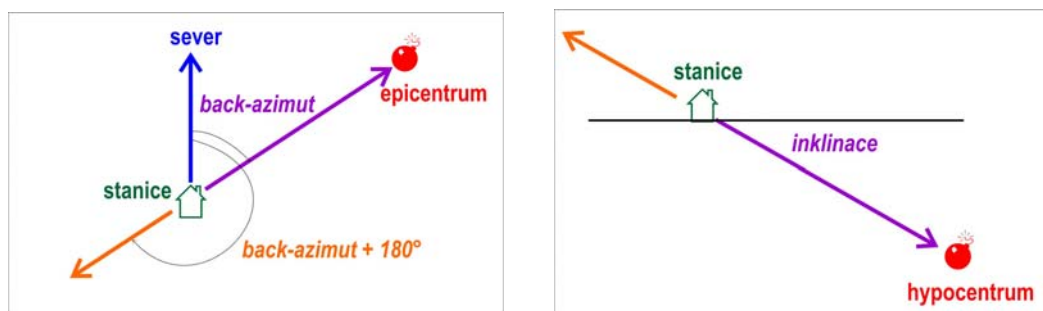
VI. Azimut a inklinace seismického paprsku

V předešlé kapitole jsme se zabývali problematikou průběhů seismických paprsků horninovým prostředím, přičemž jsme sledovaly tyto paprsky v dvourozměrném řezu a nezabývali jsme se otázkou jejich azimutu. Rovněž pokud jde o jejich sklon, sice jsme tento parametr v rámci diskuse a odvození vztahů brali v úvahu, ale neřešili jsme problém, jak jej určit z údajů, které můžeme získat ze záznamu signálu pořízeného na stanici. Protože tato otázka je ale pro řadu seismologických úloh důležitá, věnujme otázkám určení azimutu a sklonu seismického paprsku následující lekci.

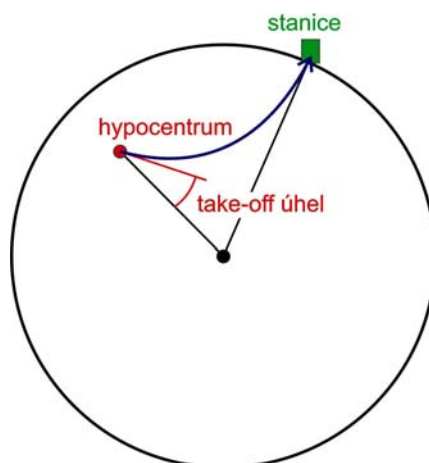
VI. a) Azimut a inklinace

V první řadě je nutné jasně definovat používané pojmy. **Azimut** seismického paprsku je orientovaný úhel, který svírá daný paprsek s poledníkem, přičemž je uvažován směr paprsku od epicentra ke stanici. Pokud bychom vzali v úvahu azimut paprsku měřený ve směru od stanice k epicentru, získali bychom azimut opačného směru lišící se o 180° . Proto je nutné tuto druhou veličinu i terminologicky odlišit, aby nedošlo k záměně. Azimut směru od stanice k epicentru budeme tedy označovat jako tzv. **back-azimut** (obr. VI.1). **Inklinace** seismického paprsku je pak úhel, který svírá tečna paprsku s horizontální rovinou.

Inklinace seismického paprsku se mění s epicentrální vzdáleností. Vzhledem k zakřivení seismického paprsku je jeho inklinace zcela odlišná ve zdroji a v místě detekce. Přitom inklinace ve zdroji je důležitým parametrem, jehož znalost je nutná pro některé studie (např. pro určení fokálních mechanismů), a proto je vhodné si tento parametr nějak zvlášť označit. V seismologické praxi je v této souvislosti zaveden pojem **take-off úhel** (obr. VI.2), který vyznačuje úhel sklonu seismického paprsku, ovšem měřený od vertikály (respektive od spojnice daného bodu se středem Země).



Obr.VI.1: Schematické znázornění azimutu a back-azimutu seismického paprsku (vlevo) a inklinace seismického paprsku (vpravo).



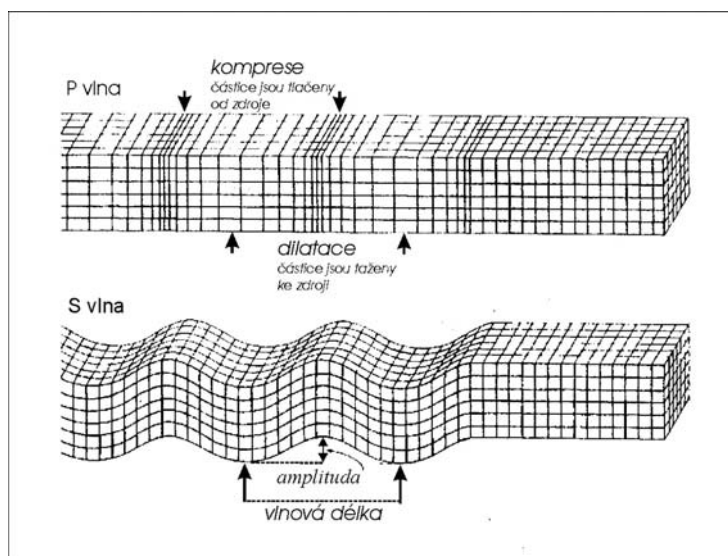
Obr.VI.2: Schematické znázornění take-off úhlu seismického paprsku.

VI. b) Kmitání částic kontinua a směr seismického paprsku

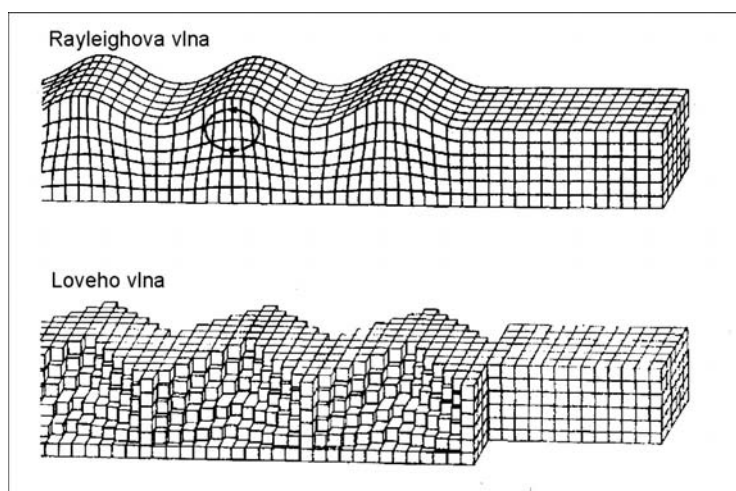
Seismický signál můžeme stručně charakterizovat jako kmitání částic kontinua (horninového prostředí), které se tímto prostředím šíří. Podle vztahu směru kmitání částic a směru šíření signálu pak lze rozlišit dva základní typy seismických vln šířících se celým objemem tělesa.

V případě vln **podélných** (vlny P) kmitají částice kontinua ve směru šíření seismického signálu. Oproti tomu v případě vln **příčných** (vlny S) je směr kmitání částic kontinua kolmý na směr šíření seismického signálu (obr. VI.3).

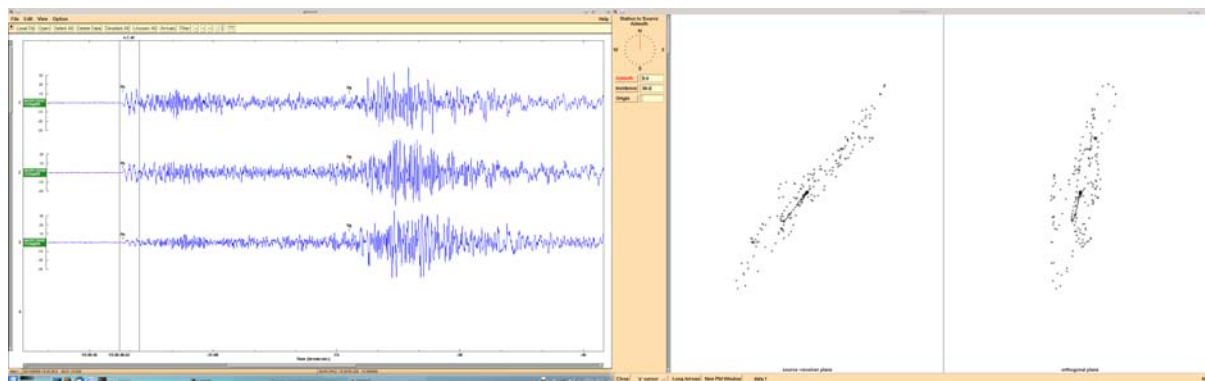
Jak podélné tak i příčné vlny se šíří celým objemem horninového prostředí a jsou proto nazývány **vlnami objemovými**. Kromě objemových vln ale existují další speciální typy seismických vln, které vznikají v důsledku skládání některých složek objemových vln při jejich lomu a odrazu na rychlostním rozhraní, a které jsou tak vázány na dané rozhraní, typicky na volný povrch Země. Šíří se podél daného rozhraní a jsou nazývány **vlnami povrchovými**. Lze rozlišit dva základní typy povrchových vln, a to tzv. Rayleighovy vlny a Loveho vlny (obr. VI.4).



Obr. VI.3: Schematické znázornění kmitání částic kontinua u objemových vln: nahoře podélné vlny (vlny P), dole příčné vlny (vlny S) (podle Lay, Wallace 1995, upraveno).



Obr. VI.4: Schematické znázornění kmitání částic kontinua u povrchových vln: nahoře Rayleighovy vlny, dole Loveho vlny (podle Lay, Wallace 1995, upraveno).



Obr. VI.5: Pohyb částic horninového kontinua (*particle motion*) na stanici MORC (Moravský Beroun) v případě podélné vlny Pn záznamu důlního otřesu z polského Lubinu z 9. 9. 2015. Vlevo je vlnový záznam jevu s vyznačeným úsekem času, pro který byl sledován pohyb částic. Vpravo pak je vyobrazen pohyb částic horninového kontinua v průběhu vyznačeného časového úseku ve dvou vzájemně kolmých řezech (vlevo - severojižní řez; vpravo - východozápadní řez).

Charakter pohybu částic horninového kontinua (tzv. "particle motion") je tedy pro dané základní druhy seismických fází typický. My se budeme soustředit zejména na pohyb částic související s podélnou vlnou. Jak bylo řečeno výše, částice kontinua kmitají v případě podélných vln paralelně se seismickým paprskem. Sledujeme-li tedy dráhu pohybu částic v době, kdy je jejich pohyb dán podélnou seismickou vlnou, ukazuje geometrie této dráhy na orientaci seismického paprsku (viz obr. VI.5). Označíme-li α jako back-azimut seismického paprsku a φ jako sklon seismického paprsku (měřený od horizontální roviny), pak pro průměty výchylky A bodu horninového kontinua do vzájemně kolmých hlavních souřadných os (X - severojižní; Y - východozápadní; Z - vertikální) bude platit:

$$\begin{aligned} A_x &= A \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \\ A_y &= A \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) \\ A_z &= A \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{rovnice VI.1})$$

Sledujme nyní geometrii paprsku na základě výchylek bodů kontinua ve dvou vzájemně kolmých vertikálních řezech, a to v severojižním a východozápadním, jako na obr. VI.5. Na severojižním řezu můžeme odečíst sklon paprsku φ_x , na východozápadním pak sklon paprsku φ_y . Přitom je zřejmé, že v uvedených řezech sledujeme ve vertikálním směru výchylky odpovídající složce A_z a ve vodorovném řezu výchylky odpovídající složce A_x (u severojižního řezu), respektive A_y (u východozápadního řezu). Pro funkce tangens odečtených úhlů tedy platí:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\varphi_x) &= \frac{A_z}{A_x} \\ \text{tg}(\varphi_y) &= \frac{A_z}{A_y} \end{aligned} \quad (\text{rovnice VI.2})$$

Když výrazy v rovnicích VI.2 vzájemně vydělíme a dosadíme do nich vztahy z rovnic VI.1, získáme pro směr seismického paprsku (back-azimut) α vztah:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{tg}(\varphi_x)}{\text{tg}(\varphi_y)} \quad (\text{rovnice VI.3})$$

a pro sklon seismického paprsku φ podobně můžeme odvodit vztah:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi_y) \cdot \sin(\alpha) = \operatorname{tg}(\varphi_x) \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{rovnice VI.4})$$

Snadno tedy na základě geometrie drah částic horninového kontinua, které kmitají v důsledku příchodu podélné vlny, můžeme odvodit směr a sklon seismického paprsku.

VI. c) Určení azimutu na základě polarizační analýzy P vlny

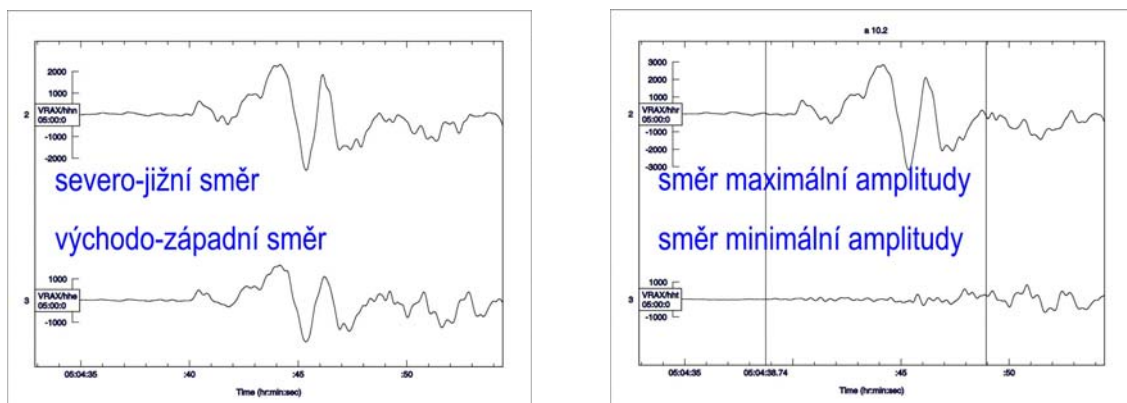
Pro určení orientace seismického paprsku na základě analýzy podélné vlny se obvykle postupuje trochu odlišně, než bylo naznačeno v části VI.b, přestože se vychází ze stejných principů. Současné nástroje umožňují snadno rotovat souřadnou soustavu, ve které sledujeme seismický paprsek. Jestliže je tedy podélná vlna charakteristická polarizací pohybu částic horninového kontinua ve směru paralelním se seismickým paprskem, pak v souřadné ose paralelní se seismickým paprskem (transversální směr) budeme pozorovat maximální amplitudy sledované vlny, a naopak v souřadné ose kolmé na seismický paprsek (radiální směr) budeme sledovat minimální amplitudy seismické vlny.

Označíme-li si opět α jako back-azimut seismického paprsku, A_x jako amplitudu v severojižním směru a A_y jako amplitudu ve východozápadním směru, pak pro amplitudy v transversálním směru (amplituda A_T) a radiálním směru (amplituda A_R) platí obecné vztahy:

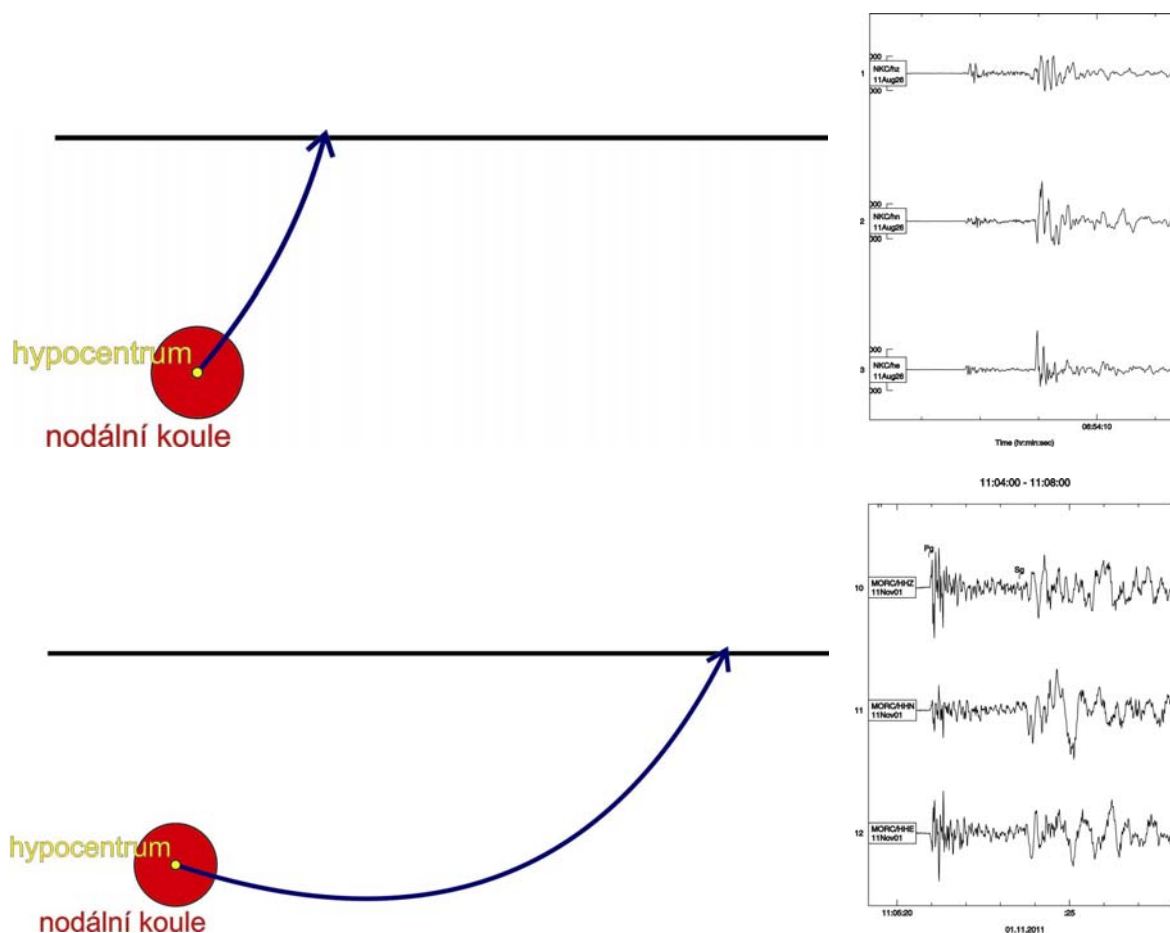
$$\begin{aligned} A_R &= -A_x \cos(\alpha) - A_y \cdot \sin(\alpha) \\ A_T &= A_x \sin(\alpha) - A_y \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{rovnice VI.5})$$

Tyto vztahy platí pro jakékoli kmitání částic horninového kontinua, takže si takto můžeme vyjádřit amplitudy v transversálním a radiálním směru také pro jiné seismické fáze a sledovat jejich charakteristiku. Zůstaňme ale u podélných vln. V tomto případě jde jednoduše o to, že rotujeme souřadnou soustavu a měníme úhel α tak dlouho, až nalezneme takový úhel, při kterém je hodnota A_T maximální a hodnota A_R minimální (obr. VI.6). Pak můžeme takto nalezený úhel α označit za back-azimut sledovaného seismického paprsku.

Uvedený předpoklad (maximální hodnota A_T a minimální hodnota A_R) je ovšem splněna nejen pro úhel back-azimutu α , ale také pro úhel azimutu $\alpha + 180^\circ$. Pro rozlišení back-azimutu a azimutu seismického paprsku je proto nutné analogickým způsobem (rotací souřadných os) určit také sklon seismického paprsku. Pro jeden z azimutů zjistíme kladné hodnoty sklonu, pro druhý pak záporné hodnoty sklonu. Jestliže předpokládáme, že seismický paprsek směřuje na stanici z horninového prostředí a nikoli z atmosféry, musíme volit takový back-azimut a azimut seismického paprsku, aby hodnoty sklonu byly kladné.



Obr. VI.6: Ukázka záznamu podélné vlny sledovaného na severojižní a východozápadní složce seismometru (vlevo) a tentýž záznam, po rotaci do transversálního a radiálního směru.



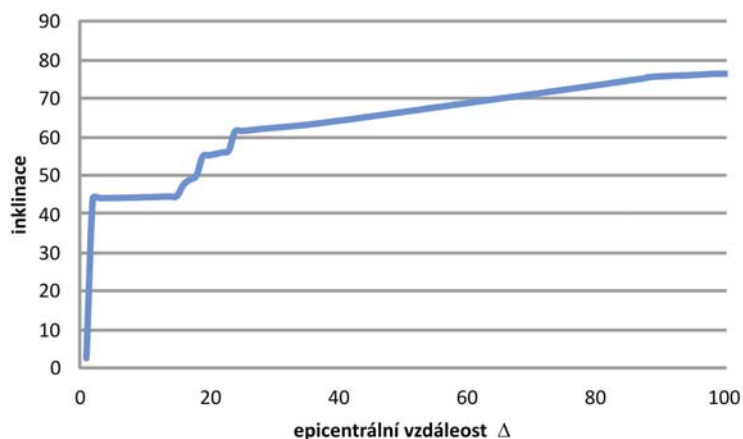
Obr. VI.7: Schematické znázornění směřování seismického paprsku ze zdroje (nodální koule je koule opsaná kolem hypocentra) v případě paprsku detekovaného v malých epicentrálních vzdálenostech (nahore, paprsek směřuje od zdroje vzhůru k povrchu) a ve větších epicentrálních vzdálenostech (dole, paprsek směřuje od zdroje směrem dolů, teprve později se vlivem zakřivení dostává k povrchu)

VI. d) Inklinace seismického paprsku

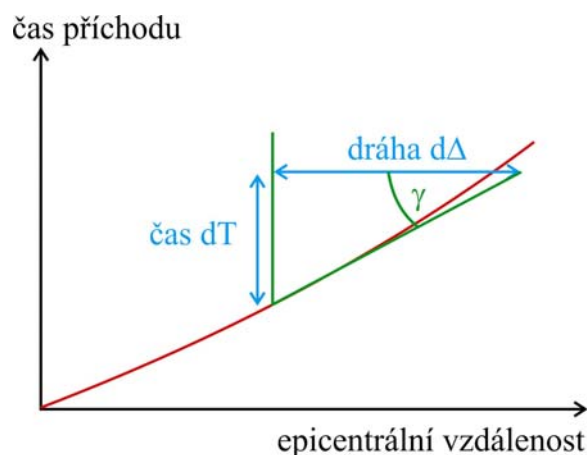
Budeme-li předpokládat jednoduché radiální modely popisující variabilitu rychlostí seismických vln v zemském tělese, pak lze předpokládat, že azimut seismického paprsku bude v jeho průběhu konstantní, zatímco jeho sklon se bude v různých místech paprsku významně lišit. Zaměříme se tedy na problematiku inklinace seismického paprsku trochu podrobněji.

V první řadě je vhodné rozlišit sledování inklinace (či sklonu) seismického paprsku v místě detekce a sklon seismického paprsku v místě zdroje vyjádřený pomocí take-off úhlu. A jde nejen o to, zda je úhel měřen od horizontální roviny nebo od svislice.

V případě take-off úhlu je nutné brát v potaz, že seismický paprsek může ze zdroje směřovat nejen směrem dolů, ale také směrem nahoru, k povrchu. Seismické paprsky sledované ve větších epicentrálních vzdálenostech směřují ze zdroje dolů a vlivem zakřivení se po dosažení největší hloubky (bodu návratu) vrací zpět k povrchu. U malých epicentrálních vzdáleností ale směřuje paprsek od zdroje do místa detekce ihned vzhůru. Je tedy nutné definovat velikost take-off úhlu nejen velikostí úhlu svíraného seismickým paprskem a svislicí (spojnicí zdroje a středu Země), ale je nezbytné zohlednit také smysl směřování seismického paprsku. Proto je take-off úhel odečítán jako úhel svíraný dvěma vektory, z nichž jeden směřuje ze zdroje do středu Země a druhý paralelně se seismickým paprskem, od zdroje směrem k místu detekce. Paprsky směřující ze zdroje přímo k zemskému povrchu tedy mají hodnoty take-off úhlu větší než 90° (obr. VI. 7 nahore).



Obr. VI.8: Změna sklonu seismického paprsku podélné přímé vlny v závislosti na epicentrální vzdálenosti odvozená pro rychlostí model IASPEI91 (Kennett 1991).



Obr. VI.9: Schematický nákres poměru $dT/d\Delta$ (který odpovídá hodnotě paprskového parametru) jako veličiny úměrně $\text{tg}(\gamma)$, kde γ je sklon tečny k hodochroně.

V případě větších epicentrálních vzdáleností bude paprsek směřovat ze zdroje nejprve směrem dolů a hodnota take-off úhlu bude menší než 90° (obr. VI. 7 dole). Pro velikost sklonu seismického paprsku v místě detekce na zemském povrchu přitom budeme pozorovat, že sklon seismického paprsku poroste s rostoucí epicentrální vzdáleností. Změna sklonu přicházejícího paprsku v závislosti na epicentrální vzdálenosti záleží na rozložení rychlostí seismických vln v zemském nitru. Teoretické hodnoty sklonů seismického paprsku tedy závisí na použitém rychlostním modelu (viz např. obr. VI. 8).

Pro obecné vyjádření pak můžeme využít vztahy V.30 a V.32. Z rovnice V.30 si můžeme vyjádřit sinus úhlu θ , který svírá seismický paprsek se spojnicí daného místa a středu Země (pro sklon ϕ počítaný od horizontální roviny tedy platí $\phi = 90^\circ - \theta$), vztahem:

$$\sin(\theta) = \frac{p \cdot v}{r} \quad (\text{rovnice VI.6})$$

kde v je rychlost šíření seismického signálu, p je paprskový parametr a r je délka spojnice daného místa se středem Země. Pro paprskový parametr jsme si současně ukázali, že odpovídá podílu elementu času děleného elementem úhlové epicentrální vzdálenosti měřené v radiánech ($p = dT/d\Delta$, viz rovnice V. 32). Tedy platí:

$$\sin(\theta) = \frac{v}{r} \cdot \frac{dT}{d\Delta} \quad (\text{rovnice VI.7})$$

Přičemž pro podíl $dT/d\Delta$ platí, že odpovídá derivaci funkce popisující čas šíření seismické vlny T v závislosti na epicentrální vzdálenosti Δ . Křivka funkce popisující čas šíření seismické vlny v závislosti na epicentrální vzdálenosti je hodochrona. Současně hodnota derivace v jakémkoli konkrétním bodě spojitě funkce je tangens úhlu, který svírá tečna ke křivce funkce sestavená v daném bodě s horizontální osou. Podíl $dT/d\Delta$, a tedy paprskový parametr p , je tedy veličina úměrná $\text{tg}(\gamma)$, kde γ je úhel sklonu tečny k hodochroně (obr. VI. 9). Známe-li hodochronu sledované seismické fáze, můžeme úhel γ snadno odečíst pro libovolnou epicentrální vzdálenost. Sledujeme-li sklon seismického paprsku v místě detekce, které se nachází na zemském povrchu, pak r odpovídá poloměru Země a v je rychlost šíření seismického signálu v první vrstvě (ve vrstvě nejbližší k povrchu).

Příklad 13: Pohyb částic horninového kontinua a orientace paprsku

Využijte grafických výstupů sledování pohybu částic kontinua v době příchodu podélných seismických vln na širokopásmové stanice Ústavu fyziky Země. Byly použity záznamy stanic KRUC (Moravský Krumlov), MORC (Moravský Beroun) a VRAC (Vranov u Brna).

1. Odečtěte sklony stop seismického paprsku z grafů znázorňujících pohyb částic kontinua v severojižním (vlevo) a východozápadním (vpravo) vertikálním řezu.

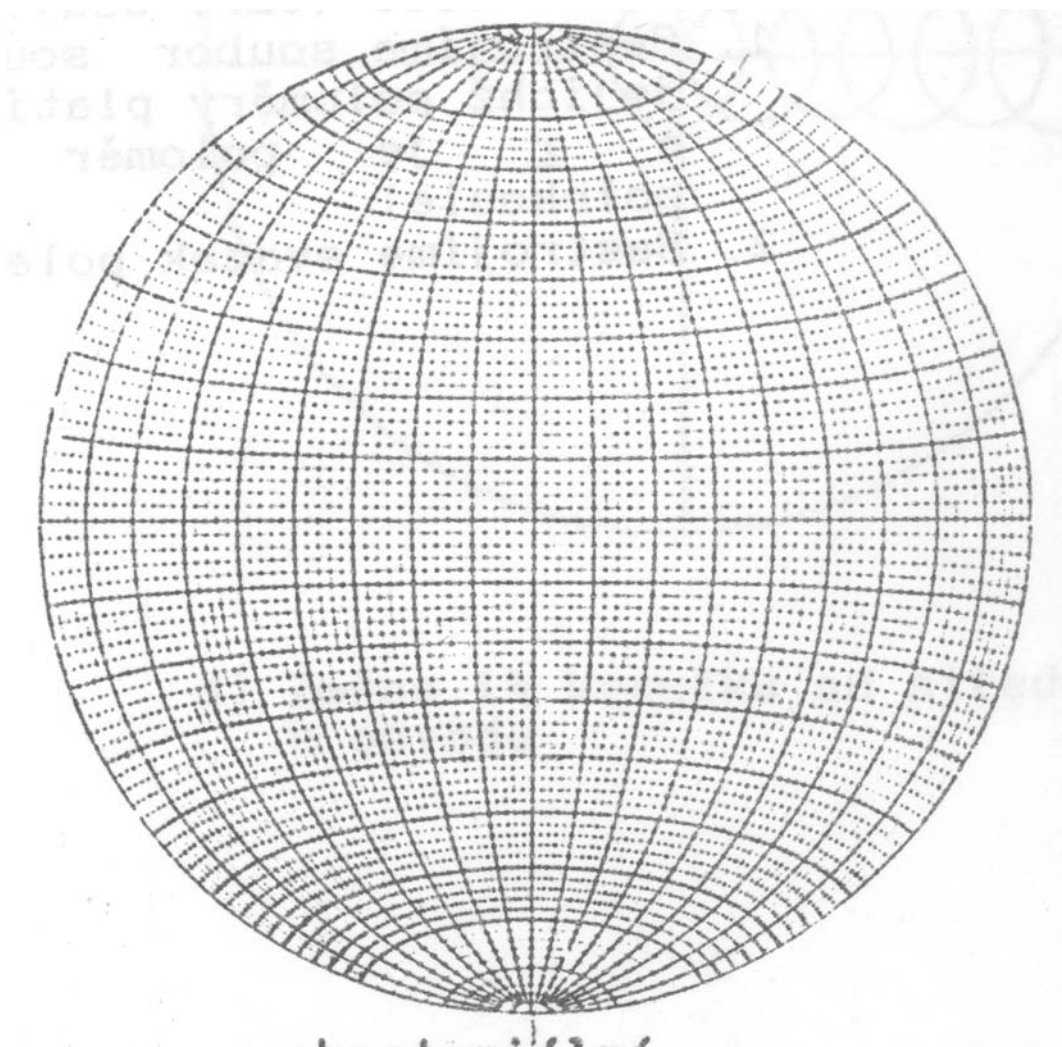
2. Určete směr a sklon seismického paprsku. Pro odvození můžete využít výpočty na základě vztahů:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_x)}{\operatorname{tg}(\varphi_y)}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi_y) \cdot \sin(\alpha) = \operatorname{tg}(\varphi_x) \cdot \cos(\alpha)$$

kde φ_x je sklon stopy paprsku na severojižním řezu, φ_y je sklon stopy paprsku na východozápadním řezu, φ je sklon seismického paprsku a α je back-azimut seismického paprsku.

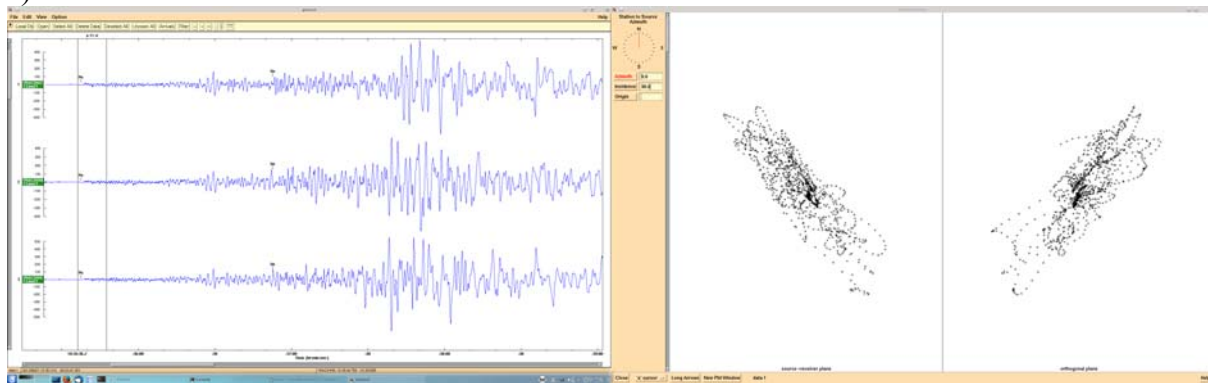
Eventuálně můžete úlohu řešit graficky s využitím sítě Lambertovy projekce:



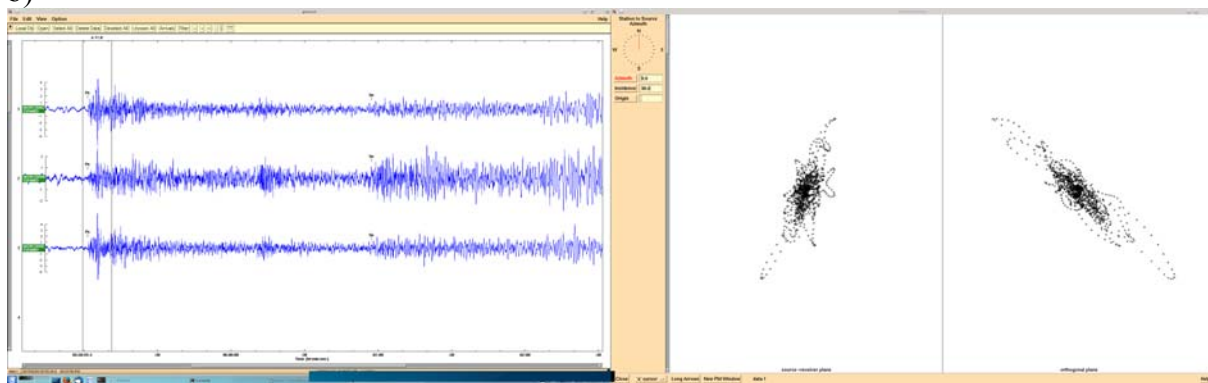
3. O čem vypovídají vaše výsledky, jestliže o daných jevech a záznamech víme následující údaje:

| | |
|---|---|
| a) severní Itálie, 21.6.2013, $M_w = 5.3$, | b) Ukrajina, 3.2.2015, $m_b = 4.6$ |
| c) Kréta 16.4.2015, $M_w = 6.1$, | d) Egejské moře, 24.5.2014, $M_w = 6.9$ |
| e) Pákistán, 28.9.2013, $M_s = 7.0$, | f) Kurilské ostrovy, 19.4.2013, $M_s = 6.6$ |

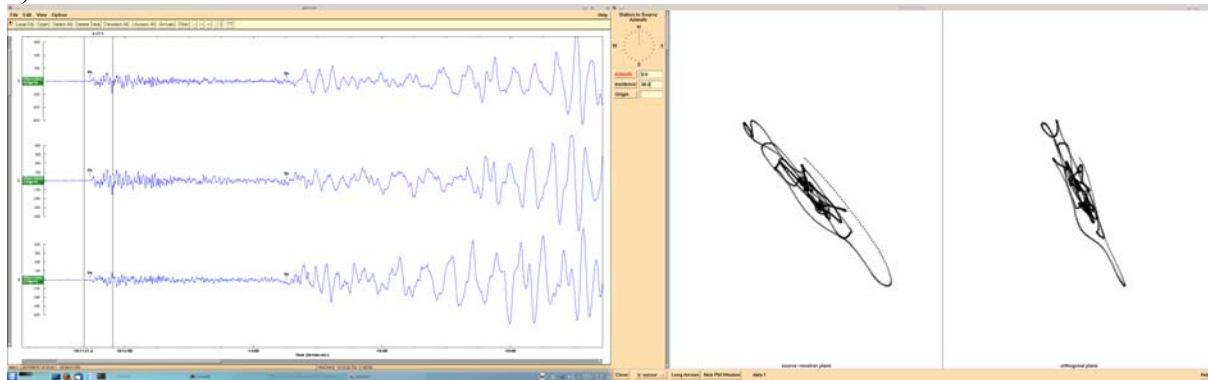
a)



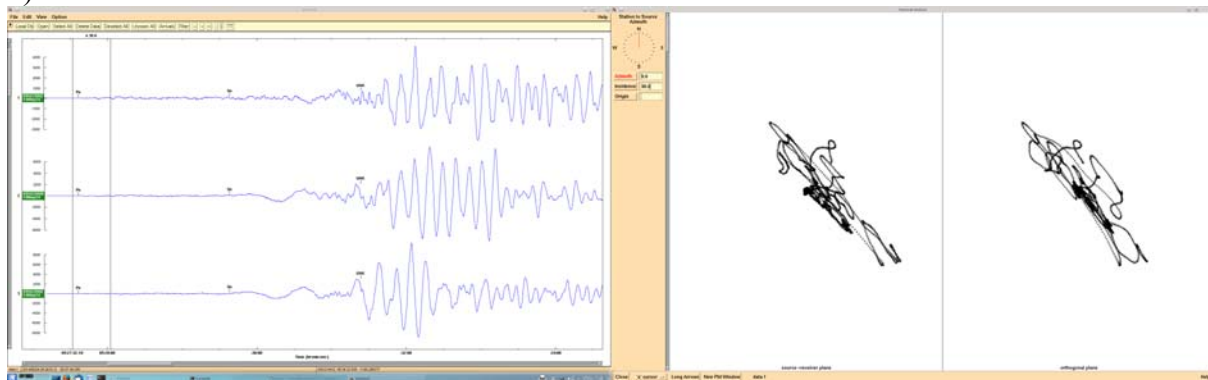
b)



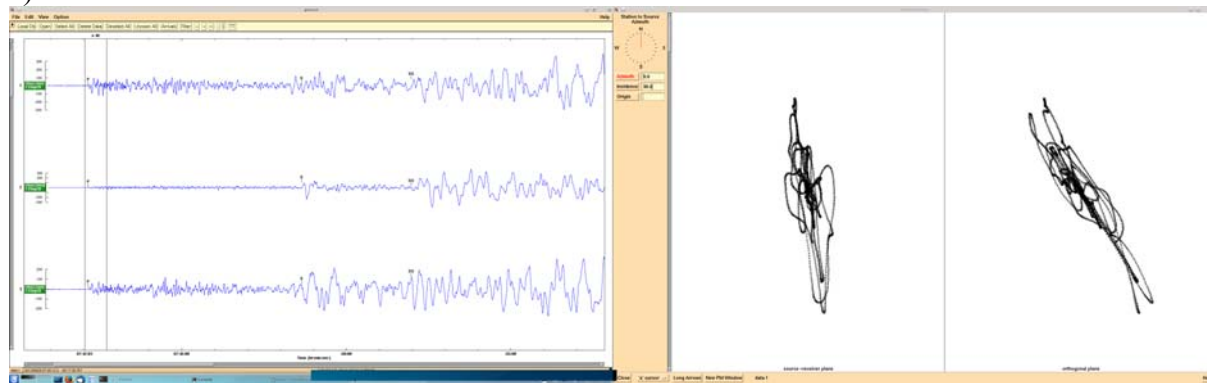
c)



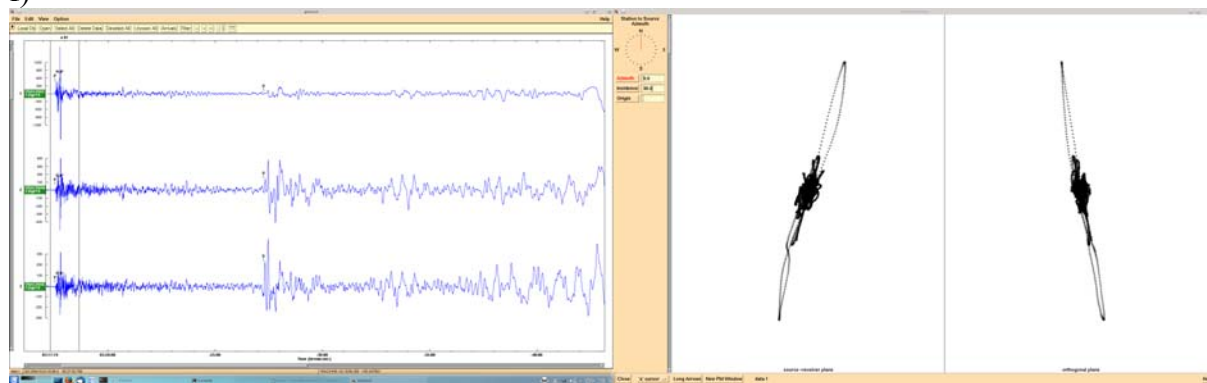
d)



e)



f)



Příklad 14: Polarizační analýza P vln

- použijeme excelovskou tabulku rotace.xls

A) Sestrojte signál P vlny a sledujte jeho obraz v různých složkách při změně azimutu a inklinace paprsku.

obecný postup:

a) Otevřete list „sinusovky“ souboru rotace.

b) Vytvořte umělý signál imitující P vlnu, např.:

| | | | |
|---------------|----------|----------|----------|
| šum | křivka 1 | křivka 2 | křivka 3 |
| amplituda | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| frekvence | 20 | 13 | 0.2 |
| signál | křivka 4 | křivka 5 | křivka 6 |
| amplituda | 12 | 7 | 10 |
| frekvence | 0.8 | 1.1 | 4 |
| začátek | 2 | útlum | 0.4 |

c) Měňte hodnoty azimutu od -150° do 150° .

Jak se změna projevuje v jednotlivých složkách?

d) Měňte hodnoty inklinace (sklonu paprsku) od 0° do 90° .

Jak se změna projevuje v jednotlivých složkách?

B) Sestrojte signál P vlny a sledujte jeho obraz v různých složkách při změně rotaci jednotlivých složek.

obecný postup:

a) Otevřete list „sinusovky“ souboru rotace.

b) Vytvořte umělý signál imitující P vlnu, např. stejný jako v příkladě A.

c) Zadejte hodnotu azimut (např. 40°) a inklinace (např. 20°) seismického paprsku.

d) Rotujte složkami kolem vertikální i vodorovné osy.

Jak se změna projevuje v jednotlivých složkách?

C) Určete azimut a inklinaci paprsku P vlny v listu Příklad 1 na základě jeho „polarizace“

obecný postup:

a) Otevřete list „Příklad 1“ souboru rotace.

b) Rotujte složkami kolem vertikální i vodorovné osy tak, aby signál byl soustředěn do jediné složky.

c) Orientace složky je pak paralelní s orientací paprsku P vlny.

Otázka pro zápočet:

Určete azimut a inklinaci paprsku P vlny v listu Příklad 3 na základě jeho „polarizace“

Postup:

a) Otevřete list „Příklad 3“ souboru rotace.

b) Rotujte složkami tak, aby signál byl soustředěn do jediné složky.

c) Orientace složky je pak paralelní s orientací paprsku P vlny.

Odpověď:

Azimut paprsku:

Sklon paprsku:

Reference:

- Abdelwahed M.F. (2010): Waveform analysis tools in seismology, SeismoGRAPHer, Sgraph, For Windows, Full version (V.3.7.4), User Manual. - MS National Research Institute of Astronomy and Geophysics (NRIAG). Egypt.
- Abdelwahed M.F. (2012): SGRAPH (SeismoGRAPHer): Seismic waveform analysis and integrated tools in seismology. - *Computers & Geosciences*, 40, 153–165.
- Bensaid I., Bahi L., Medina F. (2014): First Determination of Source Parameters of Moderate Earthquakes ($4.1 \leq M \leq 5.1$) in Morocco from Spectral Analysis. - *Open Journal of Earthquake Research*, 2014, 3, 55-65.
- Bormann P. (ed.) (2012): *New Manual of Seismological Observatory Practice (NMSOP-2)*. - IASPEI, GFZ German Research Centre for Geosciences, Potsdam.
- Havskov J., Ottemöller L. (2010): *Routine Data Processing in Earthquake Seismology. With Sample Data, Exercises and Software*. - Springer, 347 pp.
- Kennett B.L.N. (1991): *IASPEI 1991 Seismological Tables*. – Researcher School of Earth Sciences, Australian National University.
- Lay T., Wallace T.C. (1995): *Modern Global Seismology*. - Academic Press, 521 pp.
- Storchak D.A., Schweitzer J., Bormann P. (2003): The IASPEI Standard Seismic Phase List. - *Seismological Research Letters*, 74, 6, 761-772.