

# Zpracování seismických dat

## část A: Seismický signál jako vlnová funkce

### I. Seismický signál jako funkce času

Josef Havíř  
havir@ipe.muni.cz

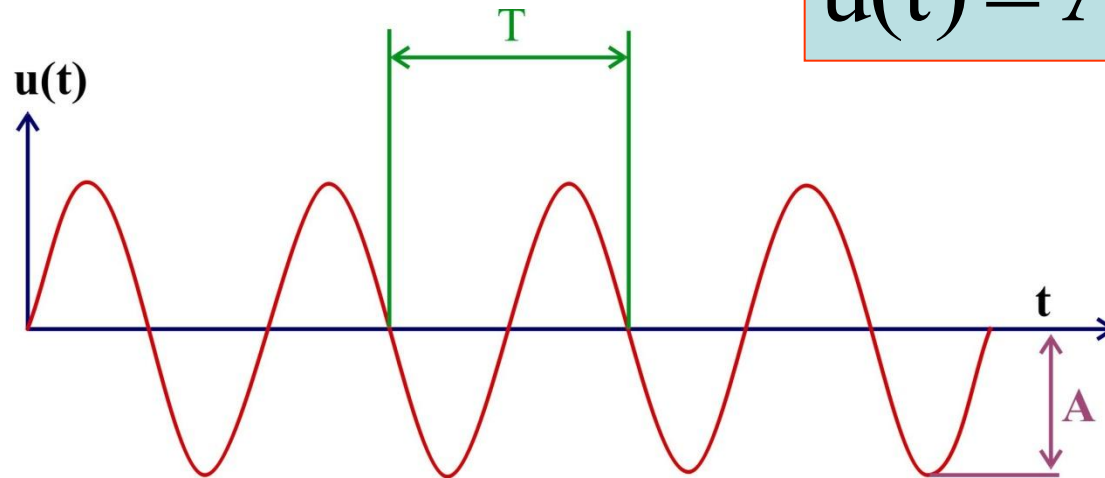


## a) vlnová funkce jako součet goniometrických funkcí

Představme si seismický signál jako jednoduchou harmonickou vlnu.

V případě, že tato vlna vyjadřuje posunutí, projevuje se v daném bodě kontinua kmitáním s frekvencí  $f$  (respektive periodou  $T$ ,  $T=1/f$ ) a amplitudou  $A$ , tj. s výchylkou  $u(t)$ :

$$u(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$



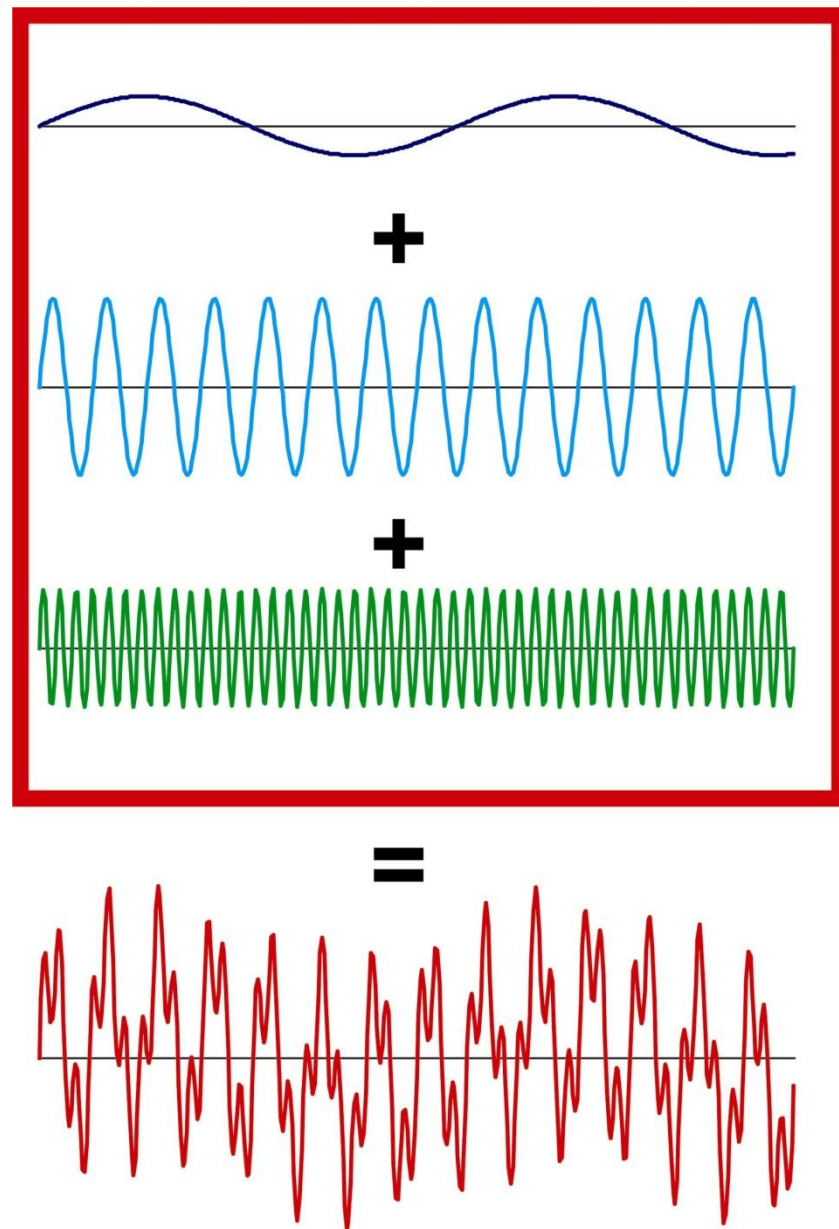
Příklad součtu tří vlnových funkcí:

$$u_1(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t)$$

$$u_2(t) = 30 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot t)$$

$$u_3(t) = 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 23 \cdot t)$$

$$u_4(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t) + 30 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot t) + 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 23 \cdot t)$$



## b) Fourierova řada

Každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + (a_1 \cos 2\pi f \cdot t + b_1 \sin 2\pi f \cdot t) + \\ + (a_2 \cos 2 \cdot 2\pi f \cdot t + b_2 \sin 2 \cdot 2\pi f \cdot t) + \\ \dots + (a_n \cos n \cdot 2\pi f \cdot t + b_n \sin n \cdot 2\pi f \cdot t) + \dots$$



Joseph Fourier  
(1768-1830)

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \cdot 2\pi f \cdot t + b_n \sin n \cdot 2\pi f \cdot t)$$



Koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  ve Fourierově řadě kvantifikují míru zastoupení sinusovek o frekvenci  $n \cdot f$  v součtu reprezentujícím celkovou vlnovou funkci.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot 2\pi f t) + b_n \sin(n \cdot 2\pi f t)$$

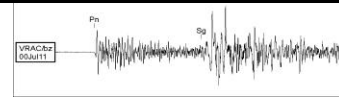
určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu  
jejich vzájemný poměr určuje fázi

určuje sledovanou frekvenci



Výhodou vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí je relativně snadná představitelnost významu jednotlivých parametrů.

Nevýhodou je existence dvou koeficientů pro jednu frekvenci a nesnadnost integrace goniometrických funkcí.



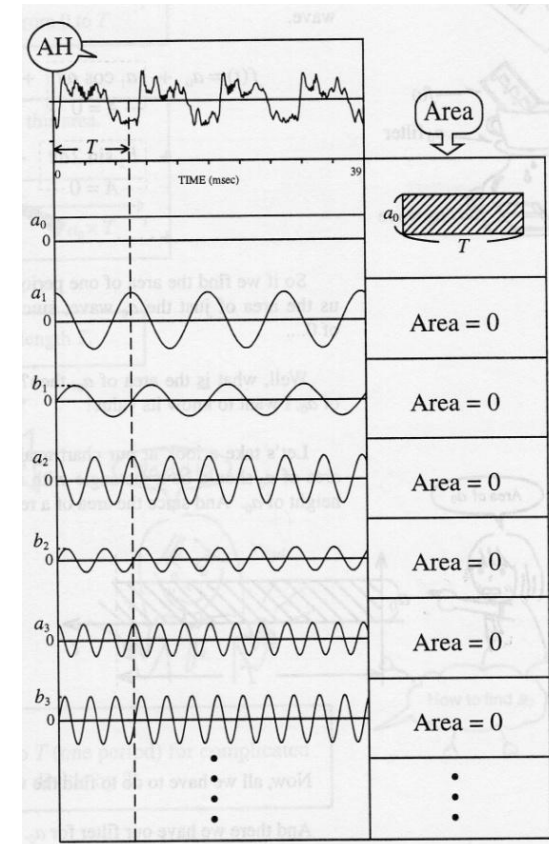
## c) konstanty Fourierovy řady

konstanty  $a_0$ ,  $a_n$  a  $b_n$  si můžeme obecně vyjádřit.

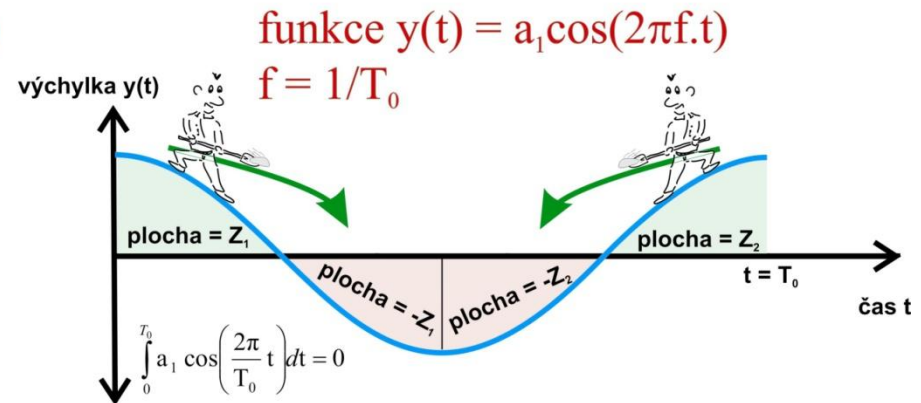
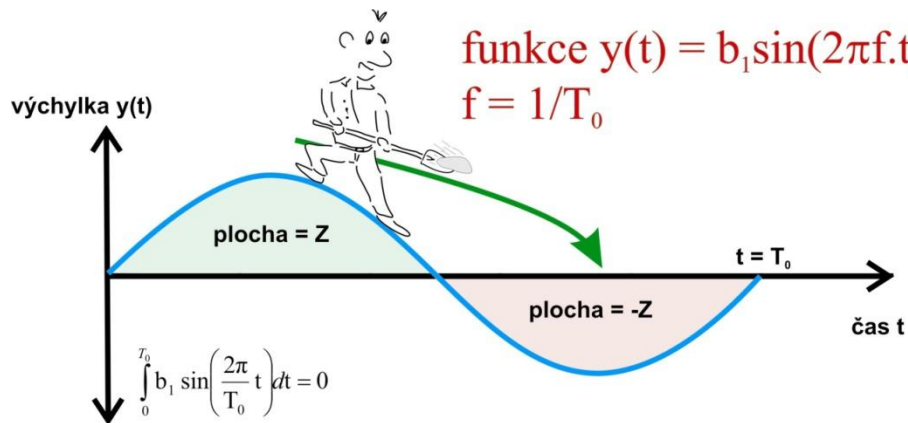
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi \cdot f \cdot n \cdot t) + b_n \sin(2\pi \cdot f \cdot n \cdot t))$$

Rozložme vlnovou funkci pro periodu  $T_0$  (předpokládejme periodickou funkci o základní periodě  $T_0$ ) do součtu sinusovek a konstanty  $a_0$ .

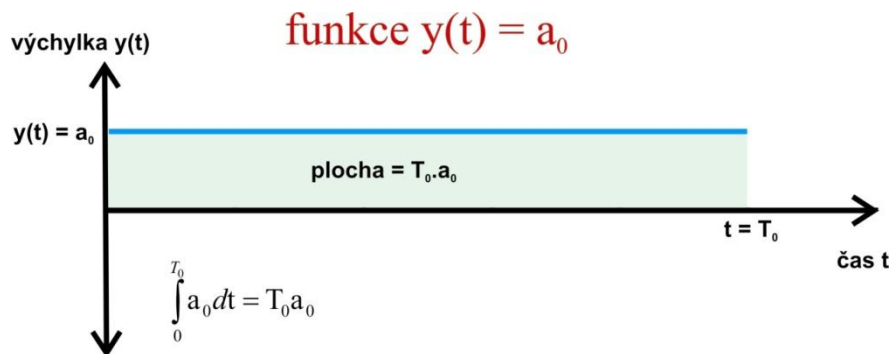
Nyní můžeme sledovat plochu vymezenou křivkami jednotlivých členů. Přitom plocha vymezená křivkou libovolné spojitě funkce  $y(t)$  odpovídá hodnotě určitého integrálu dané funkce.



Vidíme, že plocha Z vymezená jednotlivými sinusovkami, je nulová.



Plocha vymezená křivkou  $a_0$  je rovna součinu  $a_0.T_0$ . Tj. také velikost plochy vymezené vlnovou funkcí  $u(t)$  odpovídá součinu  $a_0.T_0$ .



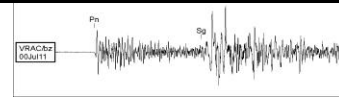
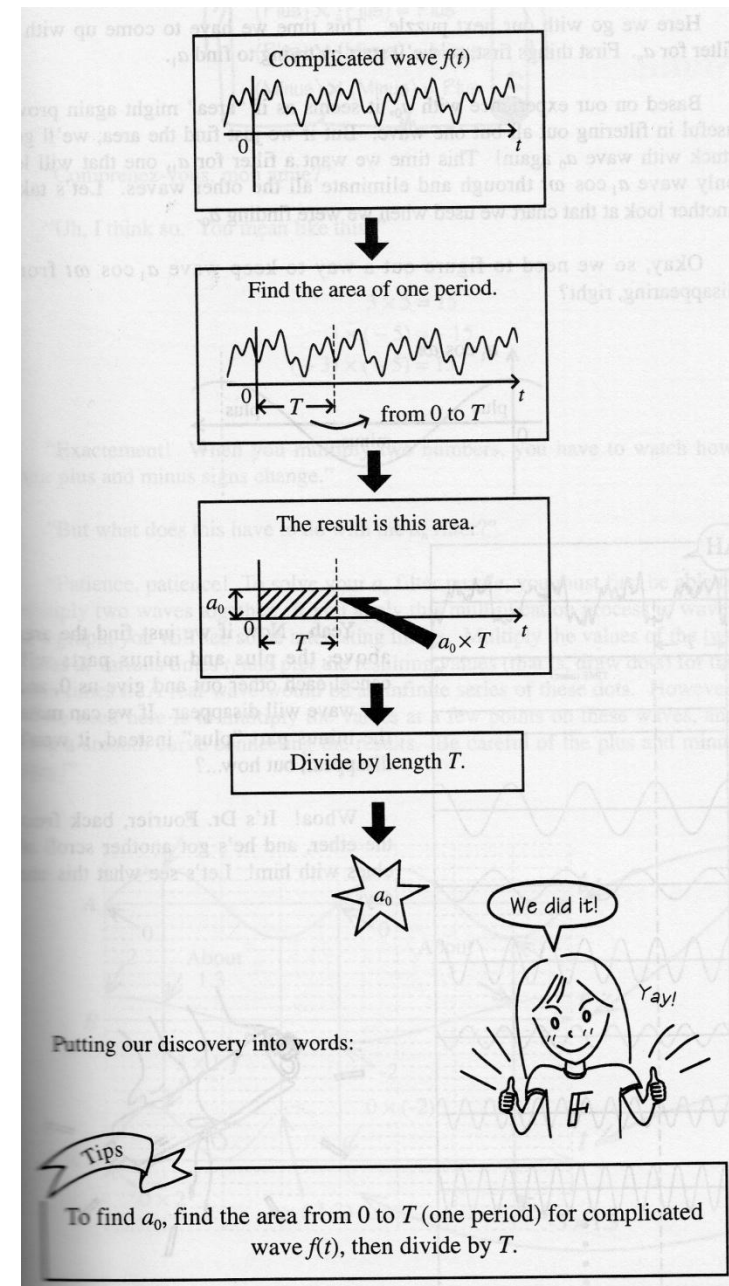
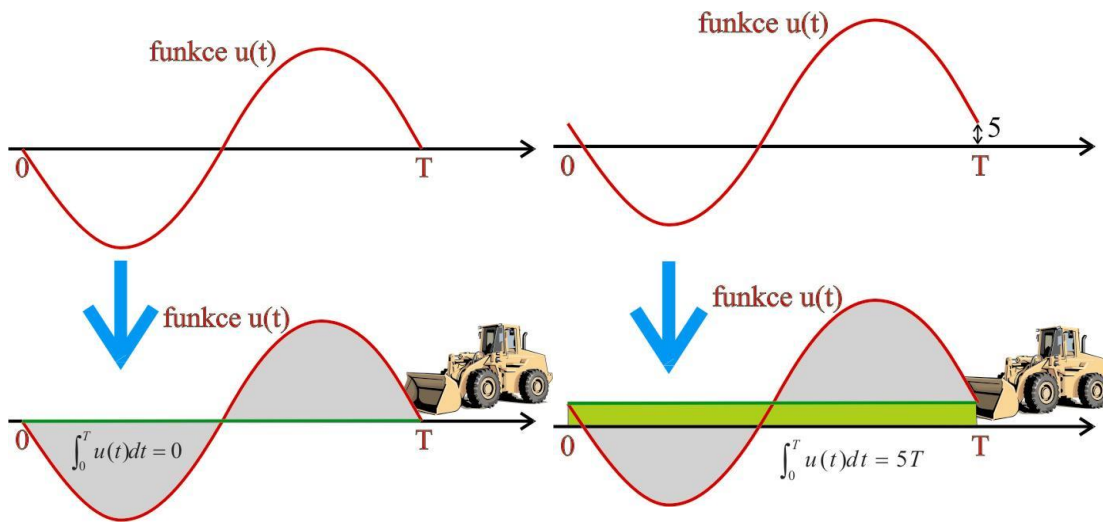
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi.f.n.t) + b_n \sin(2\pi.f.n.t))$$



Velikost plochy vymezené vlnovou funkcí  $u(t)$  odpovídá součinu  $a_0 \cdot T_0$ .

$$\int_0^T u(t) dt = a_0 \cdot T_0$$

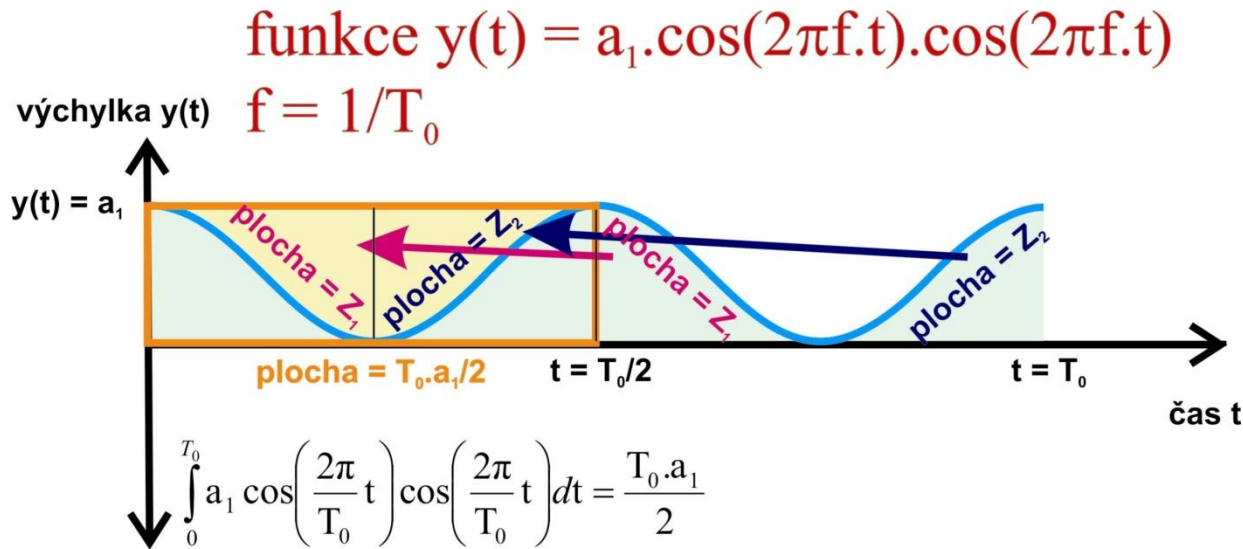
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) dt$$



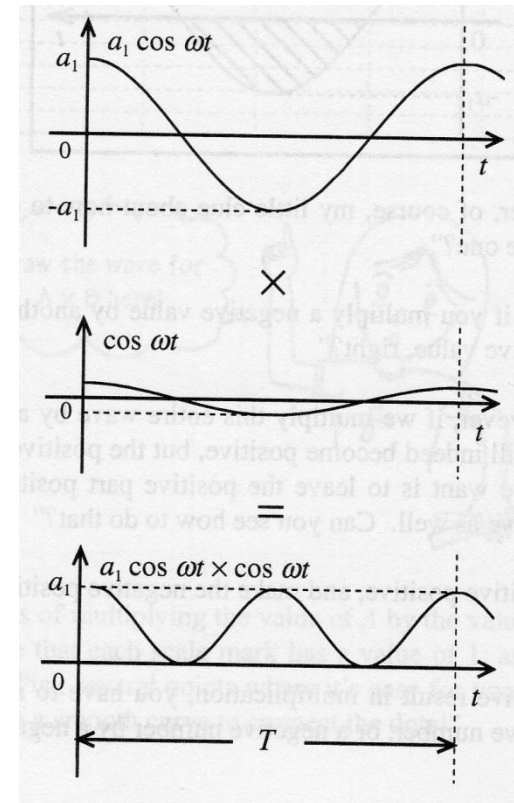


Dále vynásobme vlnovou funkcí  $u(t)$  výrazem  $\cos(2\pi.t/T_0)$  a podívejme se, jakou plochu nyní budou vymezovat jednotlivé křivky Fourierovy řady.

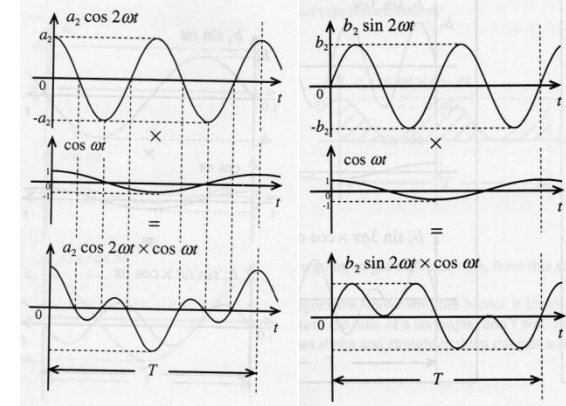
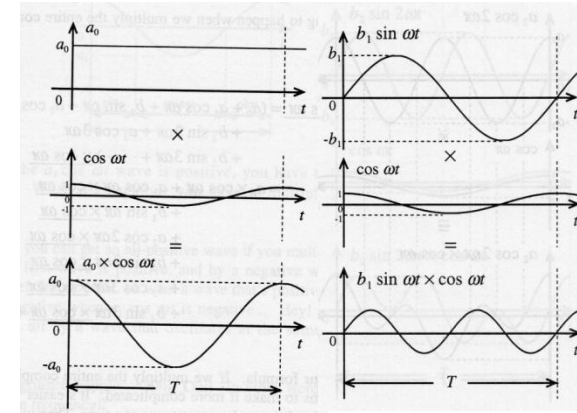
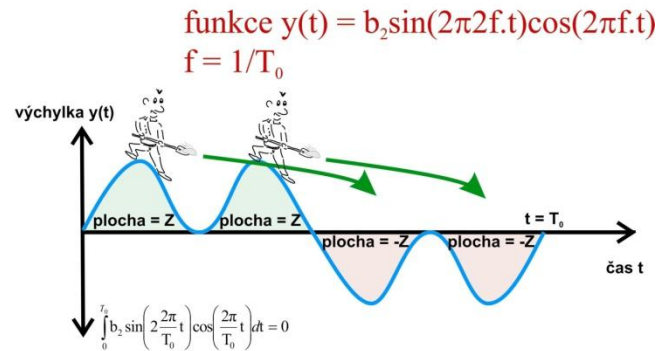
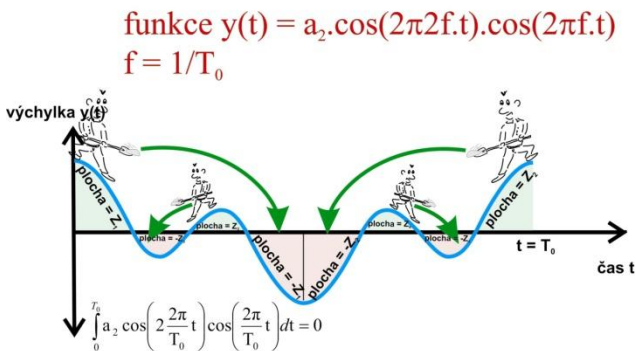
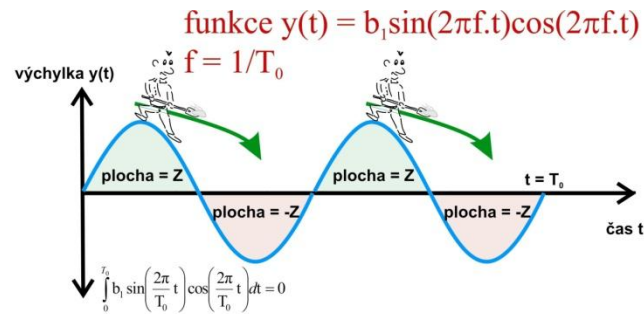
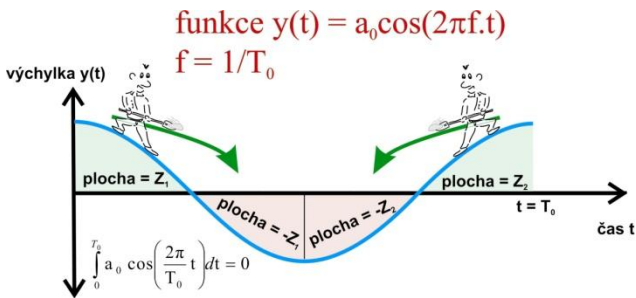
Křivka  $a_1.\cos(2\pi.t/T_0).\cos(2\pi.t/T_0)$  vymezuje plochu  $a_1.(T/2)$ :



$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi.f.n.t) + b_n \sin(2\pi.f.n.t))$$



# Plochy vymezené všemi ostatními křivkami jednotlivých členů Fourierovy řady jsou nulové.



Je tedy zřejmé, že velikost plochy vymezené vlnovou funkcí  $u(t) \cdot \cos(2\pi \cdot t/T_0)$  odpovídá součinu  $a_1 \cdot (T_0/2)$ .

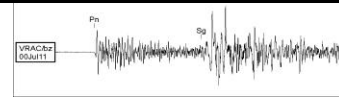
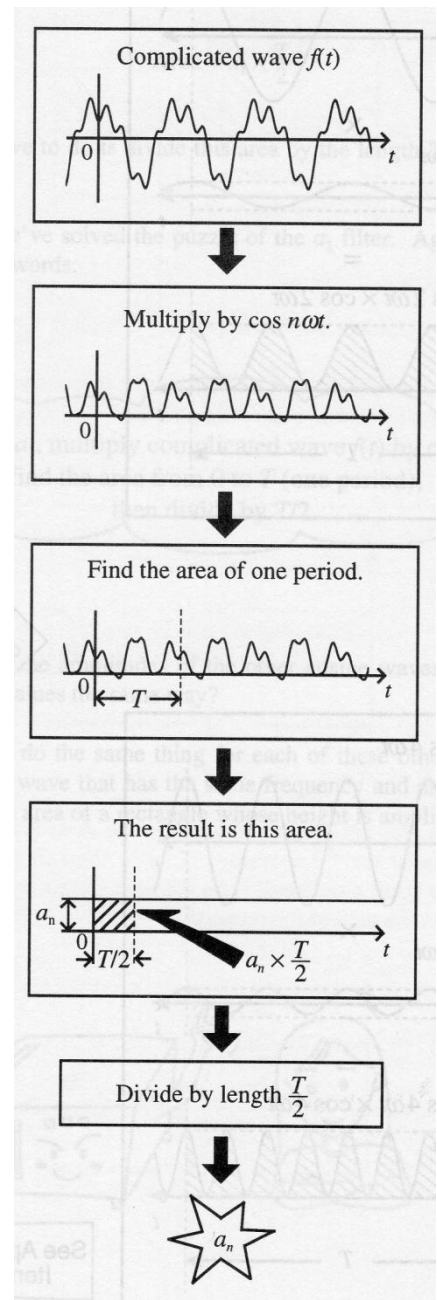
$$\int_0^T u(t) \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt = a_1 \frac{2}{T_0}$$

$$a_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_0^T u(t) \cos\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt = a_n \frac{2}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \cos\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$



Stejně bychom mohli odvodit, že velikost plochy vymezené vlnovou funkcí  $u(t) \cdot \sin(2\pi \cdot t / T_0)$  odpovídá součinu  $b_1 \cdot (T_0 / 2)$ .

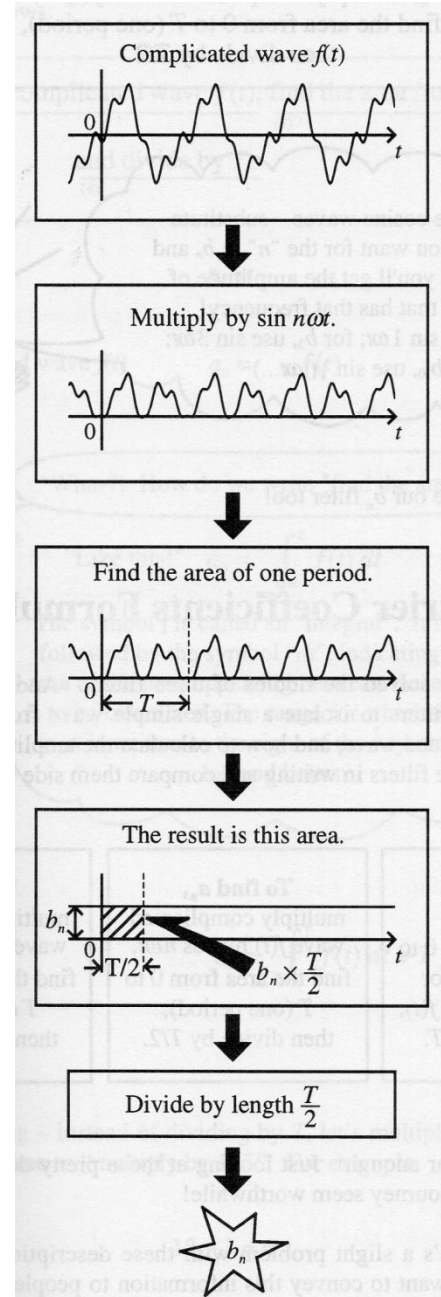
$$\int_0^T u(t) \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt = b_1 \frac{2}{T_0}$$

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_0^T u(t) \sin\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt = b_n \frac{2}{T_0}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \sin\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$



Pro konstanty Fourierovy řady tedy platí obecné vztahy:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^T u(t) dt$$

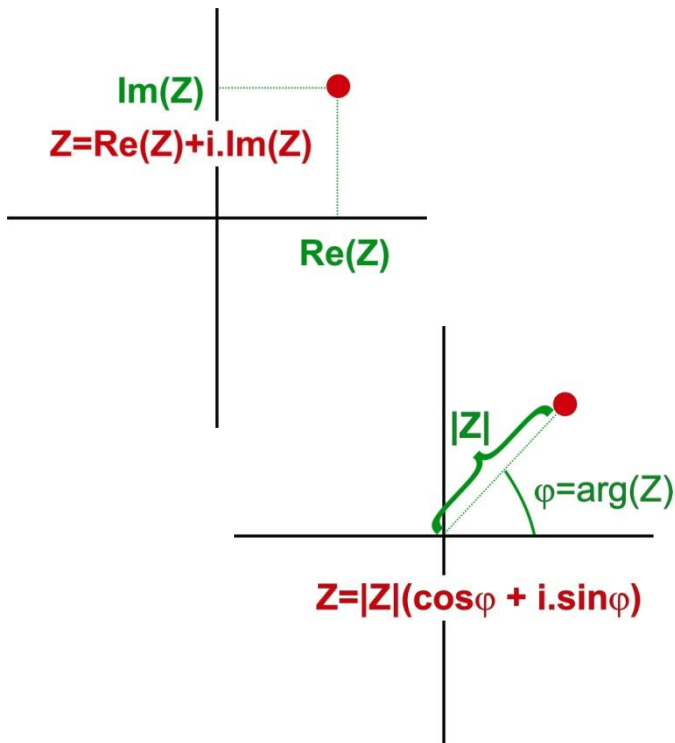
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \cos\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^T u(t) \sin\left(n \frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) dt$$

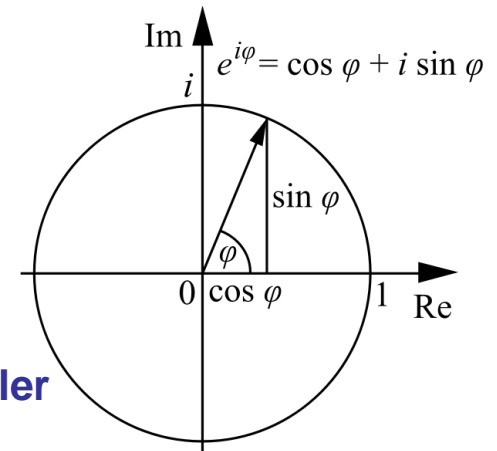


## d) komplexní tvar Fourierovy řady

Nevýhody vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí řeší komplexní tvar Fourierovy řady. Vychází z geometrického významu komplexního čísla a z tzv. Eulerovy věty.



Leonhard Paul Euler  
(1707-1783)



$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi ft}$$



vyjdeme z eulerova vzorce:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

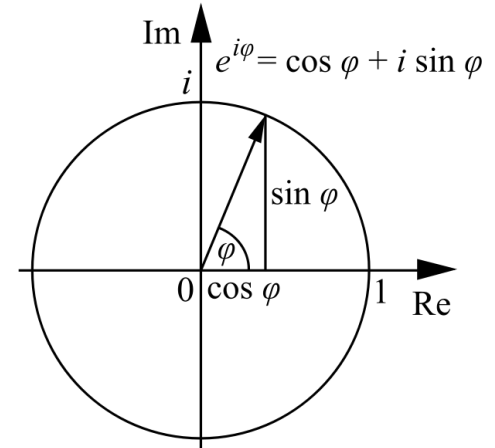
provedeme substituci:

$$\varphi = n\omega t$$

získáme vztahy:

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t$$

$$e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i \sin n\omega t$$



vhodným součtem těchto vztahů si vyjádříme goniometrické funkce:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$



Do rovnice Fourierovy řady můžeme dosadit komplexní členy:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$



$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + \frac{b_n}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \right]$$





Rovnici můžeme upravit a zjednoduřit:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + \frac{b_n}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \right]$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\omega t} \right]$$

$$A_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$B_n = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{in\omega t} dt$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n e^{in\omega t} + B_n e^{-in\omega t} \right]$$



Vyjdeme-li ze vztahu:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$

Lze ukázat, že rozšíříme-li  $n$  na všechna celá čísla (tj. i na hodnotu 0 a na záporná čísla), pak platí:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i0\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = a_0$$

$$A_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i(-n)\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{in\omega t} dt = B_n$$



V komplexním tvaru si tedy můžeme všechny koeficienty ( $a_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ) vyjádřit jediným koeficientem, rozšíříme-li  $n$  na všechna celá čísla, a Fourierovu řadu můžeme zjednodušit na tvar:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

Kde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$



Komplexní tvar převádí goniometrické funkce sinus a cosinus na vyjádření pomocí exponenciální funkce  $e^x$  s komplexní proměnnou.

V tomto tvaru si pak můžeme všechny koeficienty ( $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ) vyjádřit jediným (ovšem komplexním) koeficientem.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi f t}$$



určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu

protože je to komplexní číslo, zahrnuje také informaci o fázi

určuje sledovanou frekvenci

