část A: Seismický signál jako vlnová funkce

II. Seismický signál jako funkce frekvence

Josef Havíř
havir@ipe.muni.cz

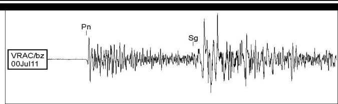
a) Fourierova transformace

Fourierova řada kvantifikuje míru zastoupení sinusovek o frekvenci n.f v součtu reprezentujícím celkovou vlnovou funkci.

Amplituda u(t) je přitom vyjádřena jako funkce času.

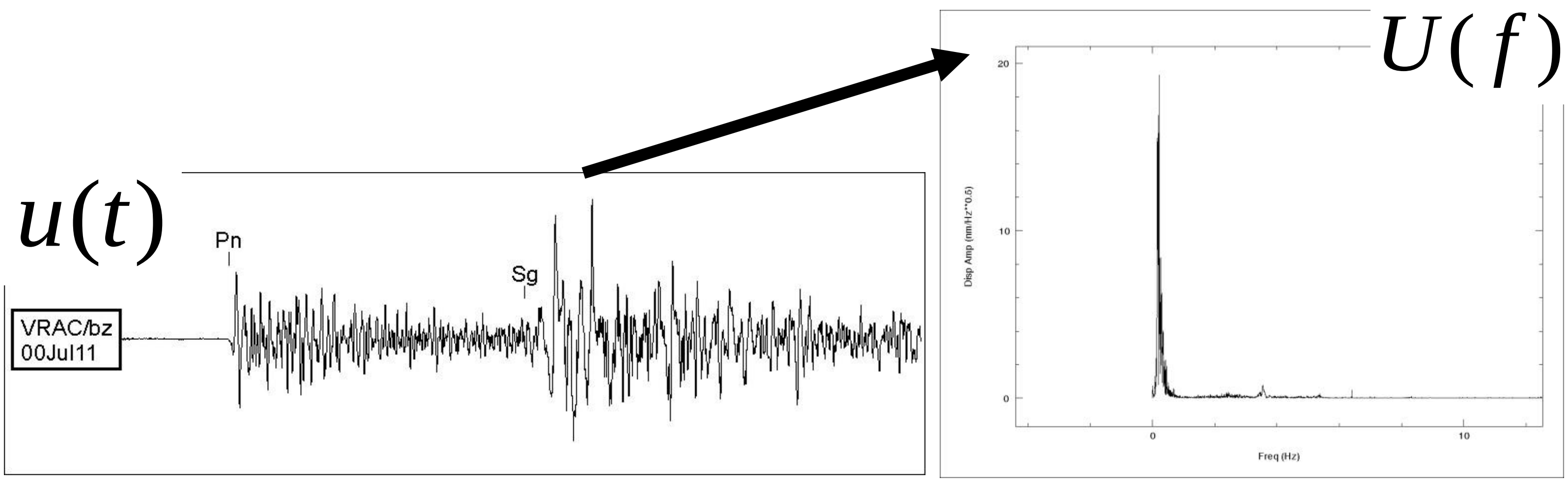
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n.2\pi f.t + b_n \sin n.2\pi f.t \right)$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi ft}$$



Míru zastoupení různých frekvencí v signálu v určitém zvoleném časovém okně lépe vyjádří funkce ukazující závislost amplitudy U(f) nikoli na čase, ale na frekvenci.

Převod signálu z funkce času na funkci frekvence se nazývá **Fourierova transformace**

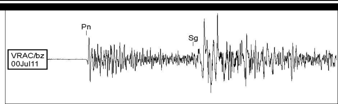


Nejsnáze si matematicky představíme princip Fourierovy transformace, když vyjdeme z komplexního tvaru Fourierovy řady:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

A z vyjádření koeficientu C_n:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$

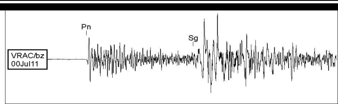


Dosaďme do vztahu Fourierovy řady komplexní výraz pro koeficient C_n:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{in\omega t}$$



Položíme-li, že T jde k nekonečnu, můžeme vztah přepsat:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{in\omega t}$$

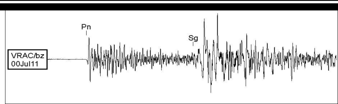
$$u(t) = \lim_{T \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in2\pi f_n t} dt \right] e^{in2\pi f_n t}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi f t} dt \right] e^{i2\pi f t} df$$

Výraz v hranaté závorce je pouze funkcí frekvence, protože integrujeme-li pro čas t od -∞ do ∞, je čas fixován. Můžeme jej nazvat U(f):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt \right] e^{i2\pi ft} df$$

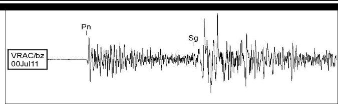
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df$$



Výsledný vztah je vztahem Fourierovy transformace

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df$$



- Funkce U(f) závislá na frekvenci se nazývá **spektrum**.

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

- Spektrum je komplexní veličina.

velikost $|U(f)|$ udává tzv.amplitudové spektrum

úhel $\arg(U(f))$ representuje tzv. fázové spektrum

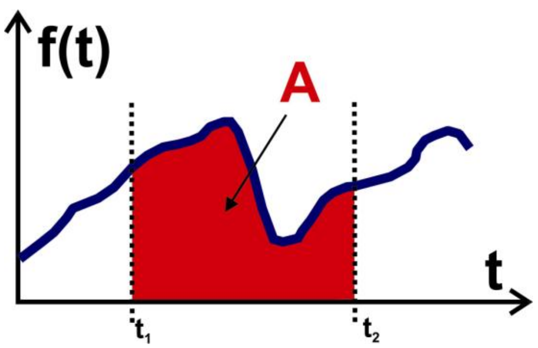
V čem je podstata vztahu pro Fourierovu transformaci?

$$U(f)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

jde tedy o plochu pod křivkou funkce f(t), kde

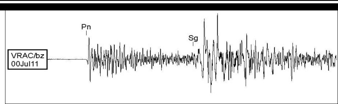
$f(t) = u(t).e^{-2\pi ft}$,

a to v celém rozsahu křivky (pro čas od minus nekonečna do nekonečna)

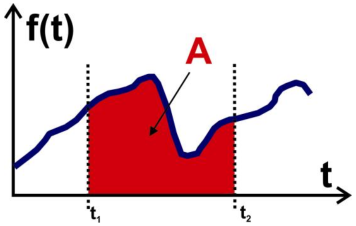


$$A=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Integrál funkce času f(t) od t_1 do t_2 je plocha pod křivkou dané funkce ve stanoveném intervalu.



V čem je podstata vztahu pro Fourierovu transformaci?



$$U(f)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

integrál není funkcí času

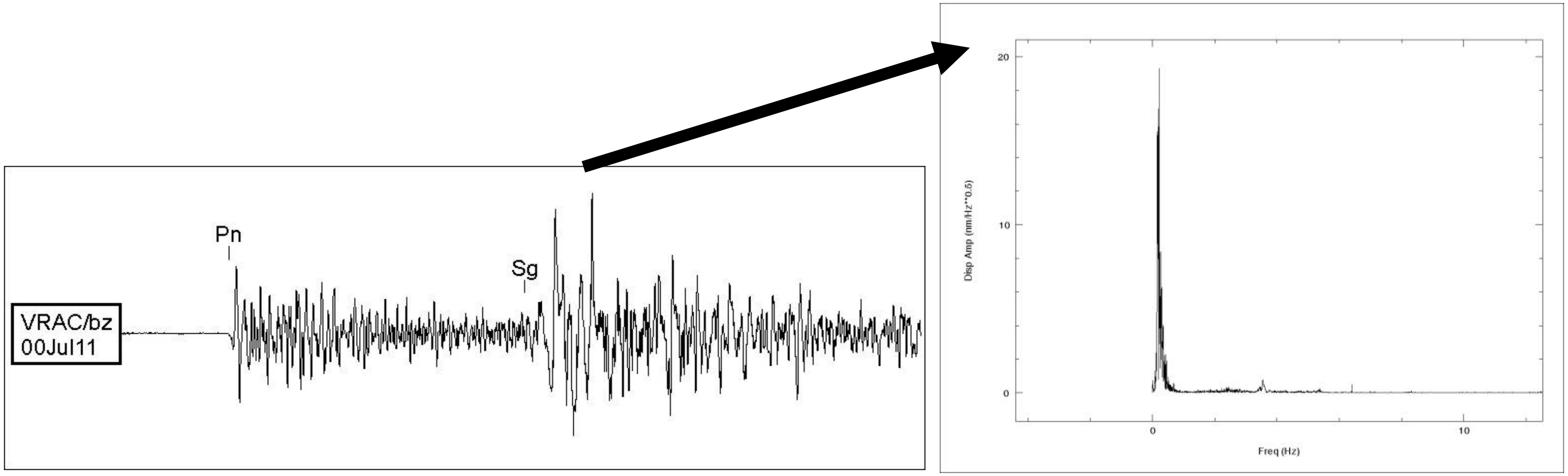
integrál je funkcí frekvence

Vymezením času od minus nekonečna do nekonečna je však čas fixován – ať do vztahu dosadíme za čas t jakoukoli hodnotu, plocha pod křivkou daná integrálem bude stejná.

Tedy – přestože f(t) [$f(t)= u(t).e^{-2\pi ft}$] je funkcí času, daný integrál již funkcí času není (nezávisí na času t)!

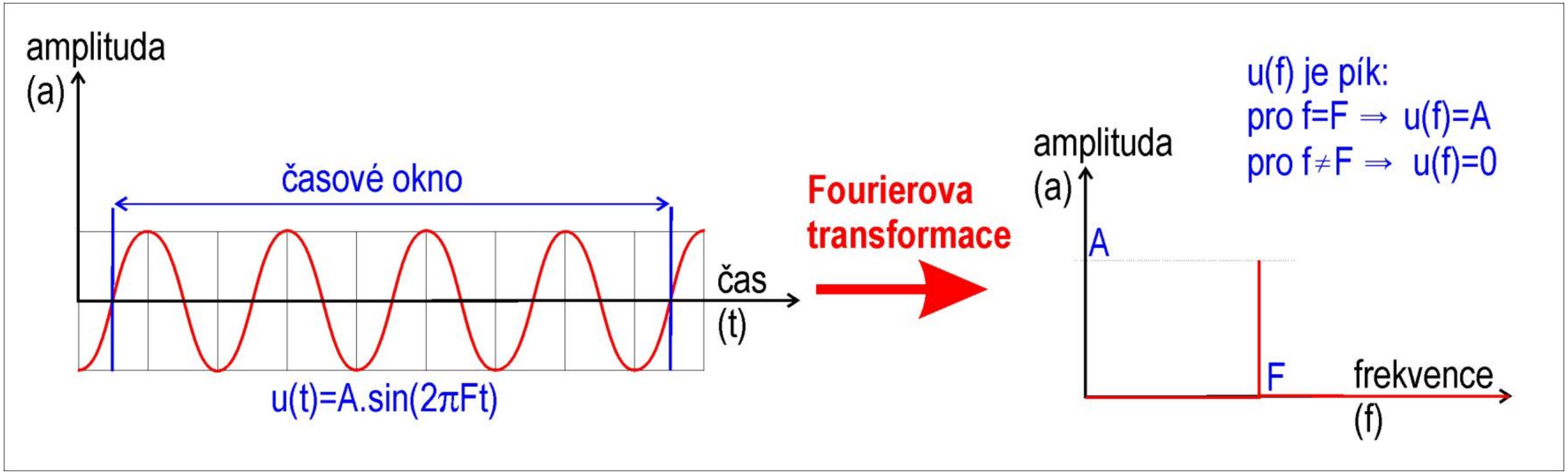
Současně vidíme, že plocha pod křivkou funkce f(t) bude různá pro různé frekvence f ... tedy, že daný integrál je funkcí frekvence!

Fourierovu transformaci si můžeme demonstrovat na příkladech dvou speciálních funkcí - jednoduché sinusovky a píku.



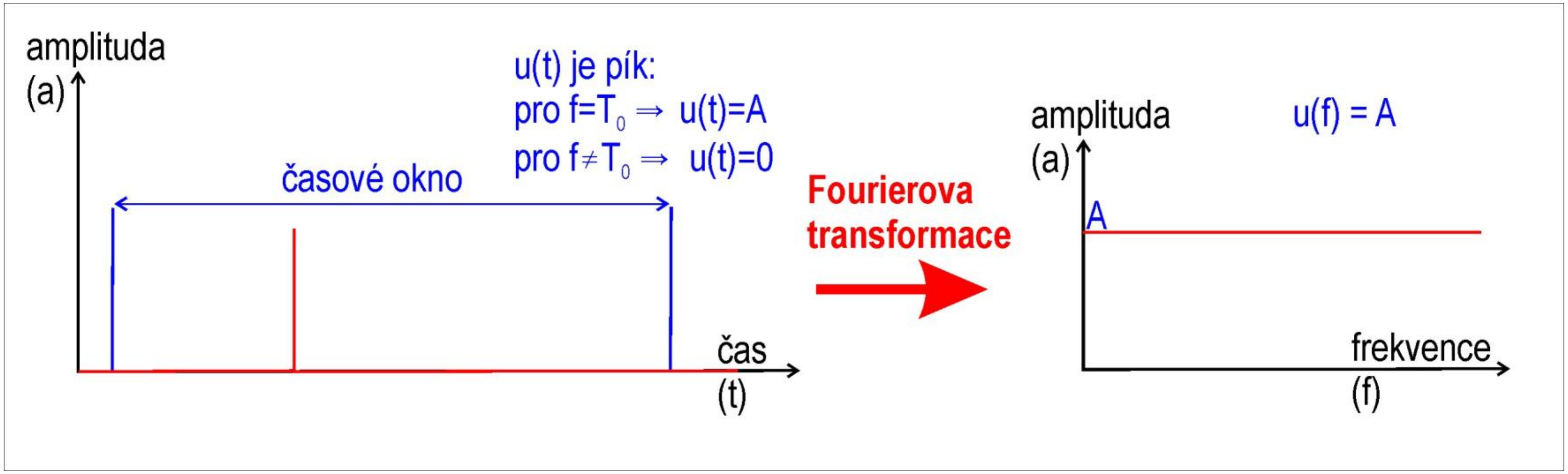
jednoduchá sinusoida

je funkce popsaná jednou konkrétní hodnotou frekvence **F** a jednou konkrétní hodnotou amplitudy **A**. Její frekvenční popis je tedy funkce, která má nenulovou hodnotu pouze v bodě o frekvenci F, všude jinde je nulová (tzv. **impuls** neboli **pík**).



pík

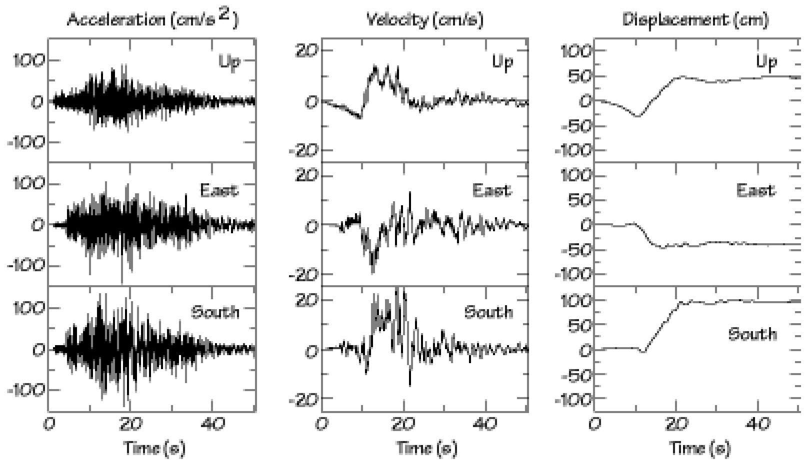
lze popsat jako součet sinusoidových křivek. V tomto případě potřebujeme sčítat nekonečně mnoho křivek (musíme použít všechny možné frekvence) a že amplituda všech jednotlivých křivek je stejná (v píku jsou obsaženy stejnou měrou všechny frekvence).

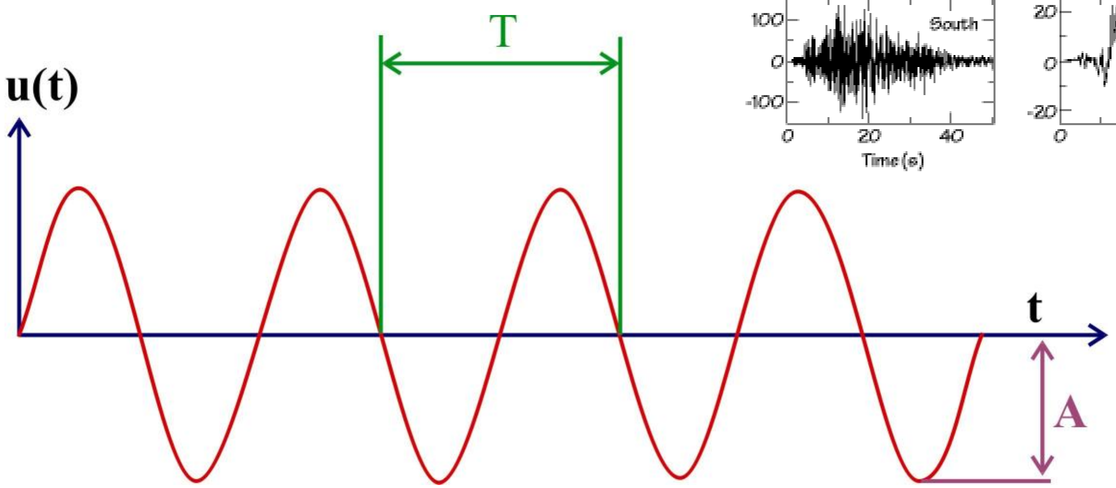


b) Spektrum signálu - posunutí, rychlost a zrychlení

Seismický záznam může zachycovat kmitání částic kontinua ve smyslu:

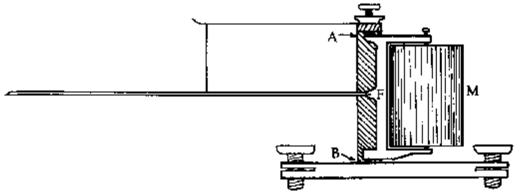
- posunutí polohy částice
- rychlost posunutí polohy částice
- zrychlení posunutí polohy částice





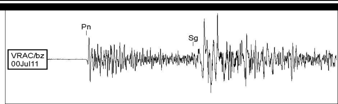
Různé typy přístrojů mohou přímo měřit amplitudy různých veličin charakterizujících kmitavý pohyb:

-mechanické seismometry – posunutí

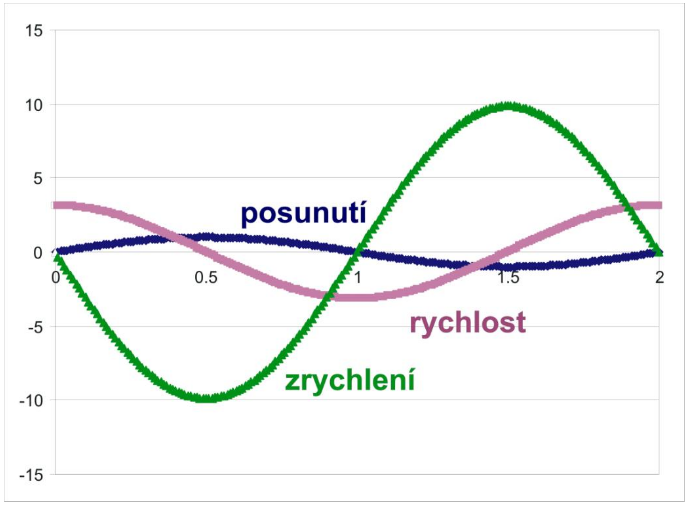


-elektromagnetické seismometry – rychlost

- akcelerometry - zrychlení



Při převedení téhož signálu z posunutí na rychlost či zrychlení vidíme, že změna amplitudy v různých typech signálů je závislá na frekvenci.



posunutí

$$\boxed{u_0(t) = A\sin\left(2\pi.f.t\right)}$$

rychlost

$$v_0(t) = \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$$

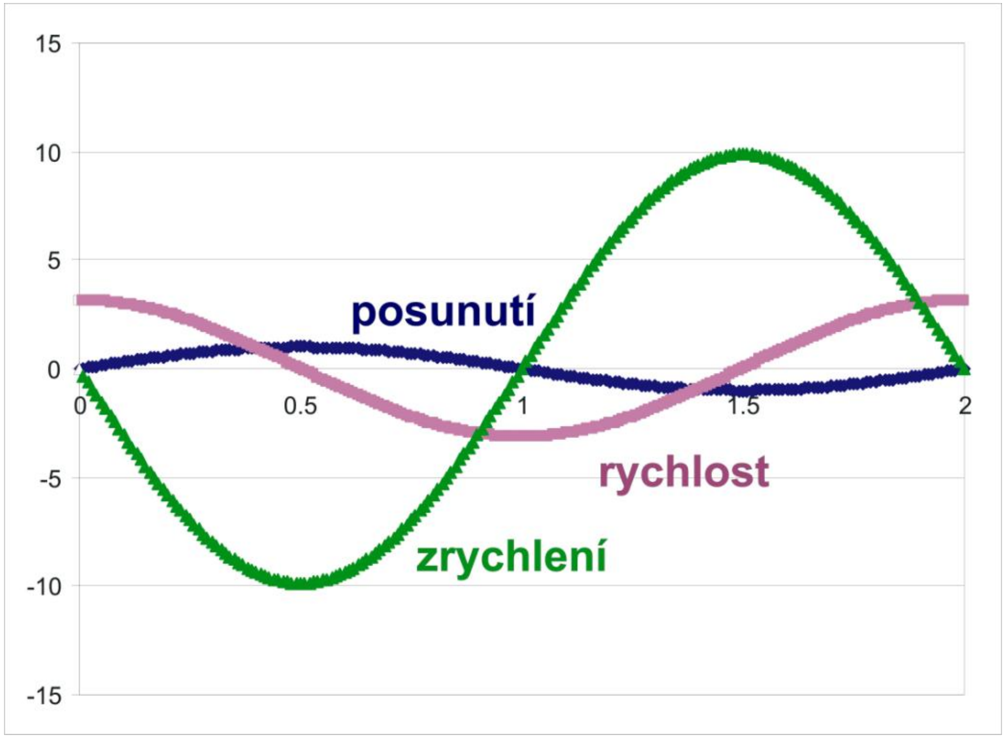
$$\boxed{v_0(t) = 2\pi.f.A\cos\left(2\pi.f.t\right)}$$

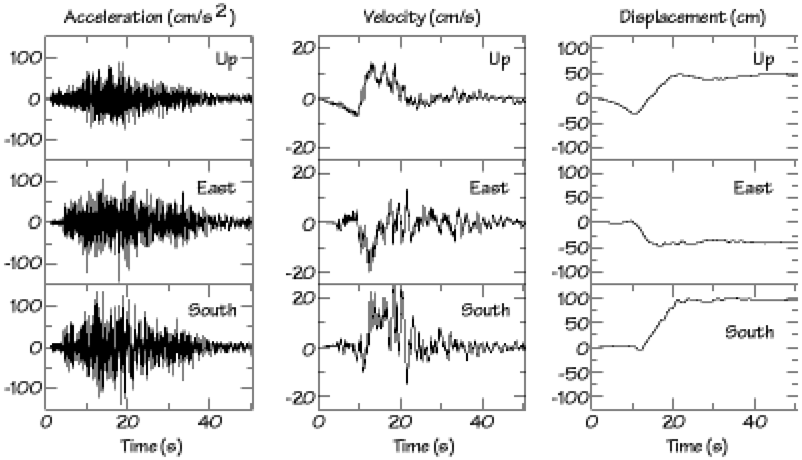
zrychlení

$$s_0(t) = \frac{\partial v_0(t)}{\partial t}$$

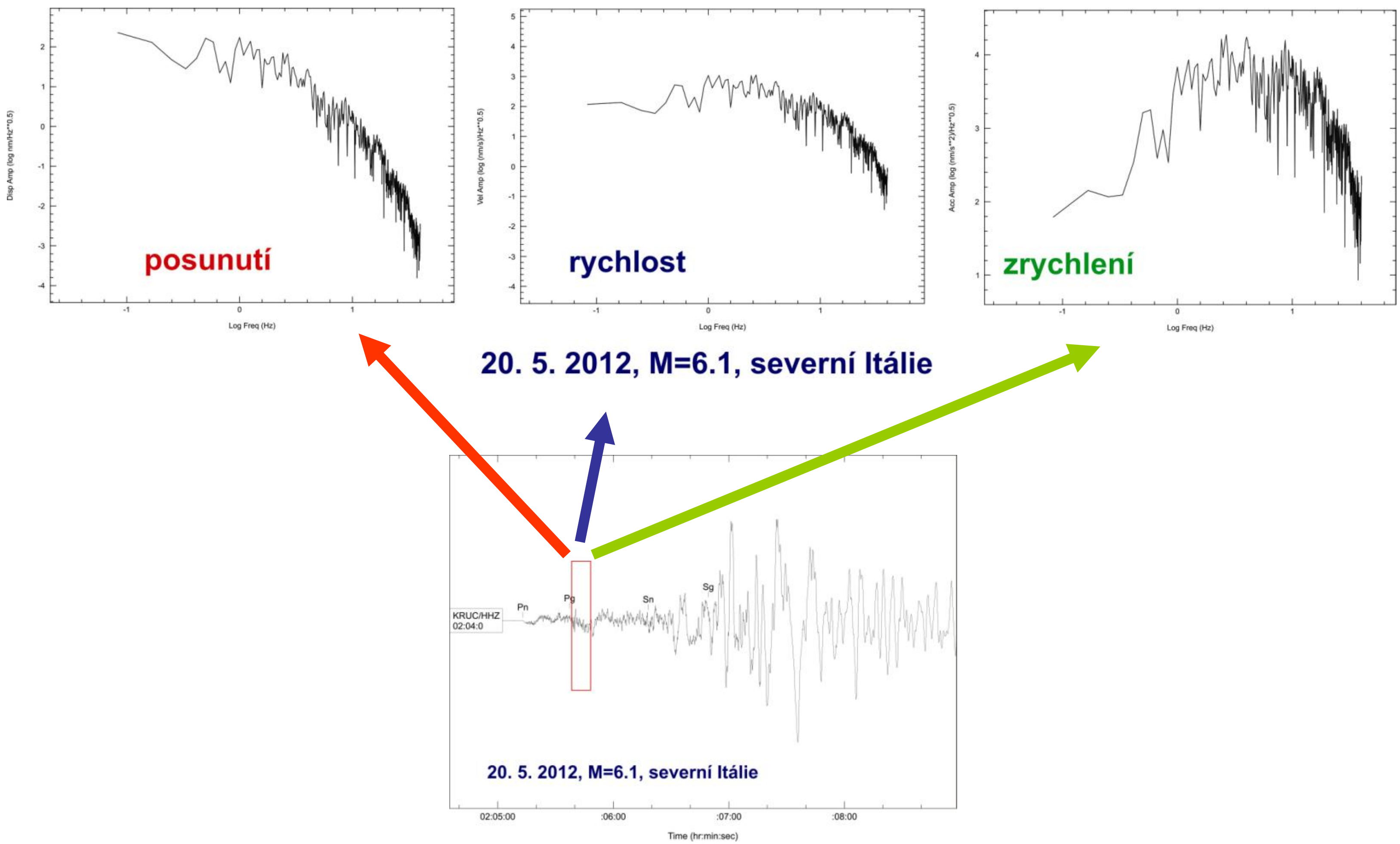
$$\boxed{s_0(t) = -\left(2\pi.f\right)^2.A\sin\left(2\pi.f.t\right)}$$

Pro jednoduchou sinusovku platí, že derivací se frekvence signálu nemění. Mění se ale fáze a amplituda, přičemž změna amplitudy závisí na frekvenci.





Spektrum signálu se tedy liší podle toho, zda jde o spektrum posunutí, rychlosti či zrychlení.



V případě jednoduché sinusovky platí, že vztahy pro přepočet mezi amplitudami posunutí, rychlostí a zrychlení jsou lineární.

$u_0(t) = A\sin(2\pi.f.t)$ $v_0(t) = 2\pi.f.A\cos(2\pi.f.t)$ $s_0(t) = -(2\pi.f)^2.A\sin(2\pi.f.t)$

$A_v = A_u(2\pi.f)$ $A_s = A_v(2\pi.f)$ $A_s = A_u(2\pi.f)^2$