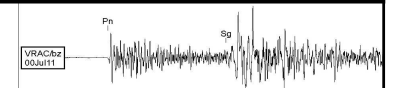


# Zpracování seismických dat

## část B: Seismický paprsek

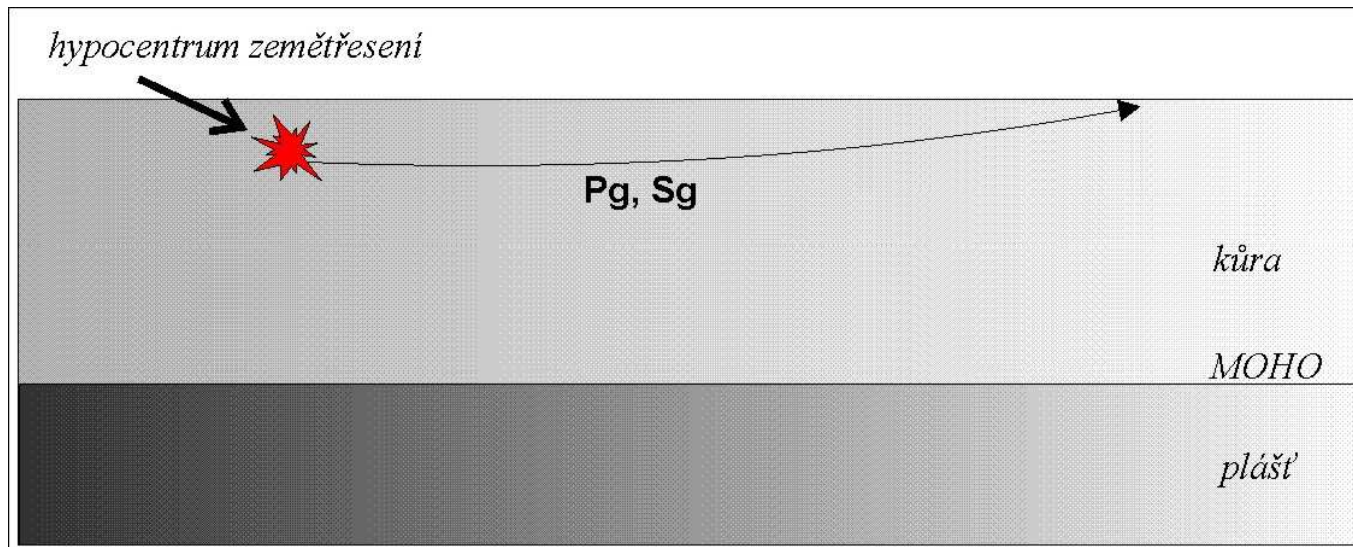
### V. Dráha seismického paprsku

Josef Havíř  
havir@ipe.muni.cz

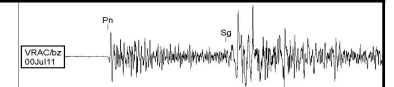


## a) Homogenní prostředí

V homogenním prostředí lze seismický paprsek aproximovat úsečkou s body v hypocentru a v místě detekce.

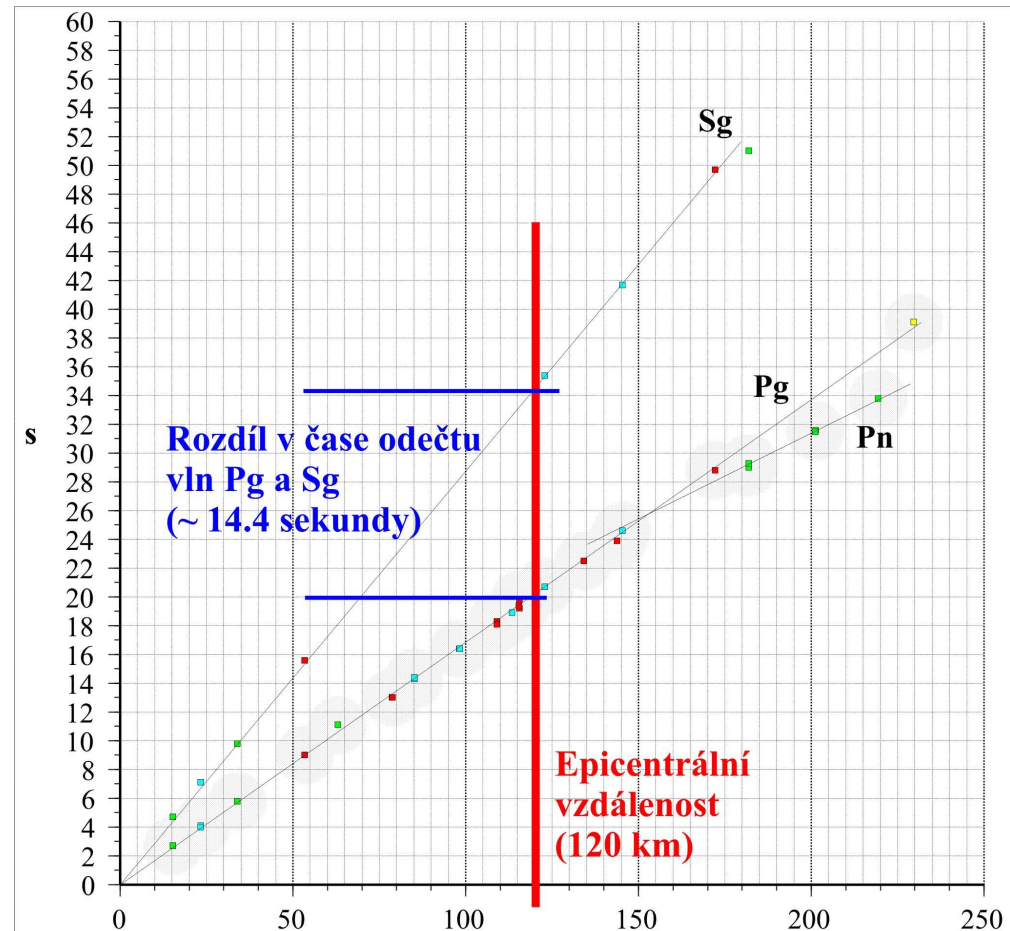


I v homogenním prostředí lze rozlišit alespoň dvě seismické fáze: přímou podélnou vlnu ( $P_g$ ) a přímou příčnou vlnu ( $S_g$ ).



# odvození vzdálenosti z hodochrony

Známe-li hodochrony vln Pg a Sg, lze odečítat přibližnou vzdálenost ohniska lokálních jevů z grafů.

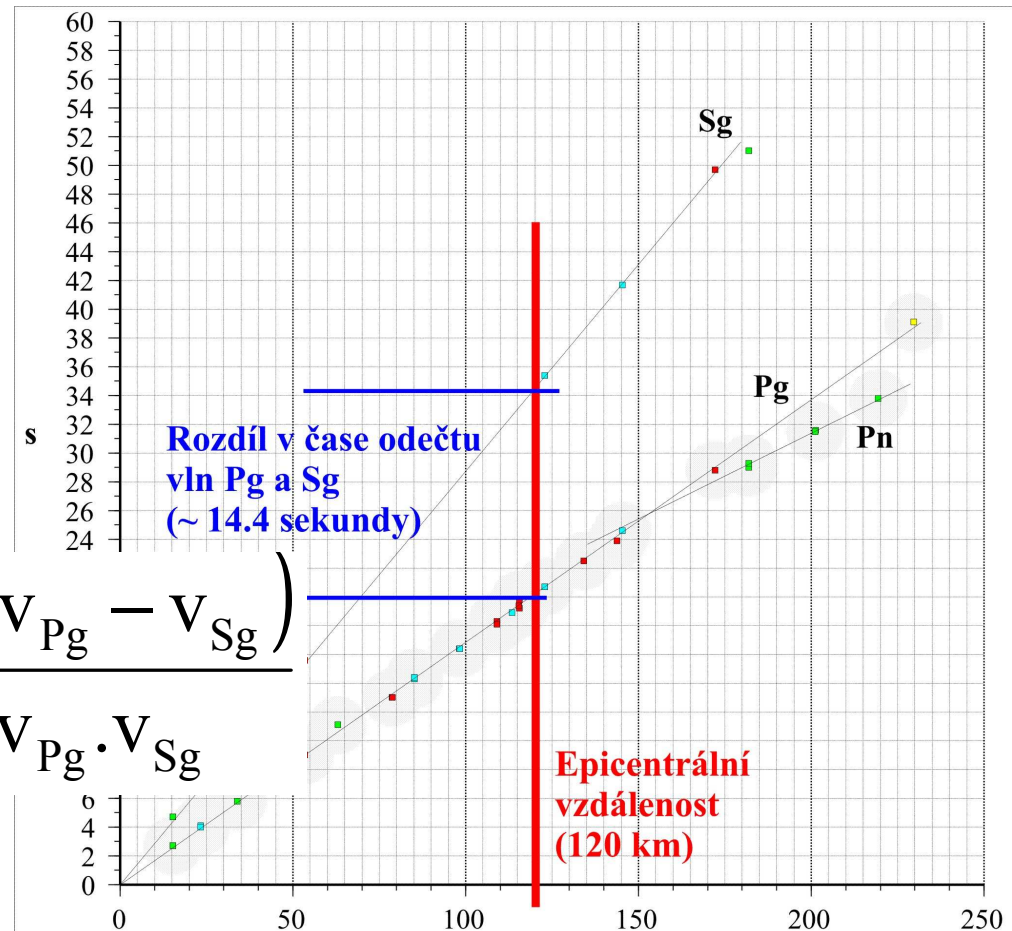


Je-li prostředí homogenní (rychlosti seismických vln jsou konstantní), lze určit vzdálenost ohniska  $X$  jednoduchým výpočtem (pro přímé vlny  $P_g$  a  $S_g$ ):

$$V_{P_g} = \frac{X}{t_{P_g}}, V_{S_g} = \frac{X}{t_{S_g}}$$

$$\Rightarrow t_{P_g} = \frac{X}{V_{P_g}}, t_{S_g} = \frac{X}{V_{S_g}}$$

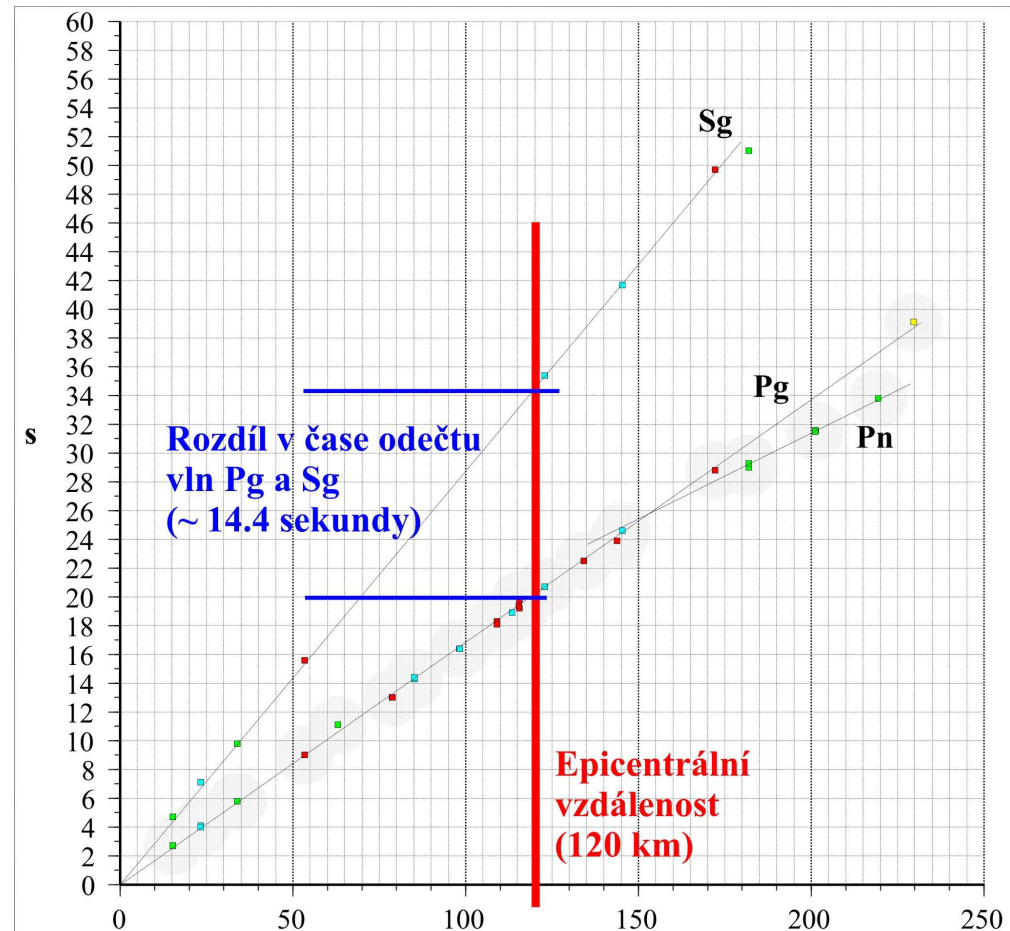
$$t_{S_g} - t_{P_g} = \frac{X}{V_{S_g}} - \frac{X}{V_{P_g}} = \frac{X(V_{P_g} - V_{S_g})}{V_{P_g} \cdot V_{S_g}}$$



Vzdálenost X je tedy homogenním prostředí rovna:

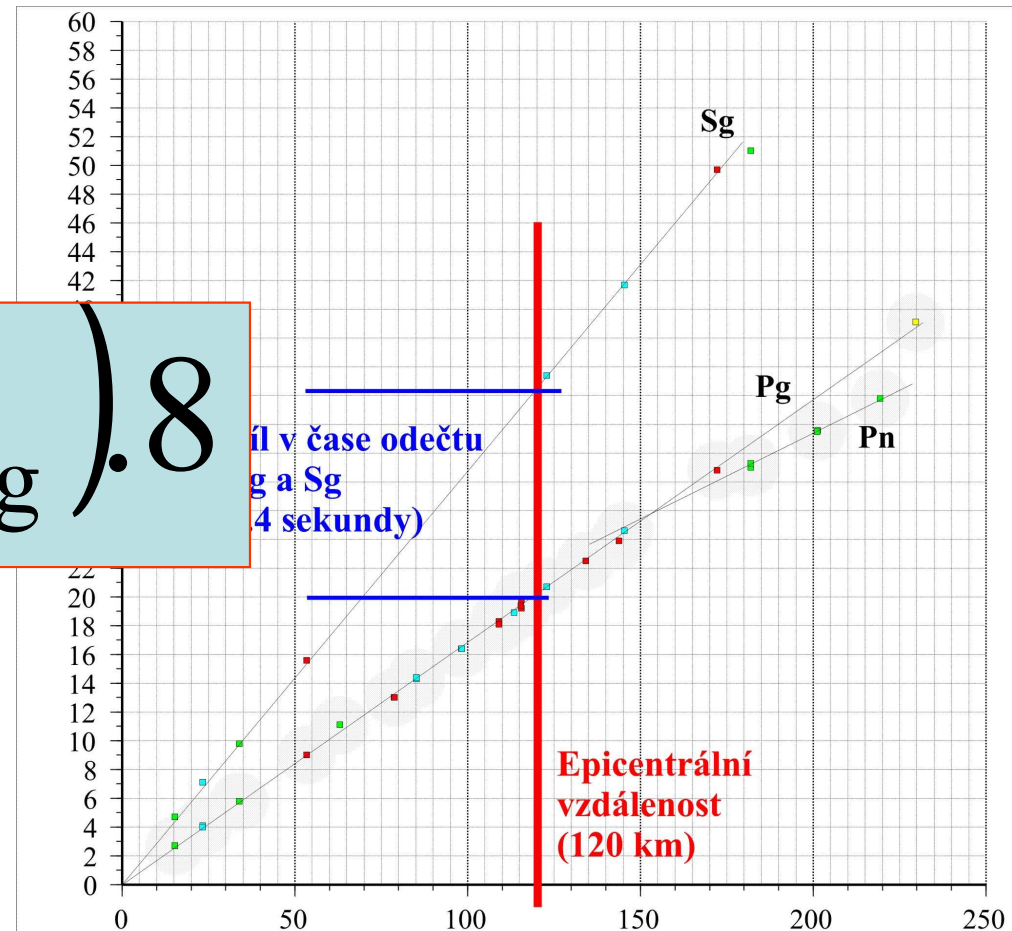
$$t_{Sg} - t_{Pg} = \frac{X(v_{Pg} - v_{Sg})}{v_{Pg} \cdot v_{Sg}}$$

$$X = \frac{v_{Pg} \cdot v_{Sg} \cdot (t_{Sg} - t_{Pg})}{(v_{Pg} - v_{Sg})}$$



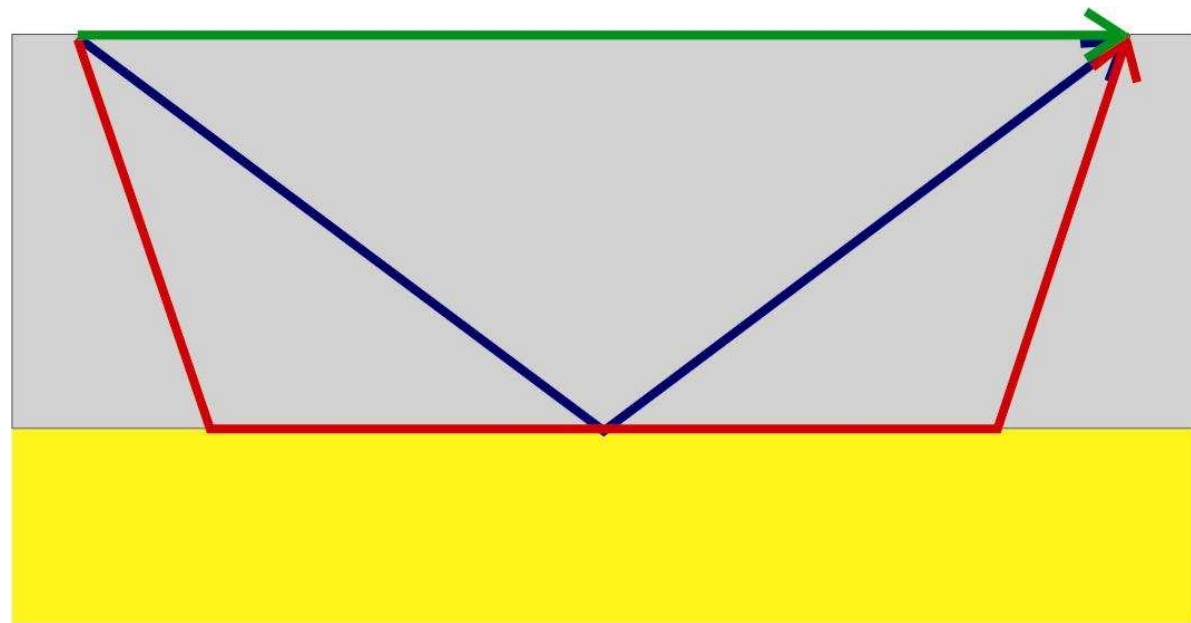
Rychlosti podélných a příčných vln nejsou zcela nezávislé veličiny, jejich poměr závisí na reologických vlastnostech prostředí. Proto pro lokální vzdálenosti platí přibližně tento vztah mezi rozdílem časů odečtů  $P_g$  a  $S_g$  vln a vzdáleností:

$$X \cong (t_{S_g} - t_{P_g}) \cdot 8$$



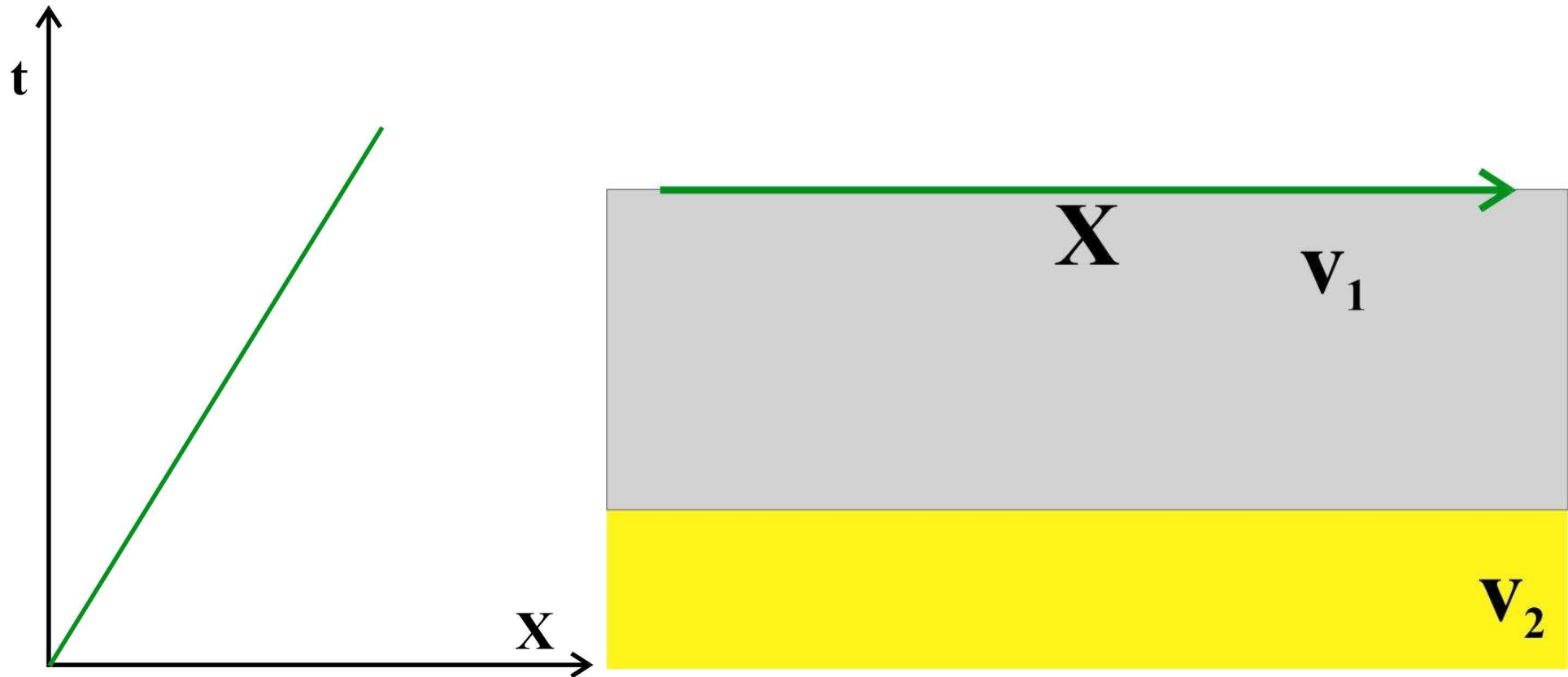
## b) Vrstevnatý model

Ve vrstevnatém modelu přichází po různých drahách do jednoho místa více podélných vln. Vedle přímé vlny se šíří také vlny odražené a lomené.



# přímá vlna

$$t = \frac{X}{v}$$



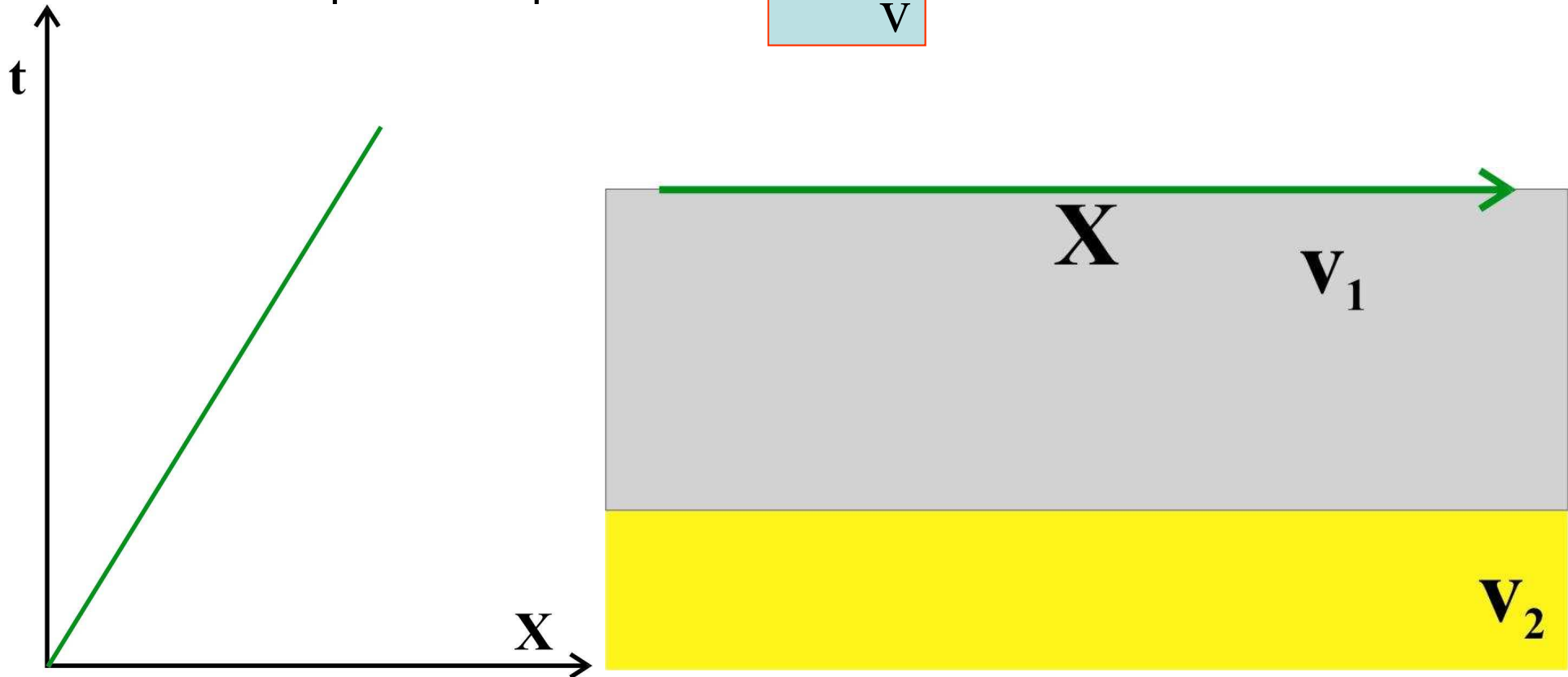


Hodochrona má tvar přímky.

$$t = \frac{X}{v} \Leftrightarrow t = p \cdot X$$

Zavedeme parametr  $p$ :

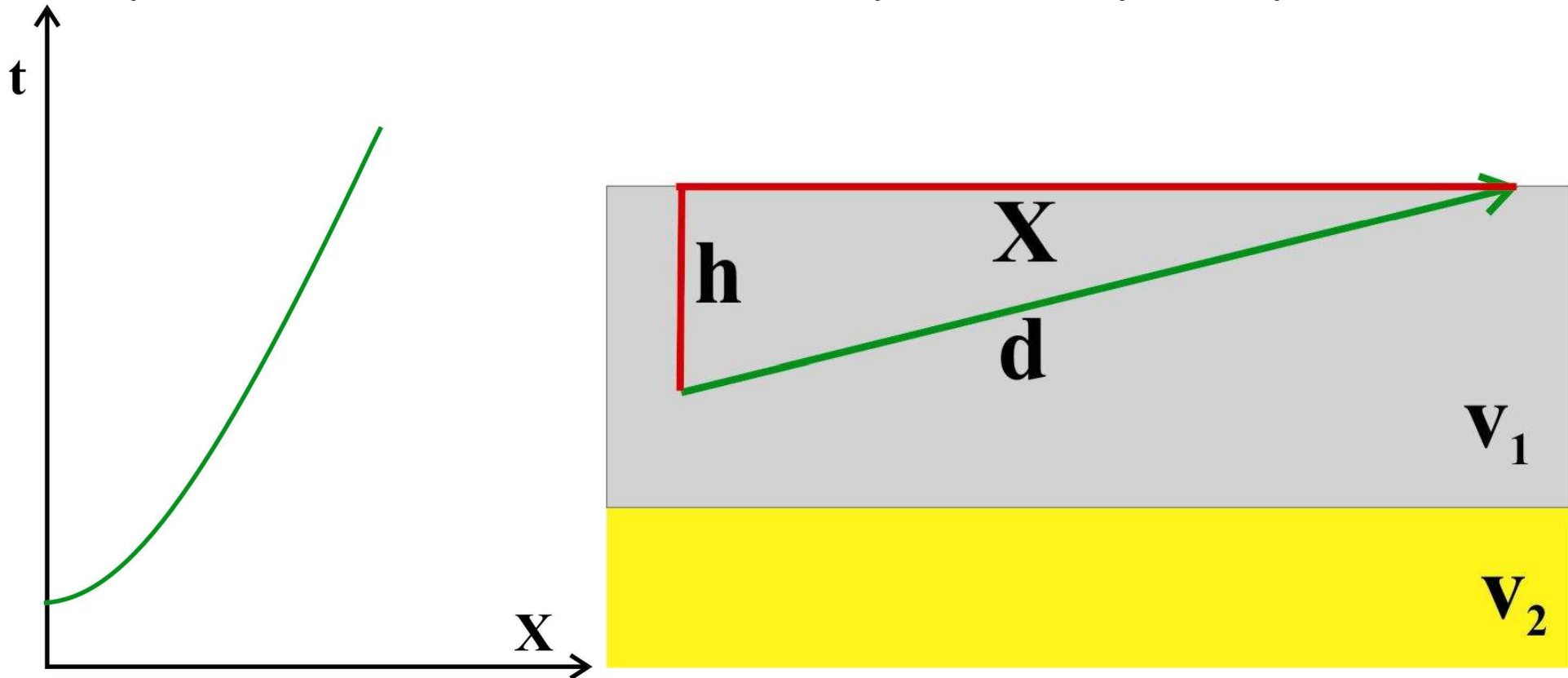
$$p = \frac{1}{v}$$



Pokud je ale hypocentrum v hloubce, změní se tvar vztahu:

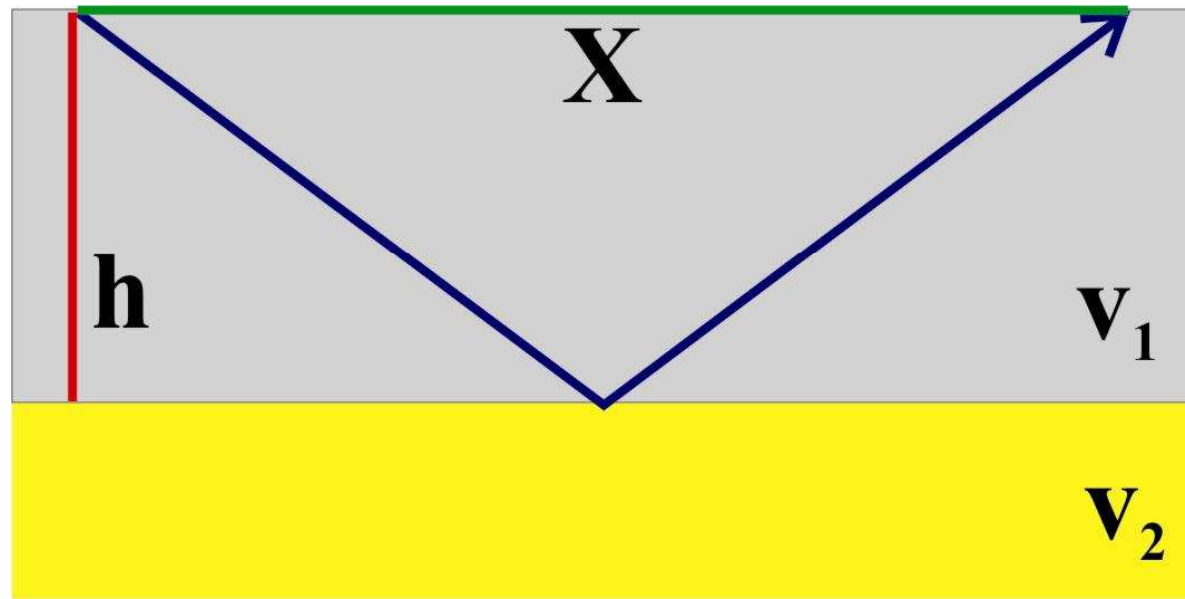
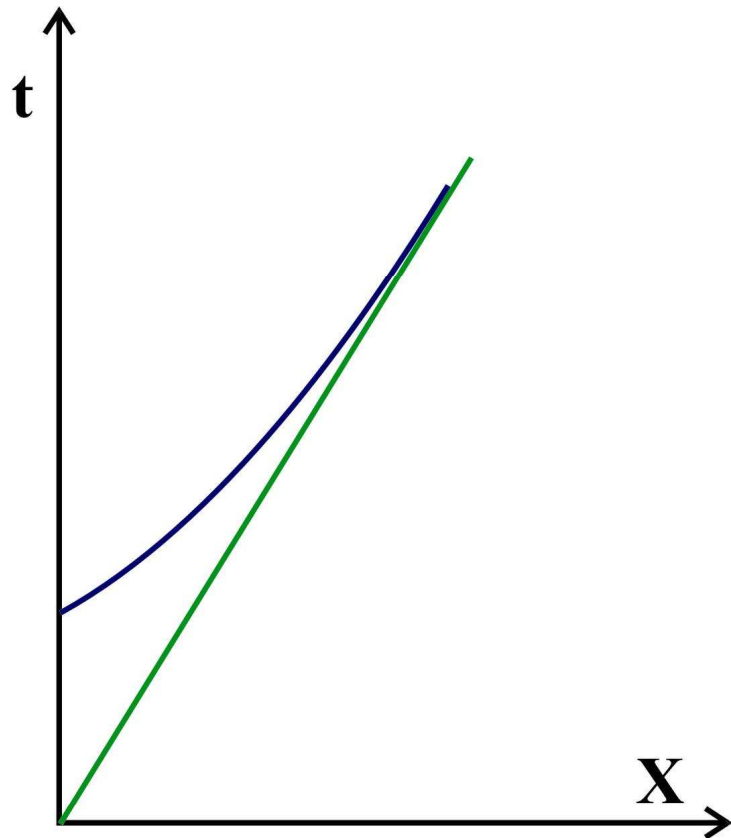
$$t = \frac{d}{v} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{X^2 + h^2}}{v}$$

Nyní už hodochrona nemá tvar přímky, ale tvar hyperboly.



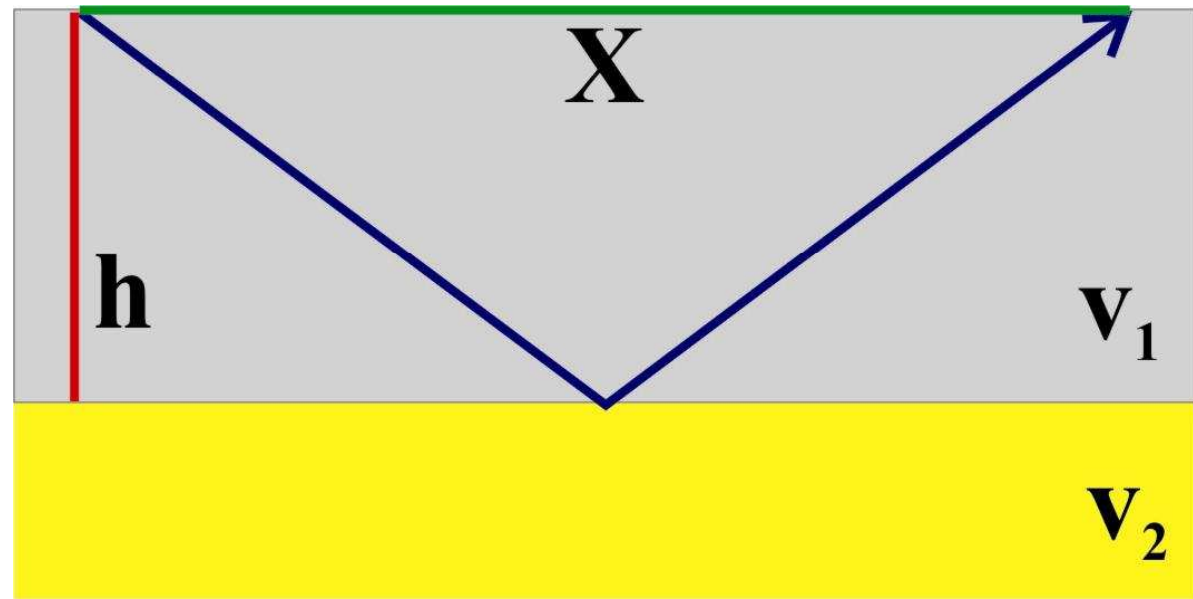
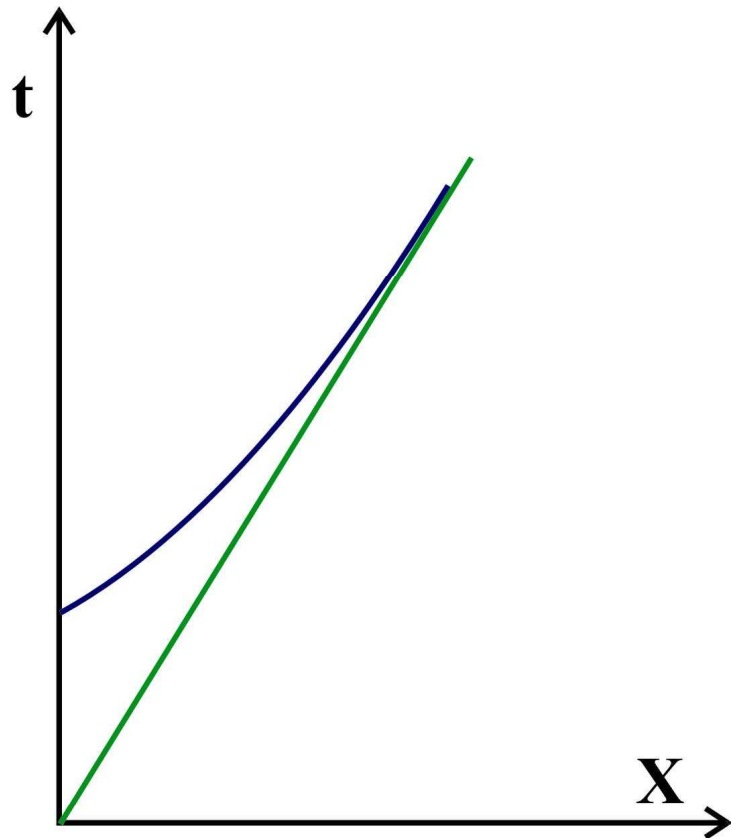
# odražená vlna

$$t = \frac{2h}{\cos(i)} \frac{1}{v_1}$$



Hodochrona má tvar hyperboly.

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1}$$



# lomená vlna

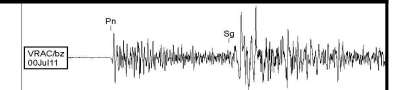
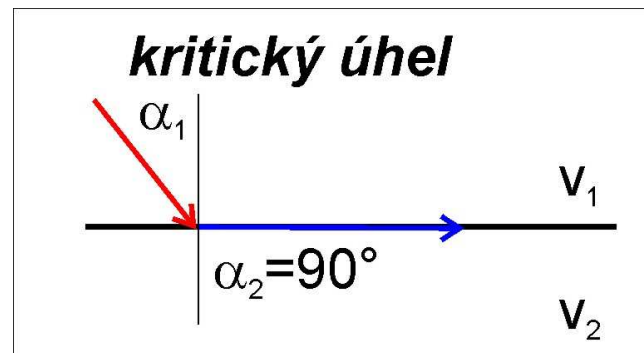
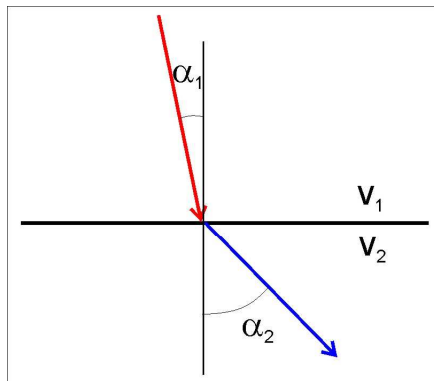
Vztahy pro lomenou vychází ze Snellova pravidla.



Willebrord van Roijen Snell  
(1580-1626)

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

$$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2}$$



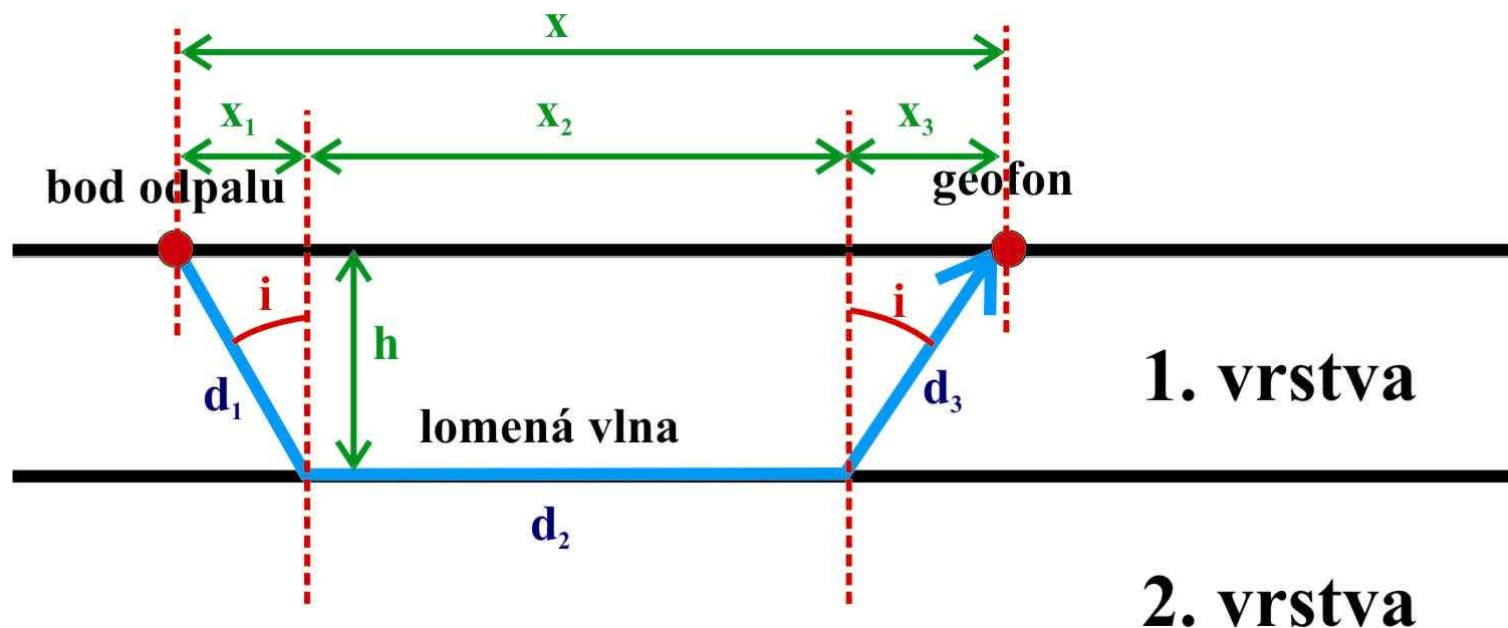
Dráhu paprsku ( $d$ ) i epicentrální vzdálenost ( $x$ ) si můžeme rozdělit na tři úseky:

$$d = d_1 + d_2 + d_3$$

$$d_1 = d_3$$

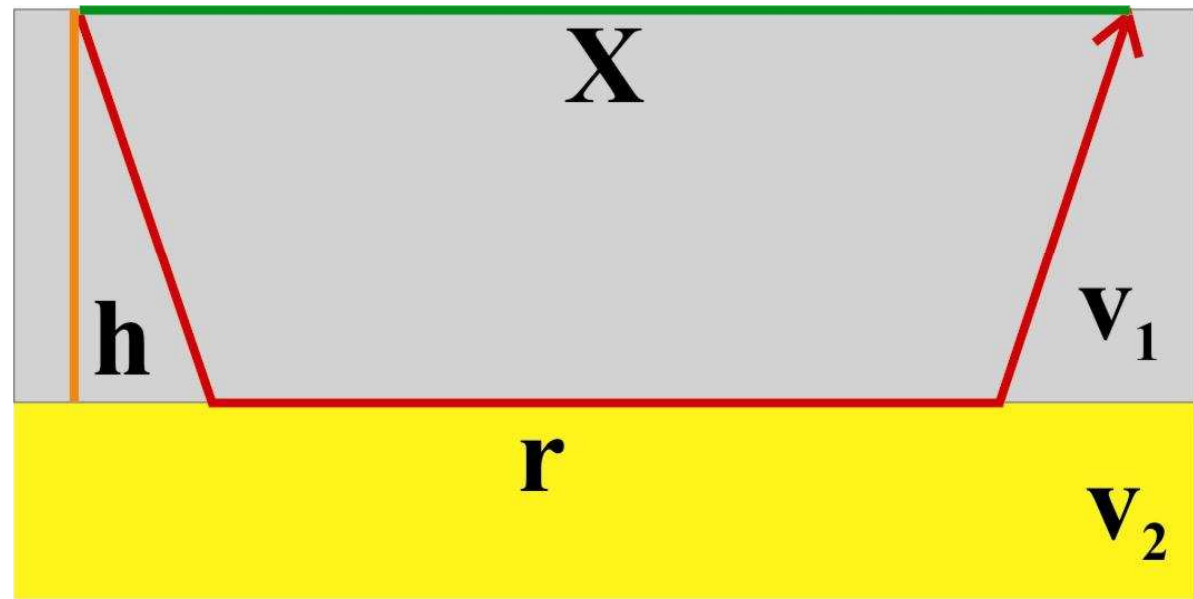
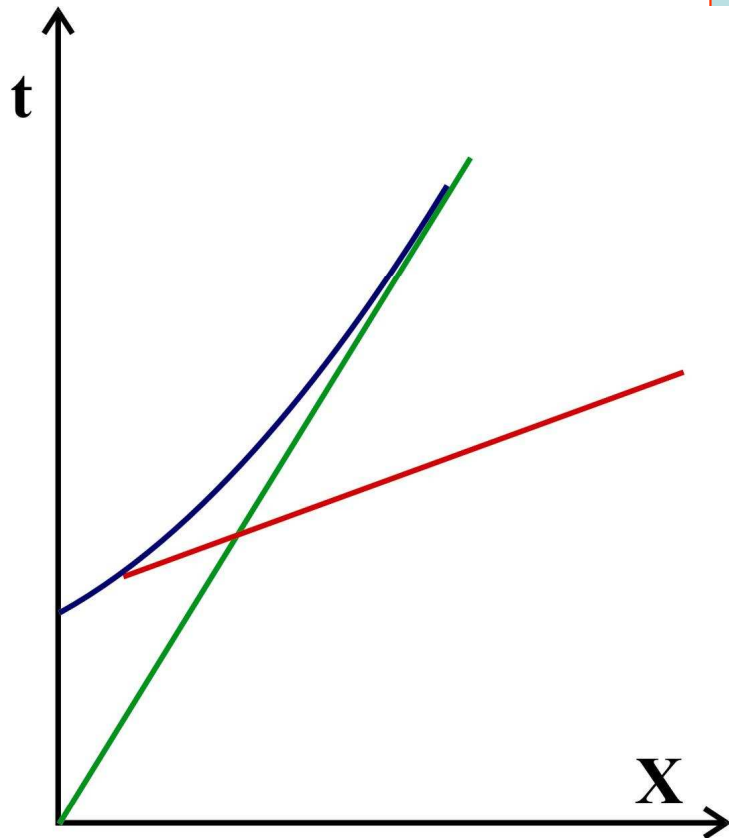
$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 = x_3$$



pro čas průchodu lomené vlny pak můžeme odvodit:

$$t = \frac{r}{v_2} + \frac{2h}{\cos(i)} \frac{1}{v_1}$$

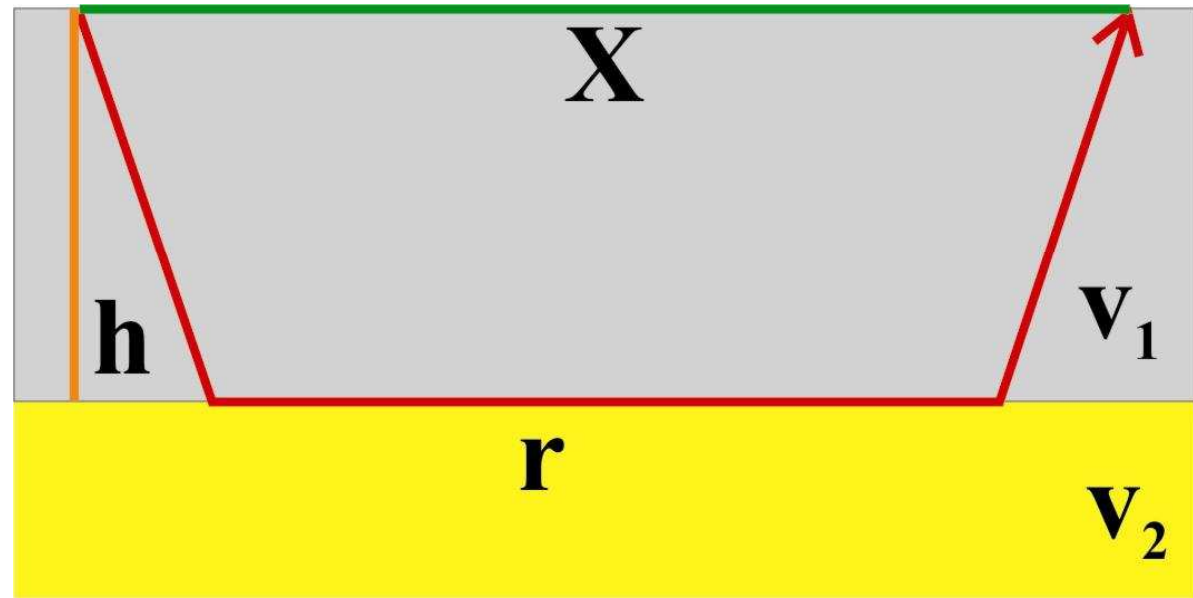
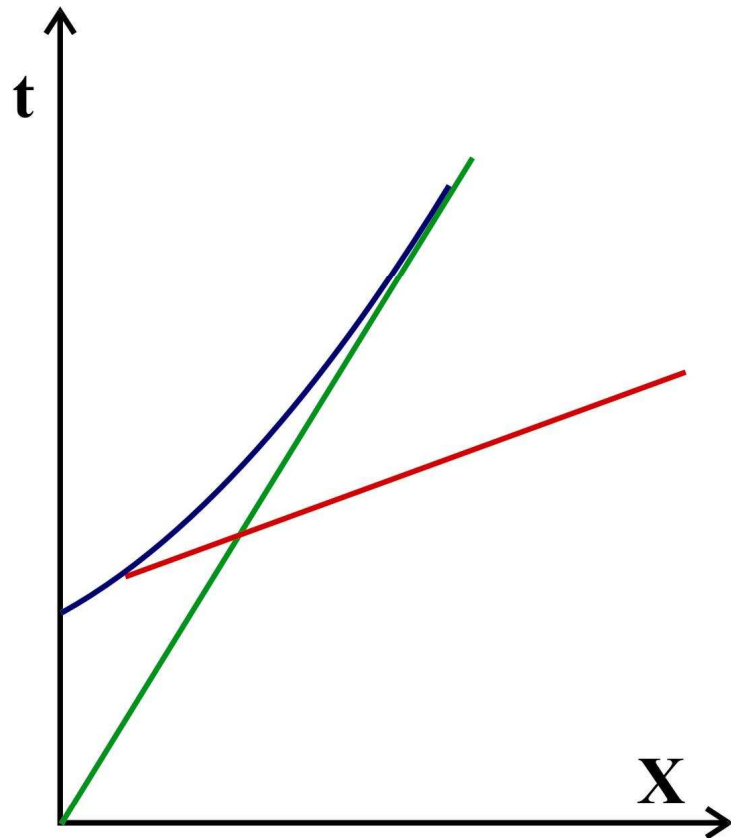


Zavedeme-li parametr  $\eta_1$ :

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 \cdot p^2}}{v_1}$$

Můžeme psát:

$$t = X \cdot p + 2h \cdot \eta_1$$

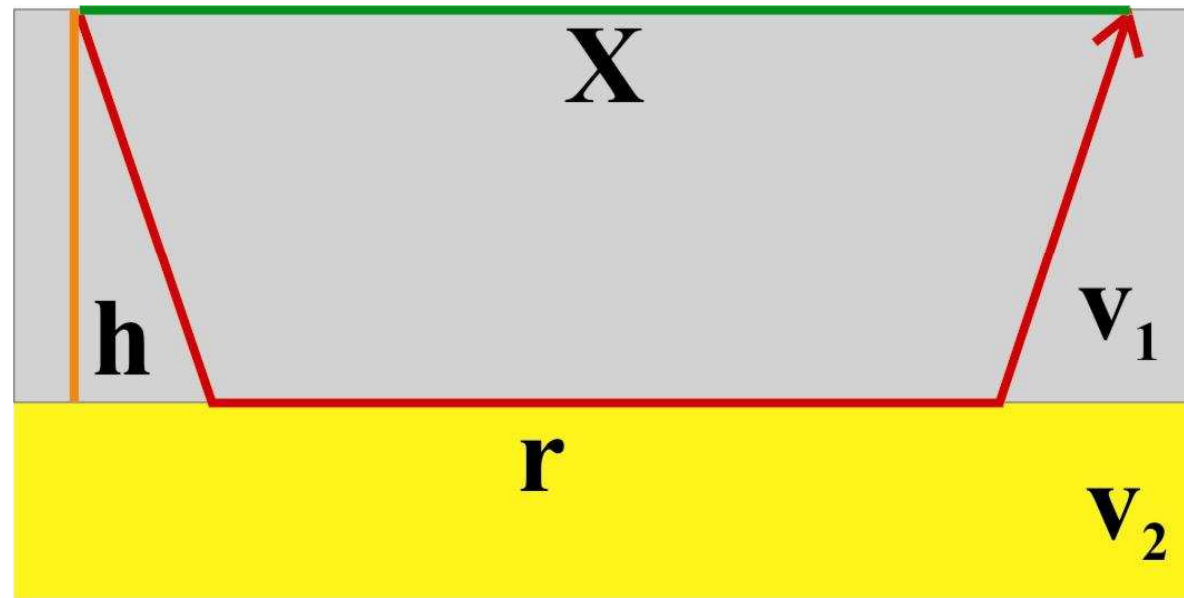
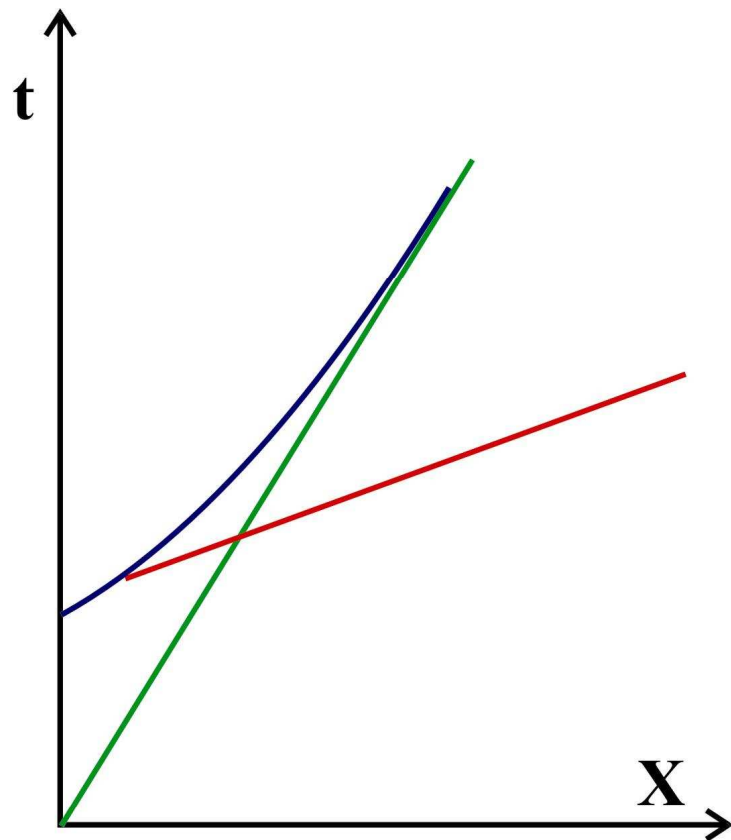




Hodochrona má tvar přímky!

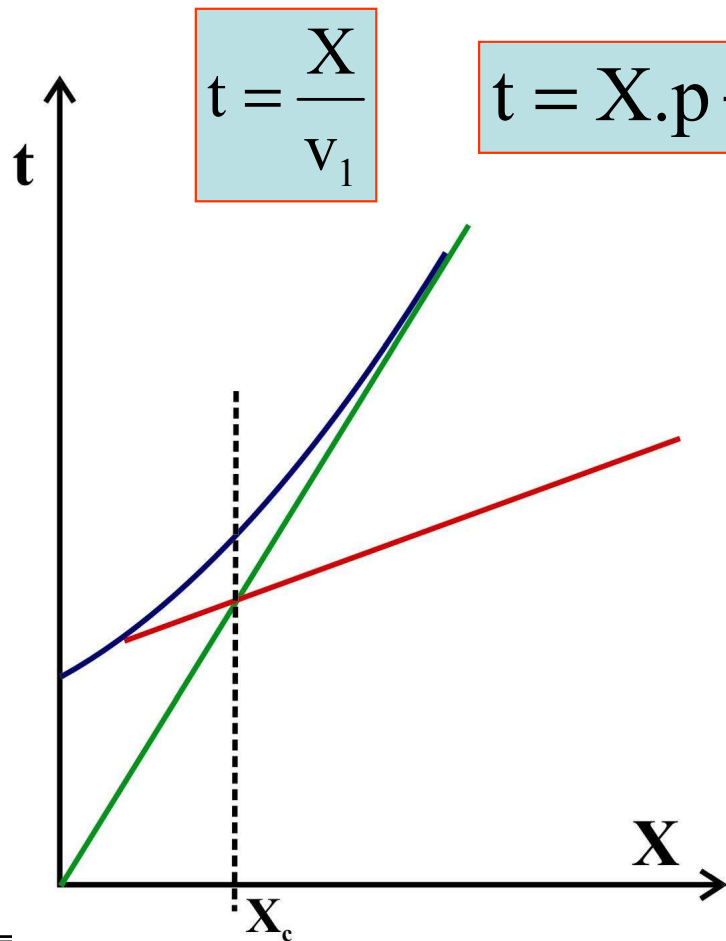
$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 \cdot p^2}}{v_1}$$

$$t = X \cdot p + 2h \cdot \eta_1$$



V malých epicentrálních vzdálenostech bude nejdříve detekována vlna přímá, ve větších epicentrálních vzdálenostech pak vlna lomená.

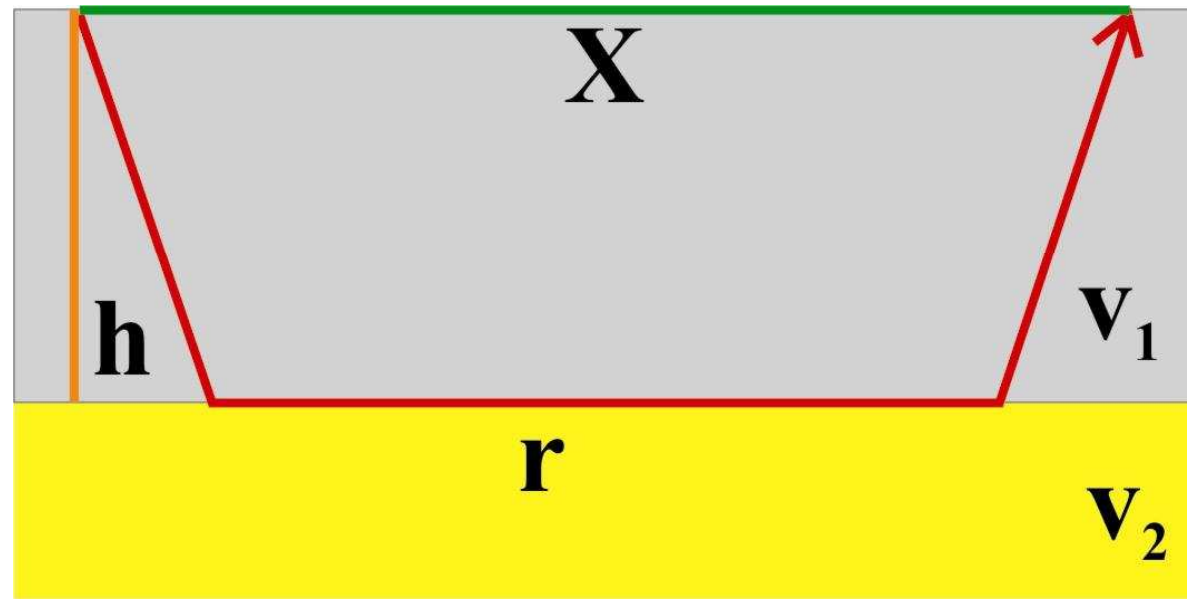
Nazvěme mezní vzdálenost  $X_c$ . V této vzdálenosti budou vlna přímá a lomená detekovány ve stejný čas.



$$t = \frac{X}{v_1}$$

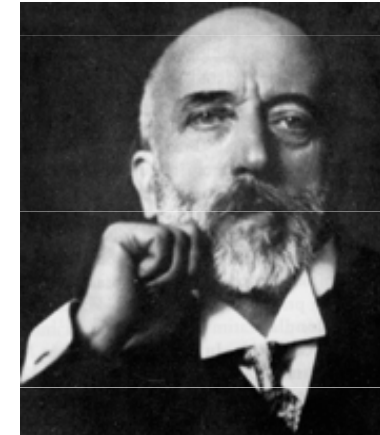
$$t = X.p + 2h.\eta_1$$

$$X_c = 2h \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}}$$

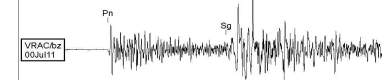
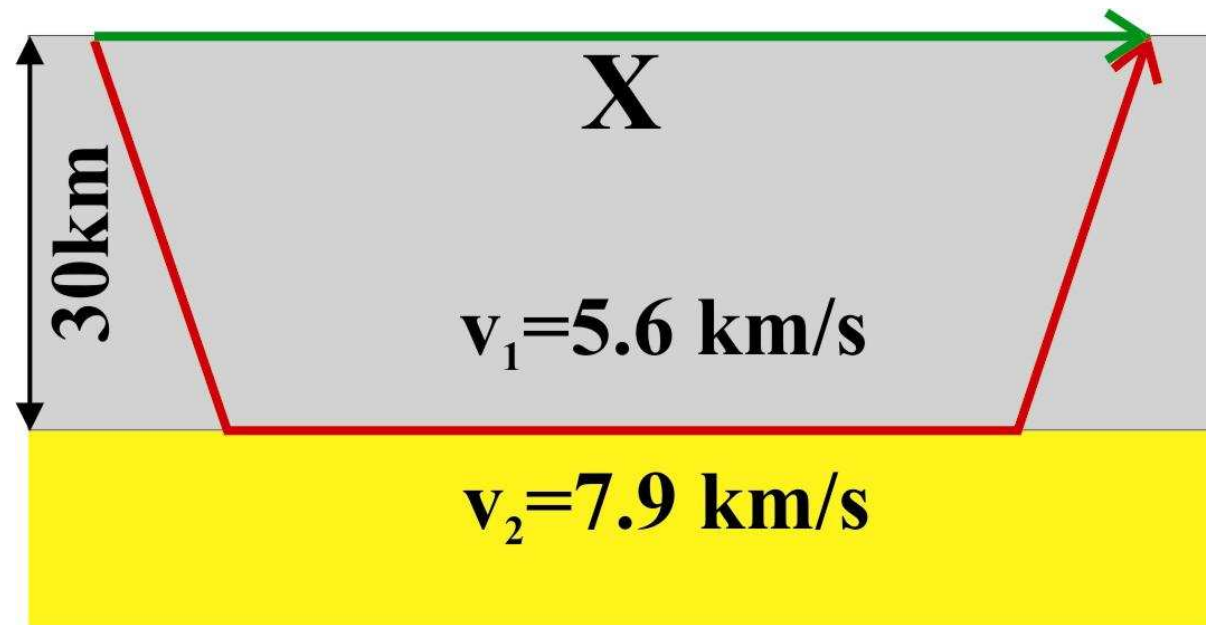
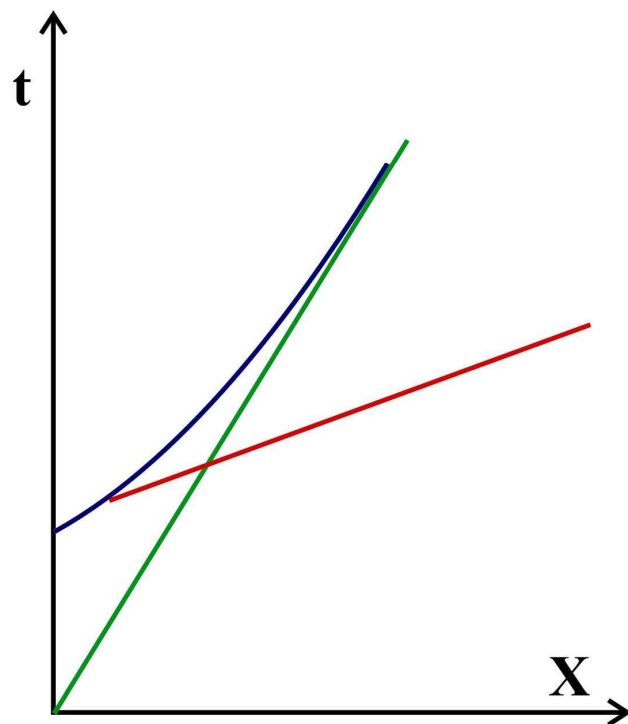


V roce 1906 byla zjištěna náhlá změna rychlosti na rozhraní kůry a pláště.

Přímou vlnu lomenou podél MOHO rozhraní nazýváme Pn. Přímou vlnu procházející pouze kůrou nazýváme Pg.



**Andrija Mohorovičić**  
(1857-1936)

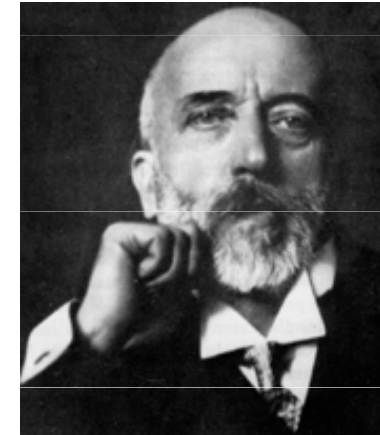


Byly zjištěny rychlosti přímé vlny Pg:

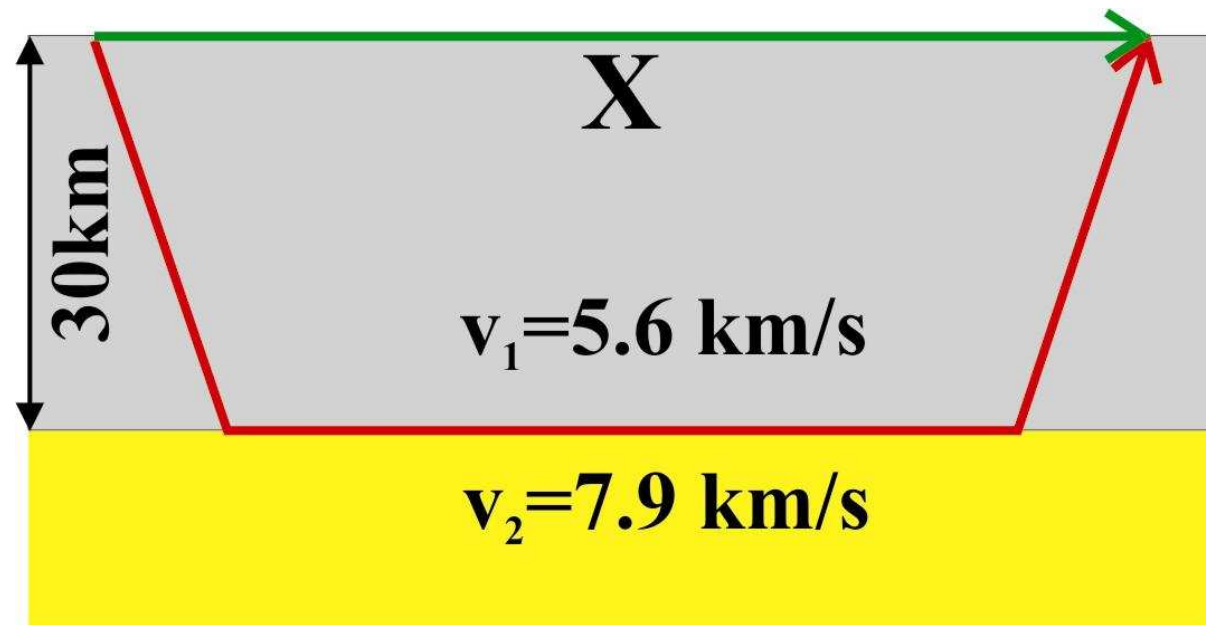
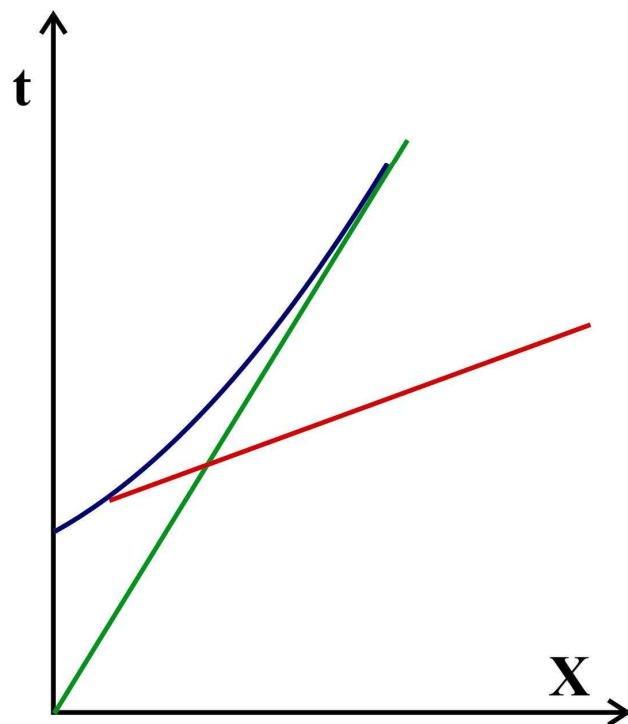
$$v_1 = 5.6 \text{ km/s}$$

a rychlosti lomené vlny Pn:

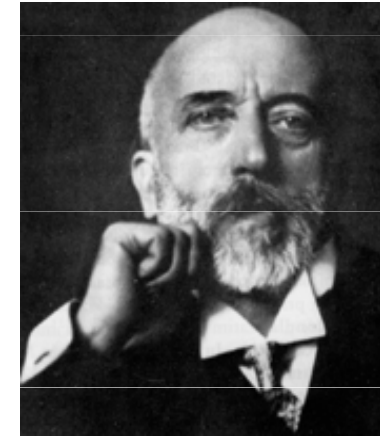
$$v_2 = 7.9 \text{ km/s}$$



Andrija Mohorovičić  
(1857-1936)

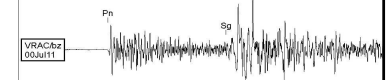
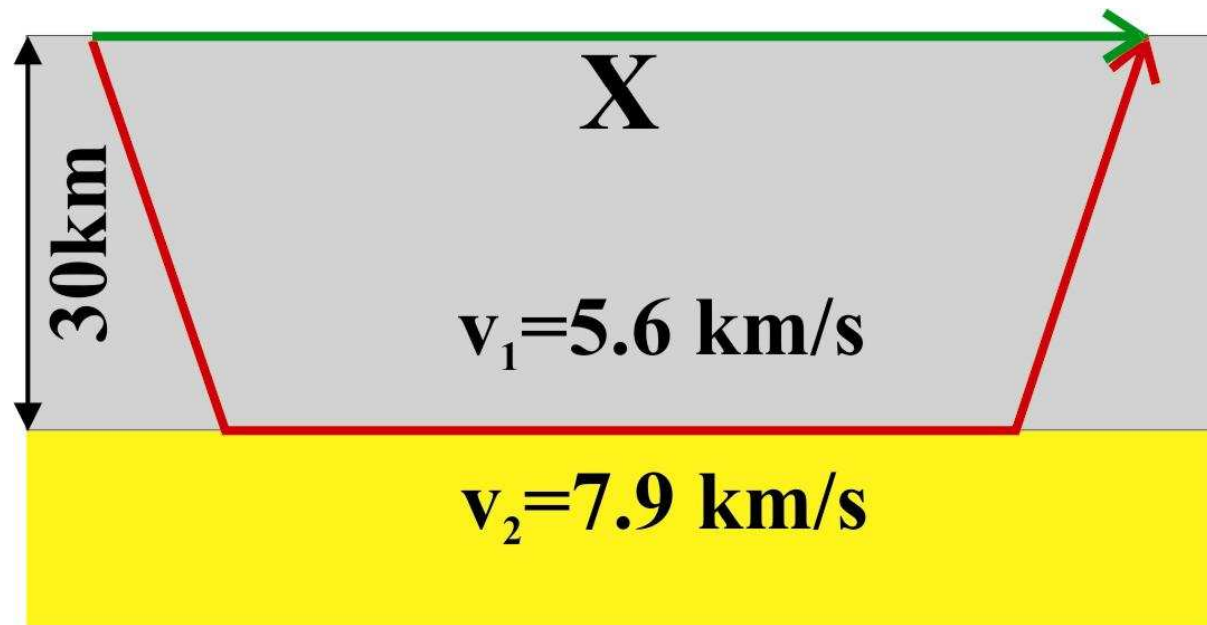
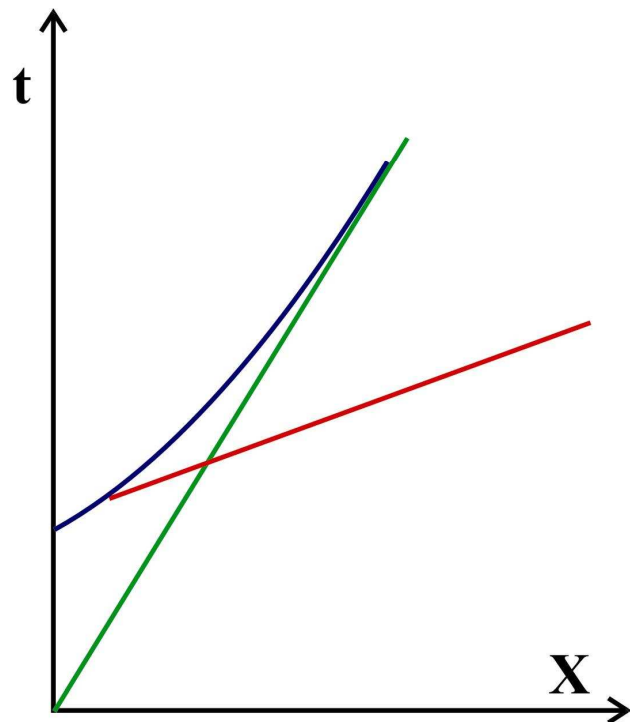


Tj. při mocnosti kůry cca 30km můžeme předpokládat, že mezní vzdálenost, za kterou bude jako první detekována lomená vlna Pn, dosahuje hodnoty:



**Andrija Mohorovičić**  
(1857-1936)

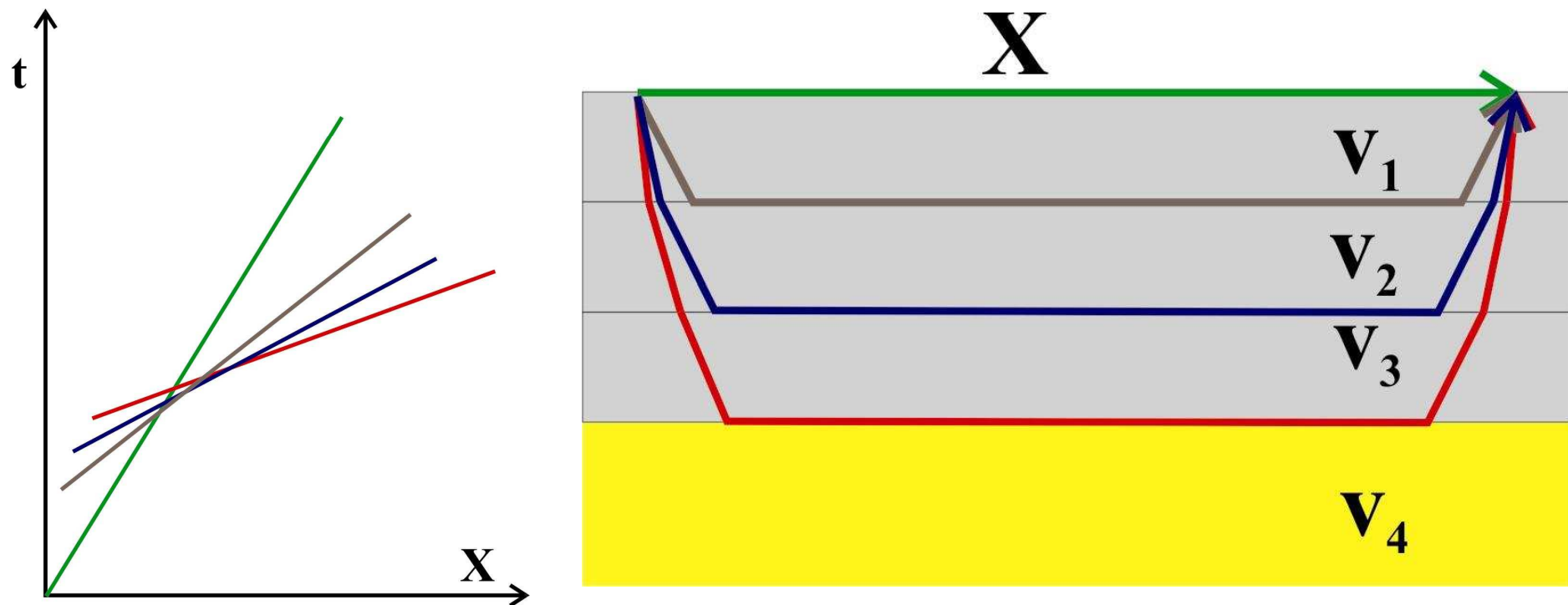
$$X_c = 2h \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}} = 60 \sqrt{\frac{7.9 + 5.6}{7.9 - 5.6}} \cong 145 \text{ km}$$



## Vrstevnaté modely mohou kůru rozdělit do více vrstev s odlišnými rychlostmi.

V nejmenších vzdálenostech bude nejdříve pozorována vlna přímá.

Ve větších vzdálenostech budou jako první detekovány vlna lomené podle jednotlivých rozhraní.

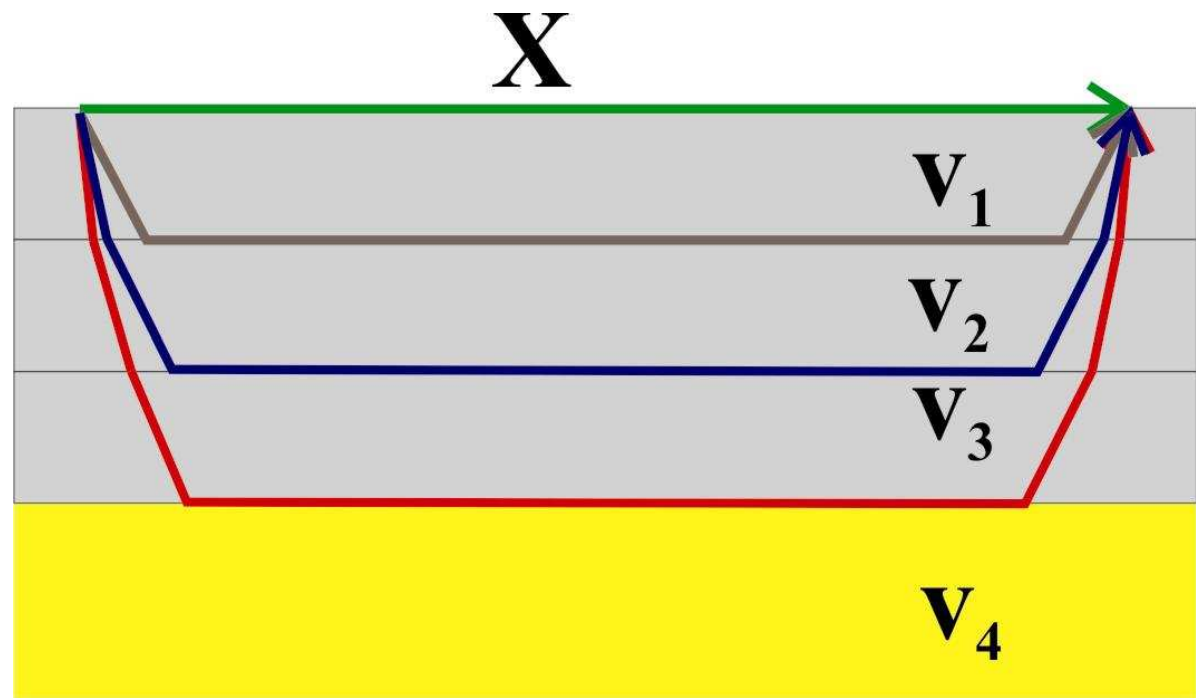
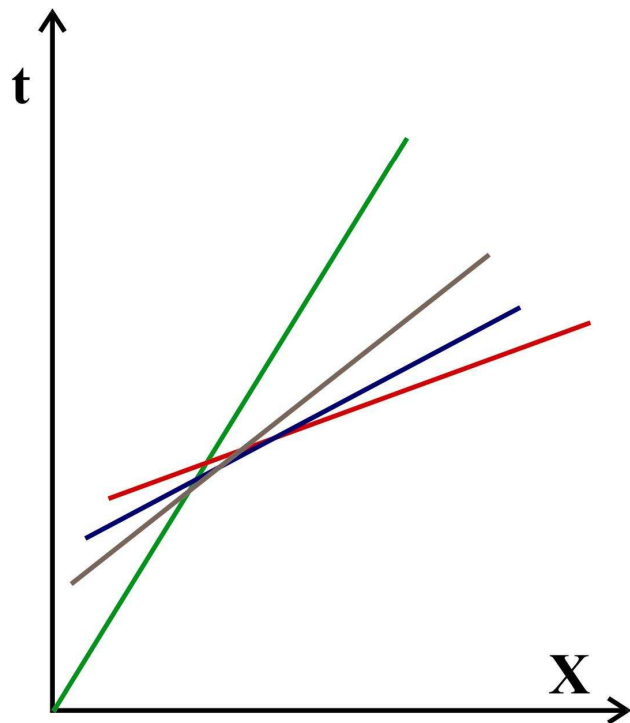


Přímá vlna.

$$t = p \cdot X$$

Zavedeme parametr  $p$ :

$$p = \frac{1}{v}$$

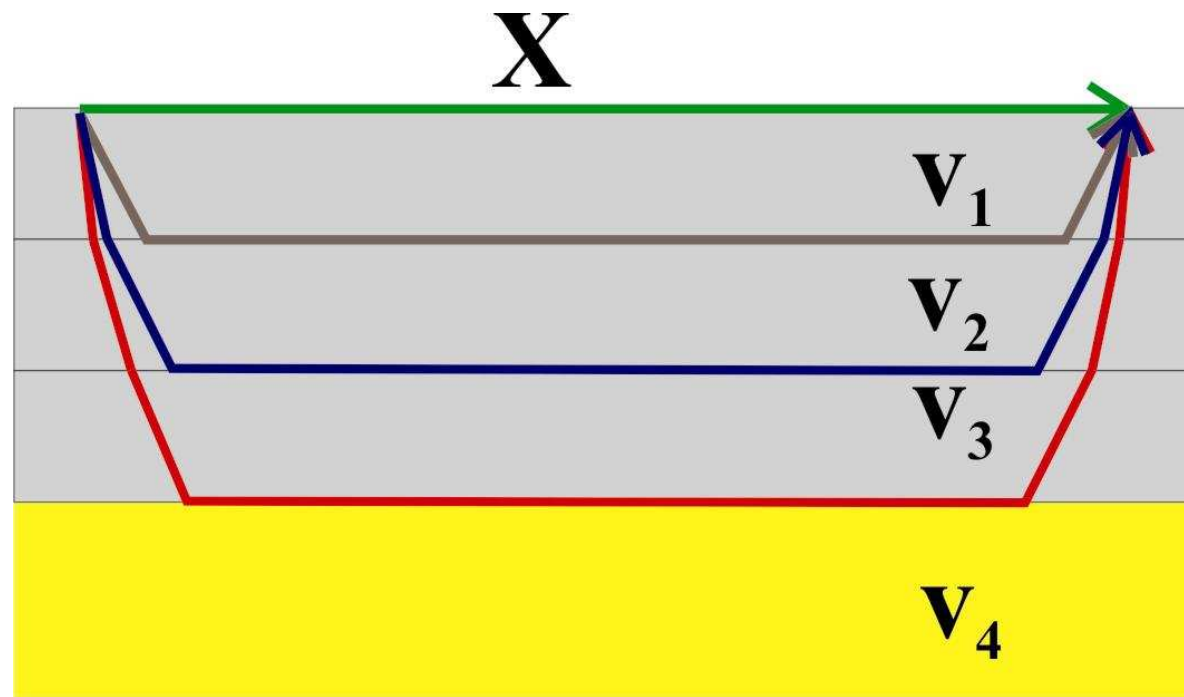
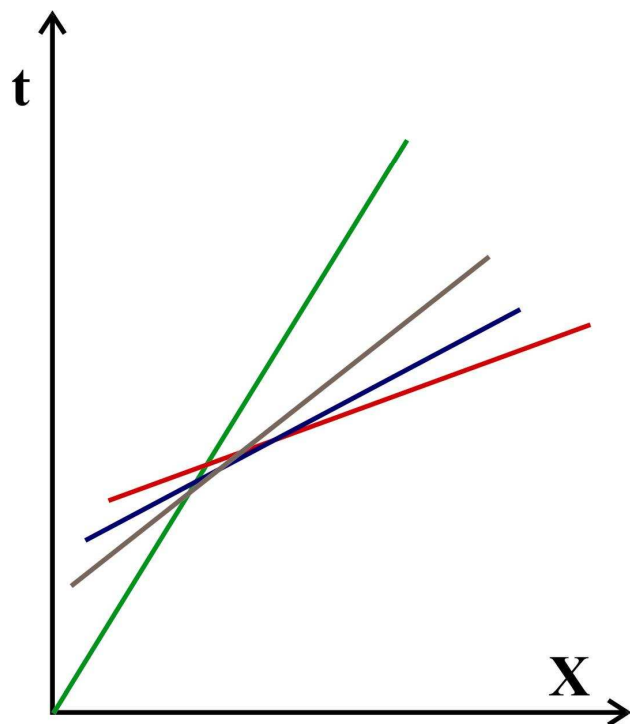


Vlna lomená podél prvního rozhraní.

Zavedeme parametr  $\eta_1$ .

$$t = X.p + 2h.\eta_1$$

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1 - v_1^2 \cdot p^2}}{v_1}$$



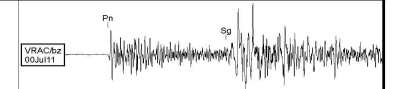
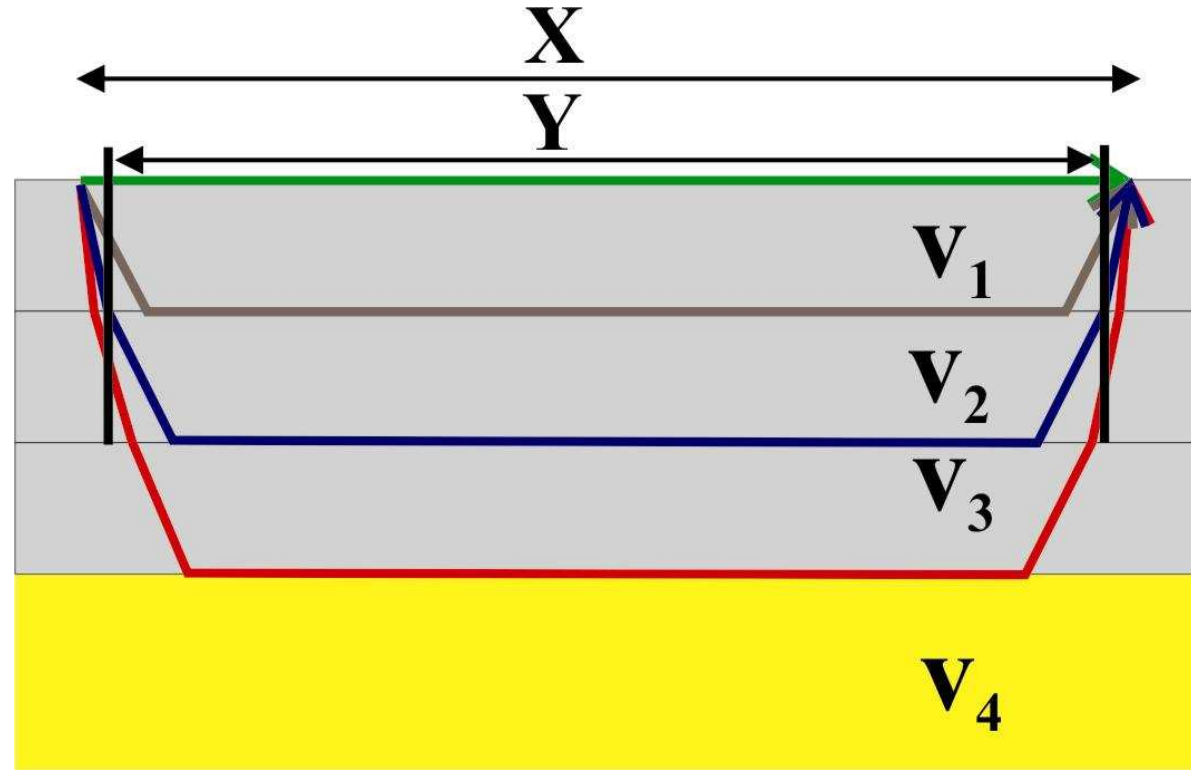


Vlna lomená podél n-tého rozhraní.

Lze ukázat, že vztah můžeme zobecnit:

$$\eta_i = \frac{\sqrt{1 - v_i^2 \cdot p^2}}{v_i}$$

$$t = X \cdot p + 2 \sum_{i=1}^n h_i \eta_i$$



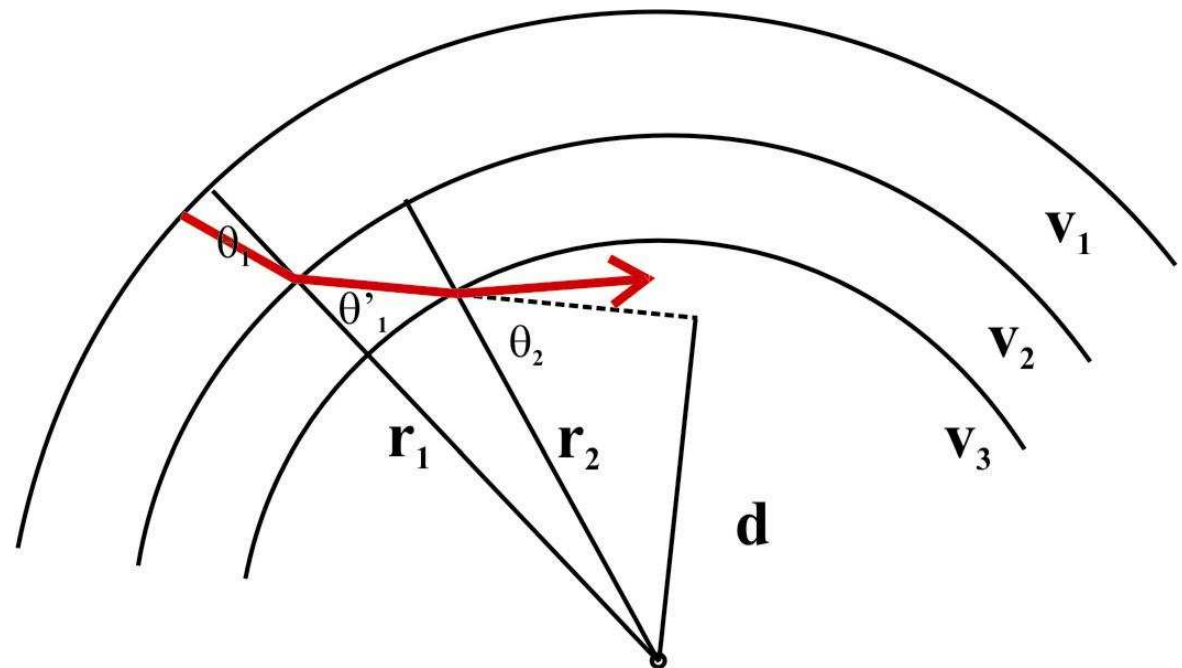
## c) Šíření signálu ve sférickém tělese Země

Ze Snellova zákona plyne:  $\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta'_1}{v_2}$

Ale v modelu zakřivené Země platí obecně nerovnost:  $\theta'_1 \neq \theta_2$

A proto:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} \neq \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$



V modelu zakřivené Země ale vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky se společnou stranou o délce  $d$ .

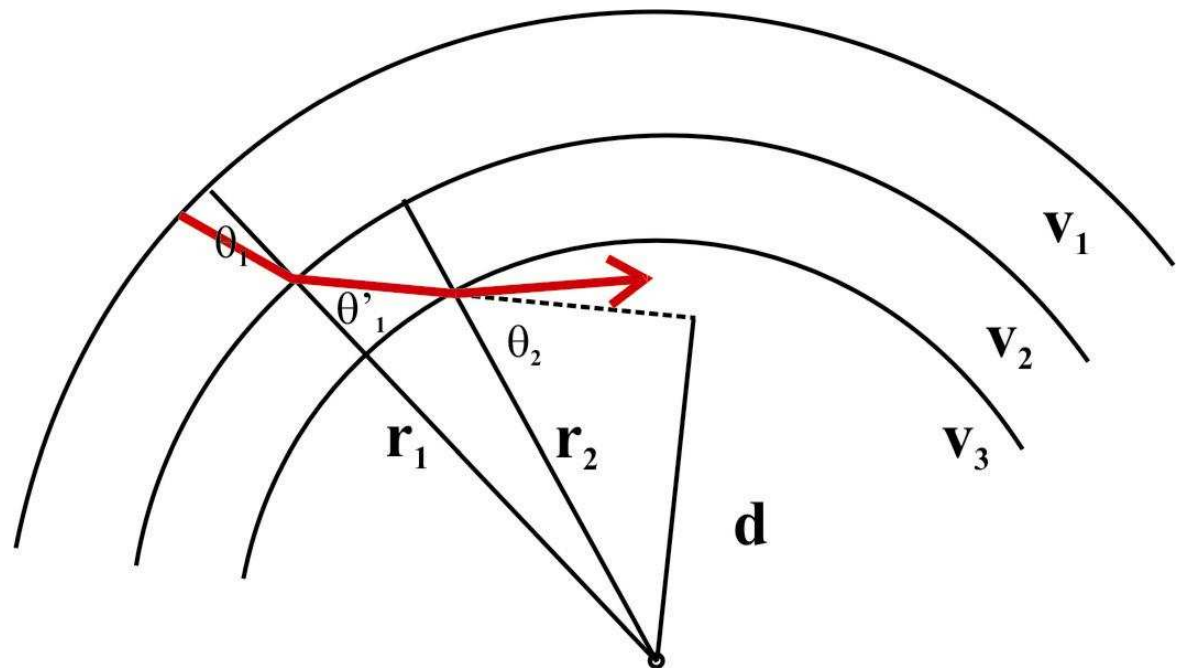
Z nich plyne:  $d = r_1 \cdot \sin\theta'_1$   
 $d = r_2 \cdot \sin\theta_2$

A tedy:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta'_1}{v_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{r_1 \cdot \sin\theta_1}{v_1} = \frac{r_1 \cdot \sin\theta'_1}{v_2} = \frac{r_2 \cdot \sin\theta_2}{v_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{r_1 \cdot \sin\theta_1}{v_1} = \frac{r_2 \cdot \sin\theta_2}{v_2}$$



Můžeme tak psát:

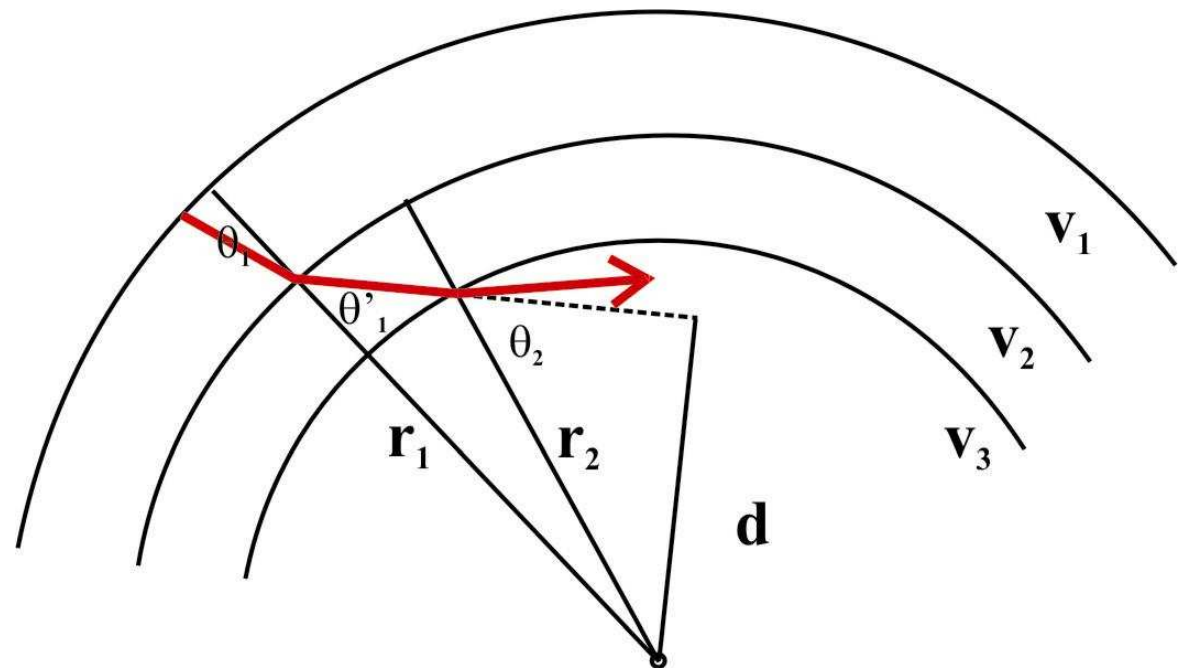
$$\frac{r_1 \cdot \sin \theta_1}{v_1} = \frac{r_2 \cdot \sin \theta_2}{v_2}$$

Tato rovnice je obecnou rovnicí definující paprskový parametr ve sférickém tělese Země:

$$p = \frac{r \cdot \sin(i)}{v}$$

Má význam inverzní zdánlivé rychlosti podél povrchu Země ("pomalosti")

$$p = \frac{dT}{d\Delta}$$

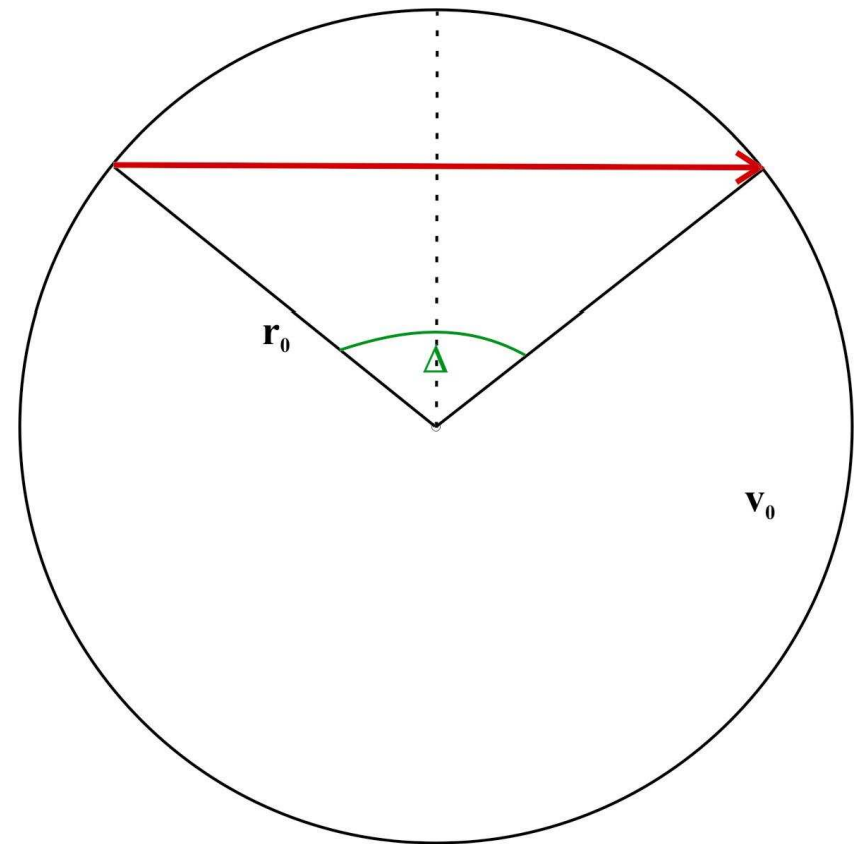


V homogenním sférickém tělese je dráha paprsku rovná úsečka o délce:

$$s = 2r_0 \cdot \sin \frac{\Delta}{2}$$

Čas šíření tedy je:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2r_0 \cdot \sin \left( \frac{\Delta}{2} \right)}{v}$$



Obecně:

$$T = \int_{\text{dráha}} \frac{ds}{v} = p\Delta + 2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{v}\right)^2 - p^2}}{r} dr$$

kde  $r_1$  je poloměr odpovídající největší dosažené hloubce na dráze paprsku.

