1 METRICKÉ PROSTORY

- Metrika, příklady různých metrik
- Otevřené, uzavřené množiny, uzávěr množiny, vnitřek množiny
- Limita posloupnosti bodů, limita funkce mezi metrickými prostory
- Spojitost funkce v bodě
- Spojitost funkce na celém prostoru
- Kompaktní množiny v metrických prostorech
- Úplný metrický prostor
- Banachova věta o kontrakci

Def: Nechť P je **NEPRÁZDNÁ** množina, ρ zobrazení $\rho: P \times P \to [0, \infty)$ takové, že $\forall x, y, z \in P$

(1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ axiom totožnosti,

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ axiom symetrie,

(3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \leq \rho(x,z)$ trojúhelníková nerovnost.

Pak dvojici (P, ρ) nazveme metrickým prostorem, ρ metrikou, prvky P body a číslo $\rho(x,y)$ vzdáleností bodů x, y.

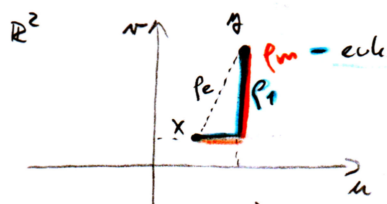
PŘÍKLADY METRIK

- na $P \neq \emptyset$: triviální (diskrétní) metrika $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

  $\to$ tzv. TRIVIÁLNÍ (DISKRÉTNÍ) MP

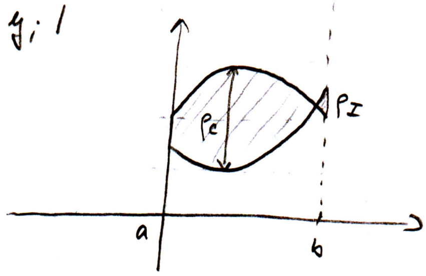
- na $\mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x - y|$ … přirozená metrika

- na $\mathbb{R}^n$:
  - součtová $\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
  - euklidovská $\rho_e(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2}$
  - maximální $\rho_\infty(x,y) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|$



$x = (x_1, \dots, x_n)$

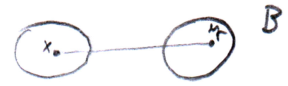
$y = (y_1, \dots, y_n)$



- na $C[a,b]$ - množině reálných spojitých fcí na $[a,b]$
  - stejnoměrné konvergence $\rho_c(f(x), g(x)) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$
  - integrální $\rho_I(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

Def: Nechť (P,ρ) je MP, $A \subseteq P$. Nechť σ je metrika na A definovaná vztahem $\rho(x,y) = \sigma(x,y)$ $\forall x,y \in A$. Pak řekneme, že (A,σ) je MP <u>vnořený</u> do (P,ρ) a metrika σ je <u>indukovaná</u> metrikou ρ.

Pojmy vztahující se k množině: (P,ρ), $A,B \subseteq P$



- **VZDÁLENOST MN.** A, B ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$) $\quad \rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\}$
  - vzdálenost bodu $a \in P$ od B $\quad \rho(a,B) = \rho(\{a\},B)$
- **PRŮMĚR MN.** $A \neq \emptyset$ $\quad d(A) := \sup \underbrace{\{\rho(x,y) : x \in A \wedge y \in A\}}_{Q}$ je-li Q ohraničená

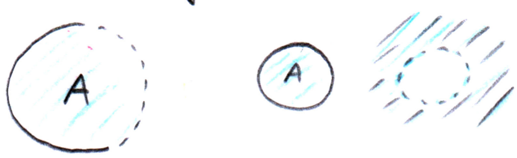
diam

Jestliže Q není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$.

Pro $A = \emptyset$ definujeme $d(A) = 0$.

- **OHRANIČENÁ MN.** Řekneme, že A je ohraničená, jestliže $d(A) < \infty$
- **UZÁVĚR MNOŽINY** $A \subseteq P$: $\quad \bar{A} := \{x \in P \mid \rho(x,A) = 0\}$

Def: Řekneme, že $A \subseteq P$ je <u>UZAVŘENÁ</u>, jestliže $A = \bar{A}$. Řekneme, že A je <u>otevřená</u>, jestliže $P \setminus A$ je uzavřená.



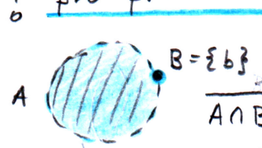
Def: $\bar{A} = P$ ... <u>HUSTÁ</u> v P

Věta: A hustá $\Leftrightarrow$ $\forall x \in P$ $\exists y \in A$: $\rho(x,y) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Platí: $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{P} = P$ $\rightarrow$ $\emptyset$ a P jsou zároveň uzavřené i otevřené

$A \subseteq \bar{A}$, $\quad A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$, $\quad \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$ $\quad$! <u>pro průnik neplatí</u> !

$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$



$\overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{b\}$

Platí: • Průnik i sjednocení **KONEČNÉHO** počtu uzavřených/otevřených množin je uzavřená/otevřená množina.

NAVÍC:

- **PRŮNIK** <u>libovolného počtu</u> <u>UZAVŘENÝCH</u> mn. je UZ. MN.
- **SJEDNOCENÍ** <u>libovolného počtu</u> <u>OTEVŘENÝCH</u> mn. je OT. MN.

UZAVŘENÉ	**OTEVŘENÉ**
$\cap$ ✓ $\quad \cup$ ✗	$\cap$ ✗ $\quad \cup$ ✓

OTEVŘENÉ

$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ UZAVŘENÁ

$B_n = \left(\quad , \frac{1}{n}+1\right)$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = (0,1\rangle$ ani otevřená ani uzavřená

UZ

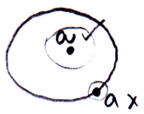
$C_n = \left[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$, $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = (-1,1)$ OT

Pojmy vztahující se k okolí bodu $a \in A$, $A \subseteq P$, (P, ρ)

$O_\varepsilon(a) = \{ x \in P \mid \rho(x,a) < \varepsilon \}$

Bod $a \in P$ nazveme:

- **VNITŘNÍM BODEM A** jestliže



$\exists O(a) : O(a) \subset A$

... mn. všech vnitřních bodů nazveme VNITŘEK A : $\mathring{A}$

- **HRANIČNÍM BODEM A** jestliže

$\forall O(a) : O(a) \cap A \neq \emptyset \wedge O(a) \cap P \setminus A \neq \emptyset$

... mno. všech hr. bodů nazveme HRANICÍ A : $h(A)$

- **HROMADNÝM BODEM A** jestliže

$\forall O(a) : O(a) \cap A$ je nekonečná

... DERIVACE A : A'

- **IZOLOVANÝM BODEM A** jestliže

$\exists O(a) : O(a) \cap A = \{a\}$

... ADHERENCE A ;

Uzávěr, vnitřek a hranice množiny hrají důležitou roli např. při zavedení Jordanovy míry v $\mathbb{E}^n$.

Platí:
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- $h(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$
- $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

KONVERGENCE

Def: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost ($F : \mathbb{N} \to P$) prvků P. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k $x_0 \in P$ a píšeme $x_n \to x_0$, jestliže $\rho(x_n, x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$

tj. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Bod x_0 pak také nazýváme limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řekneme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská, jestliže $\rho(x_m, x_n) \to 0$ pro $\min\{m,n\} \to \infty$,

tj. $\forall \varepsilon \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_0 \; \forall n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Věta: • Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu
• Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská
• Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu x_0, pak každá podposloupnost vybraná z této posloupnosti má také limitu x_0.

Def: Nechť ρ_1, ρ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že ρ_1, ρ_2 jsou ekvivalentní, jestliže

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \quad x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \iff x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0 .$$

- $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ jsou ekvivalentní
- ρ_I, ρ_e nejsou ekvivalentní

• E^1 je ÚPLNÝ
• diskrétní MP je ÚPLNÝ
• $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou E_1 není úplný, neboť $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ je cauchyovská, ale $\lim x_n = e \notin \mathbb{Q}$

Def: (P,ρ) v němž je každá cauchyovská posloupnost konvergentní nazveme ÚPLNÝ.

Def: (P,ρ) se nazývá KOMPAKTNÍ, jestliže je v něm možné z každé posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá kompaktní, jestliže A s metrikou indukovanou ρ je kompaktní MP.

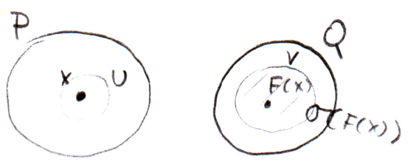
Věta: A je kompaktní $\Rightarrow$ A je uzavřená a ohraničená.
v $\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ platí dokonce ekvivalence

ZOBRAZENÍ MEZI METRICKÝMI PROSTORY

- SPOJITÉ, IZOMETRICKÉ, KONTRAKCE

Def: $(P,\rho), (Q,\sigma)$ MP. Řekneme, že $F: P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$

$$\underbrace{\forall \sigma(F(x_0))}_{V} \quad \underbrace{\exists \sigma(x_0)}_{U} : \quad \forall x \in \overset{U}{\sigma(x_0)} \text{ platí } \underset{V}{F(x) \in \sigma(F(x_0))}$$



Řekneme, že F je spojité, jestliže je spojité v každém bodě svého def. oboru

Věta: $F: P \to Q$ je spojité $\iff$ $\forall \{x_n\} : x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \Rightarrow F(x_n) \xrightarrow{\sigma} F(x_0)$.

Def: $F: P \to Q$ nazveme lipschitzovské, jestliže $\exists L \geq 0$ tak, že

$$\sigma(F(x), F(y)) \leq L \cdot \rho(x,y) \quad \forall x, y \in P.$$

Je-li navíc $L < 1$ … KONTRAKCE.

Věta: Každé lipschitzovské zobrazení je spojité

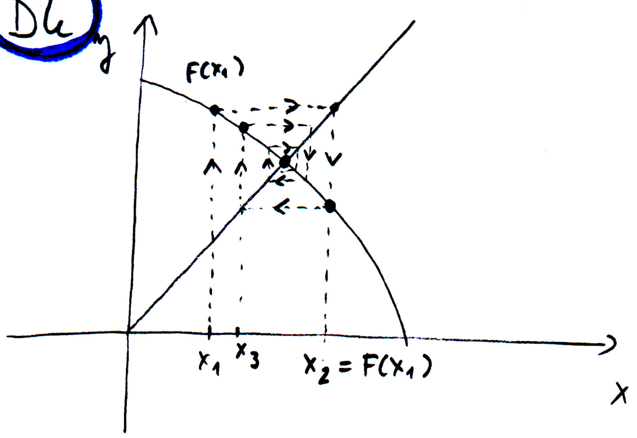
Věta: Spojité zobrazení zobrazuje kompaktní množiny opět na kompaktní množiny

BANACHŮV PRINCIP

Def: (P,ρ) je MP. $F: P \to P$. Bod $x \in P$ nazveme pevným bodem F, jestliže
$$F(x) = x.$$

Věta (Banachův princip)
Nechť (P,ρ) je ÚPLNÝ metrický prostor a $F: P \to P$ je kontrakce, tj. existuje $L \in [0,1)$: $\rho(F(x), F(y)) \le L\,\rho(x,y)$ $\forall x,y \in P$.
Pak EXISTUJE PRÁVĚ JEDEN pevný bod zobrazení F, tj. $\exists!\, x_0$: $F(x_0) = x_0$.

Dk



1. Konstrukce posloupnosti $x_1, x_2, \dots$.
2. Ukážeme, že $\{x_n\}$ je Cauchyovská
$(\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(F(x_{n-1}), F(x_n)) \le L\cdot\rho(x_{n-1}, x_n) \dots \le L^{n-1}\rho(x_1, x_2))$ (*)
$\Rightarrow x_n \to x_0 \in P$ protože P je úplný.
3. Sporem ukážeme, že x_0 je pevným bodem F.
4. Ukážeme, že x_0 je jediným pevným bodem.

(*) Pak se využije trojúhelníkové nerovnosti a ukáže se, že
$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{L^n}{1-L}\,\rho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

izometrické: $F: P \to Q$: $\forall x,y \in P$: $\rho(x,y) = \sigma(F(x), F(y))$
$(P,\rho) \to (Q,\sigma)$

Poznámka :

Podmínky Banachova principu jsou pouze dostatečnými podmínkami pro existenci pevného bodu zobrazení metrického prostoru do sebe.

Jinými slovy toto zobrazení může mít pevný bod i v případě, že není splněn některý z předpokladů Banachovy věty

Literatura : METRICKÉ PROSTORY, Zuzana Došlá, Ondřej Došlý

2006, 3. vydání, MU