Príklady na precvičovanie – limity a spojitosť funkcií viac premenných

Nasledujúce riešené príklady ilustrujú najčastejšie používané techniky výpočtu limít funkcií viac premenných. Najdôležitejšie z nich sú tieto:

- dosadenie
- úprava
- substitúcia (častokrát vedie na výpočet limity funkcie jednej premennej)
- zavedenie polárnych (sférických) súradníc (prípad vlastného bodu, prípad nevlastného bodu)

Riešené príklady

Príklad 1 (dosadenie)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,3,1)}(2x^2+7y-3z+5).$$

Riešenie:
Za x, y, z jednoducho dosadíme príslušný limitný bod:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,3,1)}(2x^2+7y-3z+5) = 2+21-3+5 = 25.$$

Príklad 2 (substitúcia, úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}.$$

Riešenie:
Vidíme, že zavedením substitúcie $t = xy$ prevedieme danú limitu na limitu z funkcie jednej premennej t, pričom ak $x \to 0$ a $y \to 0$, potom $t = xy \to 0 \cdot 0 = 0$. Preto po zavedení tejto substitúcie máme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} = \lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t}.$$

Nakoľko nastáva neurčitosť typu 0/0, vykonáme úpravu – rozšírime výrazom $2+\sqrt{4-t}$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-t})(2+\sqrt{4-t})}{t\,(2+\sqrt{4-t})}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t\,(2+\sqrt{4-t})}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-t}}=\frac{1}{4}.$$

Teda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}=\frac{1}{4}.$$

Príklad 3 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}.$$

Riešenie:
Opäť nastáva neurčitosť typu 0/0. Vykonáme vhodnú úpravu – čitateľ i menovateľ rozložíme na súčin:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}=\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+3)}=\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x+y}{x+3}=\frac{4}{5}.$$

Príklad 4 (substitúcia)

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin(xy)}{x},\quad a\in\mathbb{R}.$$

Riešenie:
Máme neurčitosť 0/0. Namiesto premenných x, y budeme uvažovať premenné t, y, kde $t = xy$. Potom, nakoľko $x \to 0$ a $y \to a$, $t = xy \to 0\cdot a = 0$. Pôvodnú limitu z funkcie dvoch premenných sme teda transformovali zavedením novej premennej t opäť na limitu z funkcie dvoch premenných, ktorú však vieme ľahšie vypočítať:

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(t,y)\to(0,a)}\frac{\sin t}{t}\cdot y=1\cdot a=a.$$

Príklad 5 (substitúcia)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{(x-4)^2-y^2}\right)}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}.$$

Riešenie:
Úvaha podobná ako v predchádzajúcom príklade. Neurčitosť je typu 0/0. Namiesto y zavedieme novú premennú $t = \sqrt{(x-4)^2-y^2}$, pričom limitná podmienka bude $t \to 0$. Dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{(x-4)^2-y^2}\right)}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = \lim_{(x,t)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg} t}{x^2 t} = \lim_{(x,t)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Príklad 6 (polárne súradnice, úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}.$$

Riešenie:
Neurčitosť 0/0. Zavedieme polárne súradnice:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Dostaneme:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

Výraz obsahujúci ρ upravíme takto:

$$1-\cos\rho^2 = 2\sin^2\frac{\rho^2}{2}.$$

Teda:

$$\frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4} = \frac{2\sin^2\frac{\rho^2}{2}}{\rho^4} = \frac{\sin^2\frac{\rho^2}{2}}{\left(\frac{\rho^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin\frac{\rho^2}{2}}{\frac{\rho^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}.$$

Po dosadení preto máme:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4 \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0^+} \left(\frac{\sin\frac{\rho^2}{2}}{\frac{\rho^2}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

nakoľko výraz v zátvorke konverguje k 1. Limita závisí na uhle φ, a preto neexistuje.

Príklad 7 (sférické súradnice)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z}.$$

Riešenie:
Máme neurčitosť typu 0/0. Zavedením sférických súradníc ukážeme, že táto limita neexistuje. Ak bod A má karteziánske súradnice x, y, z, potom jeho sférické súradnice r, φ, θ sú definované takto:

r – dĺžka úsečky spájajúca bod X so začiatkom O, $r \geq 0$,

φ – uhol (orientovaný), ktorý zviera priemet úsečky OX do roviny xy s kladným smerom osi x, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

θ – uhol (orientovaný), ktorý zviera úsečka OX s kladným smerom osi z, $\theta \in [0, \pi]$.

Platí (sférické súradnice v okolí bodu $(0,0,0)$; viac o tom v skriptách alebo v zbierke Hasil–Zemánek):

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

V našom prípade limitná podmienka bude $r \to 0^+$, takže:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\varphi\sin\theta}{r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\sin\theta + r\cos\theta} =$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta}.$$

Výsledná limita závisí na uhloch φ, θ, takže neexistuje.

Príklad 8 (úprava, polárne súradnice, veta o dvoch policajtoch)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

Riešenie 1:

Ide o neurčitosť typu 0/0. Výraz za limitou zapíšeme takto (využijeme spojitosť exponenciálnej funkcie):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)}.$$

Zavedieme polárne súradnice v okolí bodu $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to0^+} \rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\ln\rho^2 =$$

$$= \lim_{\rho\to0^+} (\rho^4\ln\rho^2)\cdot(\sin^2\varphi\cos^2\varphi).$$

Vypočítame limitu z časti $\rho^4\ln\rho^2$ (napr. pomocou L'Hospitalovho pravidla):

$$\lim_{\rho\to0^+} \rho^4\ln\rho^2 = 2\cdot\lim_{\rho\to0^+} \rho^4\ln\rho = 2\cdot\lim_{\rho\to0^+} \frac{\ln\rho}{\frac{1}{\rho^4}} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2\cdot\lim_{\rho\to0^+} \frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{4}{\rho^5}} =$$

$$= (-1/2)\cdot\lim_{\rho\to0^+} \rho^4 = 0.$$

Takže:

$$\lim_{\rho\to0^+} (\rho^4\ln\rho^2)\cdot(\sin^2\varphi\cos^2\varphi) = 0.$$

Limita existuje, nakoľko platí:

$$|(\rho^4\ln\rho^2)\cdot\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 0| \le \rho^4|\ln\rho^2| \longrightarrow 0,\ \text{pre } \rho\to0^+$$

(využili sme odhad $|\sin^2\varphi\cos^2\varphi| \le 1$). Platí teda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Riešenie 2:

Limita sa dá spočítať i pomocou vety o dvoch policajtoch pre funkcie jednej premennej. Je potrebné však využiť niekoľko skutočností. V prvom rade budeme potrebovať nerovnosť:

$$2|xy| \le x^2+y^2.$$

Dokáže sa ľahko z nerovnosti $0 \leq (|x| - |y|)^2$. Okrem toho platí $|xy| = \sqrt{x^2y^2} = (x^2y^2)^{\frac{1}{2}}$, podľa definície druhej odmocniny. Preto máme:

$$2 \cdot (x^2y^2)^{\frac{1}{2}} \leq x^2 + y^2.$$

Konvergenčná podmienka v danej limite hovorí, že s bodom $[x, y]$ sa blížime k bodu $[0, 0]$. Inak povedané, vzdialenosť $\sqrt{x^2 + y^2}$ ide do nuly. Preto sa môžeme obmedziť iba na body $[x, y]$ spĺňajúce:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 1.$$

Kombináciou posledných dvoch nerovností máme:

$$2 \cdot (x^2y^2)^{\frac{1}{2}} \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Následne umocnením na kladný výraz x^2y^2 dostaneme:

$$2^{x^2y^2} \cdot \left[(x^2y^2)^{x^2y^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq (x^2 + y^2)^{x^2y^2} \leq 1^{x^2y^2} = 1.$$

No a teraz aplikujeme vetu o dvoch policajtoch. Platí $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$ a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{x^2y^2} \cdot \left[(x^2y^2)^{x^2y^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{x^2y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(x^2y^2)^{x^2y^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^0 \cdot \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2y^2)^{x^2y^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^0 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

V poslednom kroku sme využili limitu funkcie jednej premennej:

$$\lim_{t\to 0^+} t^t = 1,$$

aplikovaním pre $t = x^2y^2$. Podľa vety o dvoch policajtoch teda i prostredný člen v poslednej nerovnosti musí konvergovať do 1. Preto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

Príklad 9 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Ide o neurčitosť typu $1^{\frac{\infty}{\infty}}$. Ak si všimneme výraz pod exponentom, vidíme, že sa dá upraviť na é-čkovú limitu:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}},$$

Výraz v hranatej zátvorke konverguje k číslu e. Limita exponentu je:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \frac{x}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = 1.$$

Teda:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}} = \mathrm{e}.$$

Príklad 10 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

Riešenie:
Ide o neurčitosť $(\infty/\infty)^{\infty}$. Využijeme takýto odhad:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Toto vyplýva z nasledujúceho:

$$0 \le (|x|-|y|)^2,$$

$$0 \le x^2+y^2-2|x|\cdot|y|,$$

$$2|x|\cdot|y| \le x^2+y^2,$$

$$\frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}, \quad x^2+y^2 \ne 0,$$

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Platí teda:

$$0 \leq \left| \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}.$$

Avšak:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0,$$

takže podľa vety o dvoch policajtoch dostávame:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

Príklad 11 (polárne súradnice)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

Riešenie:
Máme neurčitosť typu ∞/∞. Zavedieme polárne súradnice v okolí bodu $[0,0]$:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

pričom konvergenčná podmienka bude $\rho \to \infty$ a $\varphi \in (0, \pi/2)$ pre body s dostatočne veľkým ρ (premyslite si to znázornením konvergencie na obrázku; zaujímajú nás body s veľkým kladným x a s veľkým kladným y). Po dosadení dostaneme:

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{1 - \cos\varphi\sin\varphi} = 0.$$

Treba ešte ukázať, že konvergencia je rovnomerná vzhľadom na uhol φ, t.j. potrebujeme zhora ohraničiť výraz

$$\left| \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{1 - \cos\varphi\sin\varphi} - 0 \right|$$

niečím, čo nezávisí na uhle φ a konverguje k nule pre $\rho \to \infty$. Bolo by teda fajn ohraničiť zhora výraz:

$$\left| \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{1 - \cos\varphi\sin\varphi} \right|.$$

To znamená ohraničiť čitateľ *zhora* a menovateľ *zdola*. Platí:

$$|\cos\varphi + \sin\varphi| \le |\cos\varphi| + |\sin\varphi| \le 2$$

Ďalej máme:

$$\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi,$$
$$-1 \le \sin 2\varphi \le 1.$$

Platia teda nerovnosti:

$$-\frac{1}{2} \le \cos\varphi\sin\varphi \le \frac{1}{2}.$$

Vykonáme na nich niekoľko úprav:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \le \cos\varphi\sin\varphi &\le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \ge -\cos\varphi\sin\varphi &\ge -\frac{1}{2}, \\ 1+\frac{1}{2} \ge 1-\cos\varphi\sin\varphi &\ge 1-\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} \ge 1-\cos\varphi\sin\varphi &\ge \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Výraz $1-\cos\varphi\sin\varphi$ je teda kladný a preto:

$$|1-\cos\varphi\sin\varphi| = 1-\cos\varphi\sin\varphi \ge \frac{1}{2}.$$

Našli sme teda ohraničenia:

$$|\cos\varphi + \sin\varphi| \le 2, \qquad |1-\cos\varphi\sin\varphi| \ge \frac{1}{2}.$$

Preto platí:

$$\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right| = \frac{|\cos\varphi+\sin\varphi|}{|1-\cos\varphi\sin\varphi|} \le \frac{2}{1/2} = 4.$$

Potom:

$$\left|\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi} - 0\right| \le \frac{4}{\rho},$$

a $\lim\limits_{\rho\to\infty}(4/\rho) = 0$, ako sme si želali. Preto úvodná limita existuje a platí:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Príklad 12
Určte body nespojitosti funkcie:

$$f(x,y) = \frac{x^2+3y}{x^2-3y}.$$

Riešenie:
Keďže f je pozliepaná z elementárnych funkcií, bude nespojitá tam, kde nie je definovaná, t.j. všade tam, kde $x^2 - 3y = 0$. Množina bodov nespojitosti funkcie f je teda graf funkcie $y = x^2/3$.

Príklad 13
Určte body nespojitosti funkcie:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Riešenie:
Zrejme jediný problematický bod bude $[0,0]$. Pozrieme sa na limitu f v tomto bode. Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Zavedieme polárne súradnice v okolí bodu $[0,0]$ a po dosadení dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Výsledná limita závisí na uhle φ, preto f nemá limitu v bode $[0,0]$. Teda f je nespojitá v bode $[0,0]$, všade inde je spojitá.

Pri počítaní limít z funkcií viac premenných sme uvažovali situáciu typu:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [\ldots],$$

t.j. premenné x, y sa *súčasne nezávisle* blížili k bodom a, b. Niekedy sa vyskytne situácia typu (tzv. *opakované limity*):

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b}[\ldots]\right], \quad \text{resp. } \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a}[\ldots]\right],$$

t.j. premenné x, y sa opäť nezávisle blížia k bodom a, b, ale *nie súčasne* – najprv sa hýbeme s premennou y, a potom hýbeme s premennou x, resp. naopak. Táto drobná odlišnosť môže dramaticky zmeniť charakter počítanej limity.

Príklad 14

Máme vypočítať nasledovné limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right],$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right].$$

Riešenie:

Prvá limita neexistuje. Odkiaľ berieme podozrenie? Podozrivá je „nesúrodosť“ členov obsiahnutých v danom výraze. Člen x^2y^2 je 4. rádu, naproti tomu člen $(x-y)^2$ je iba 2. rádu a navyše sa vyskytuje iba v menovateli. Ak by sme s premennými konvergovali do ∞, bolo by všetko v poriadku, nakoľko člen 4. rádu by po istom čase prevážil člen 2. rádu. Avšak my ideme s oboma premennými do nuly, takže dominantným sa pre malinké x, y stáva člen 2. rádu – *pokiaľ úplne nevymizne*. Posledná poznámka je podstatná. Ak budeme totiž cestovať po trase $y = x$ (to iste môžeme, nakoľko táto trasa leží v definičnom obore limitovaného výrazu pre $x, y \neq 0$), dominantný člen $(x-y)^2$ vymizne a dostaneme limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Ak však pôjdeme po ceste $2y = x$ (opäť môžeme), člen druhého rádu nevymizne, a výrazne tým zamieša karty:

$$\lim_{y\to 0} \frac{4y^4}{4y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4y^2}{4y^2+1} = 0.$$

Tým sme našu domnienku potvrdili.

Druhá limita sa spočíta tak, že premennú x si „ľubovoľne zafixujeme“ a spočítame

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

ako limitu jednej premennej y (x berieme ako konštantu). Táto limita existuje:

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

Potom tento výsledok limitujeme podľa x:

$$\lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Teda:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right] = 0.$$

Podobne situácie dopadne aj v prípade tretej limity (premenné x, y vystupujú v danom výraze symetricky):

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right] = 0.$$

Zistili sme teda, že napriek tomu, že limita z danej funkcie neexistuje, obe opakované limity existujú a dokonca sa rovnajú.

Príklad 15

Máme vypočítať nasledovné limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right],$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right].$$

Riešenie:

Prvá limita existuje, nakoľko $\sin(1/x)\sin(1/y)$ je ohraničená funkcia a $x+y$ konverguje do nuly. Preto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Ani jedna opakovaná limita však neexistuje. Zoberme si napríklad limitu:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right].$$

Premennú x zafixujeme. Platí:

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right).$$

Druhý sčítanec konverguje do nuly (sínusová časť je ohraničená, $y\to 0$). Limita prvej časti neexistuje ($\sin(1/y)$ nemá limitu pre $y\to 0$). To znamená, že ani opakovaná limita neexistuje.

Niekto by mohol namietnuť – zoberme teda také pevné x, aby:

$$x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

a potom bude všetko v poriadku. Iste také x existuje (napr. $x=1/\pi$). Treba si však uvedomiť, o čo tu v skutočnosti ide. Možno to prirovnať k akejsi štafete. Prvé vyštartuje y a po dobehnutí (v našom prípade do bodu 0) odovzdá svoj kolík (t.j. výsledok svojho limitovania) premennej x. Preberanie kolíka musí prebehnúť za akýchkoľvek podmienok – premenná y musí byť schopná odovzdať svoj kolík po prebehnutí *každej dostupnej trasy* a pri *každej dostupnej pozícií* premennej x. (dostupná trasa a dostupná pozícia leží v definičnom obore funkcie). Inými slovami, limita podľa y musí existovať pre každé zafixované x. Podobne, premenná x nech kolík preberie kdekoľvek, musí ho opäť šťastlivo priniesť do cieľa (zas po každej prípustnej trase). V našom prípade je však premenná y tak nemožná, že svoj kolík *skoro vždy stratí*, t.j. kolík, teda výsledok po limitovaní podľa y, *skoro nikdy neexistuje* (až na pár vzácnych okamihov, keď ju premenná x čaká na vhodných pozíciách, napr. $x=1/\pi$). Takže o nejakom zdarnom dopravení kolíka do cieľa nemože byť ani reč; premenná x nemá čo priniesť do cieľa. Preto uvedená opakovaná limita neexistuje. Podobne je to i v prípade tretej limity (tam zas zlyháva premenná x so svojim kolíkom :))).