Príklady na precvičovanie – diferenciály a Taylorova veta pre funkcie viac premenných

Riešené príklady – I. diferenciál funkcie viac premenných

Príklad 1 (dotyková rovina, normála)
Určte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x$$

v bode $[1, 0, ?]$.

Riešenie:
Potrebujeme zistiť prvý diferenciál funkcie f a jej hodnotu v bode $A = [a_1, a_2] = [1, 0]$, nakoľko rovnica dotykovej roviny má tvar ($X = [x, y]$ je všeobecný bod):

$$z - f(A) = \mathrm{d}f(A, X).$$

Platí $f(A) = 2$ a:

$$\mathrm{d}f(A, X) = f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2).$$

Postupne dostávame:

$$f'_x(A) = (3x^2 + 3y^2 - y + 1)_A = 4, \quad f'_y(A) = (6xy - x)_A = -1,$$

$$\mathrm{d}f(A, X) = 4(x - 1) - (y - 0) = 4x - y - 4.$$

Pre rovnicu hľadanej dotykovej roviny teda platí:

$$z - 2 = 4x - y - 4, \Longrightarrow 4x - y - z - 2 = 0.$$

Jedným z jej normálových vektorov je napr. vektor $\bar{n} = (4, -1, -1)$ (koeficienty pri x, y, z). Preto normála ku grafu funkcie f v bode $[1, 0, 2]$ má rovnicu:

$$x = 1 + 4t, \quad y = -t, \quad z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2 (približné výpočty)
Pomocou prvého diferenciálu vhodnej funkcie určte približne $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$.

Riešenie:
Ako vhodný kandidát sa nám prirodzene ponúka funkcia $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Chceme zistiť hodnotu funkcie f v bode $X = [x, y] = [1.02, 1.97]$. Vieme, že pre bod $A = [a_1, a_2]$ „blízky“ bodu X platí:

$$f(X) \approx f(A) + \mathrm{d}f(A, X).$$

Za bod A môžeme vziať napr. $A = [a_1, a_2] = [1, 2]$, nakoľko hodnotu $f(A) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$ vieme presne spočítať. Potrebujeme ešte určiť prvý diferenciál funkcie f v bode A (vzhľadom na bod X). Platí:

$$\mathrm{d}f(A, X) = f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2),$$

$$f'_x(A) = \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right)_A = \frac{1}{2}, \quad f'_y(A) = \left(\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \right)_A = 2.$$

Potom:

$$\mathrm{d}f(A, X) = \frac{1}{2}(x - 1) + 2(y - 2),$$

a pre hodnotu $f(x, y)$ máme odhad:

$$f(x, y) \approx 3 + \frac{1}{2}(x - 1) + 2(y - 2).$$

Dosadením $x = 1.02$ a $y = 1.97$ dostaneme $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3} = f(1.02, 1.97) \approx 2.95$.

Príklad 3 (kmeňová funkcia)
Rozhodnite, či výraz

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y$$

je prvým diferenciálom nejakej funkcie $F(x, y)$. Ak áno, nájdite všetky takéto funkcie F.

Riešenie:
Chceme teda overiť, či existuje funkcia $F(x, y)$ s vlastnosťou:

$$\mathrm{d}F = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Keďže pre diferenciál $\mathrm{d}F$ platí:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

dostávame:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Úloha sa nám teda pretransformovala na nájdenie kmeňovej funkcie F k dvojici funkcií:

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Postupujeme štandardne, ako pri riešení exaktných DR:

$$M'_y = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad N'_x = -\frac{yx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Z rovnosti $M'_y = N'_x$ vyplýva existencia kmeňovej funkcie F k dvojici M, N. Platí pre ňu:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2} + C(y).$$

Neznámu integračnú funkciu $C(y)$ zistíme z rovnosti:

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Po dosadení dostaneme ($C'(y)$ označuje deriváciu $C(y)$ podľa premennej y):

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y),$$

$$0 = C'(y) \implies C(y) = K, \quad K \text{ je konštanta.}$$

Teda všetky funkcie F, ktoré majú výraz v zadaní za svoj prvý diferenciál, sú tvaru:

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Poznamenajme, že kmeňovú funkciu F nájdeme i tak, že vypočítame obidva integrály $\int M\,\mathrm{d}x$ a $\int N\,\mathrm{d}y$; dostaneme potom dve integračné funkcie $C(y)$ a $D(x)$, ktoré určíme vzájomným porovnaním pravých strán (tak, ako sme to robili na cvičeniach :)).

Riešené príklady – Taylorova veta pre funkcie viac premenných

Podobne ako v teórii funkcií jednej reálnej premennej, tak aj pri funkciách viac premenných platí analógia Taylorovej vety. Ak f je funkcia m premenných a bod $A \in D(f)$ je taký, že na istom okolí $O(A)$ bodu A je funkcia f $(n+1)$-krát diferencovateľná, potom pre každý bod $X \in O(A)$ sa hodnota $f(X)$ dá vyjadriť v tvare:

$$f(X) = T_n(A, X) + R_n(X),$$

kde T_n je n-tý Taylorov polynóm funkcie f so stredom v bode A. Má tvar:

$$T_n(A, X) = f(A) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(A, X) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(A, X) + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(A, X),$$

kde $\mathrm{d}^k f(A, X)$ je k-tý diferenciál funkcie f v bode A, $k = 1, \ldots, n$. Funkcia $R_n(X)$ sa nazýva zvyšok Taylorovho polynómu a zvyčajne sa zapisuje v tvare:

$$R_n(X) = \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(A + \theta(X - A), X + \theta(X - A)), \quad \theta \in (0, 1).$$

Funkcia $R_n(X)$ (až na faktor $1/(n+1)!$) je teda $(n+1)$-tý diferenciál funkcie f v bode $A + \theta(X - A)$, teda v nejakom (bližšie neurčenom) bode vo vnútri úsečky spájajúcej body A, X. Význam zvyšku $R_n(X)$ je v tom, že číslo $|R_n(X)|$ udáva chybu, ktorej sa dopúšťame, keď hodnotu funkcie f v bode X aproximujeme hodnotou Taylorovho polynómu $T_n(A, X)$ v bode X.

Diferenciál k-tého rádu funkcie f sa definuje nasledovným formálnym zápisom ($X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$, $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$):

$$\mathrm{d}^k f(A, X) = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(A).$$

Tomuto zápisu je treba rozumieť nasledovne. Uvedený súčet formálne umocníme, pričom namiesto mocnín symbolu $\partial/\partial x_i$ uvažujeme parciálnu deriváciu f príslušného rádu v bode A a mocniny výrazov $x_i - a_i$ sú klasické mocniny; ilustrujeme to na príklade. Ak máme funkciu dvoch premenných $f(x, y)$ a $X = [x, y]$, $A = [a_1, a_2]$, potom napríklad:

$$\mathrm{d}^2 f(A, X) = \left((x - a_1) \frac{\partial}{\partial x} + (y - a_2) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(A) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}(x-a_1)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}(y-a_2)^2.$$

Chceme určiť tretí diferenciál. Vieme, že platí vzorček:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Preto:

$$\mathrm{d}^2 f(A,X) = \left((x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(A) =$$

$$= \frac{\partial^3 f(A)}{\partial x^3}(x-a_1)^3 + 3\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2 \partial y}(x-a_1)^2(y-a_2) +$$

$$+3\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y^2}(x-a_1)(y-a_2)^2 + \frac{\partial^3 f(A)}{\partial y^3}(y-a_2)^3.$$

Ďalej chceme určit druhý diferenciál z funkcie troch premenných $f(x,y,z)$. Platí:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Takže:

$$\mathrm{d}^3 f(A,X) = \left((x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y} + (z-a_3)\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(A) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}(x-a_1)^2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}(x-a_2)^2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial z^2}(z-a_3)^2 +$$

$$+2\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2) + 2\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial z}(x-a_1)(z-a_3) + 2\cdot\frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial z}(y-a_2)(z-a_3).$$

V prípade, ak chceme určiť diferenciál funkcie na nejakej množine, t.j. bod A uvažujeme ľubovoľne, prírastky $x_i - a_i$ označujeme $\mathrm{d}x_i$ (diferenciály nezávislých premenných x_i). Potom diferenciál z funkcie f bude funkciou $2m$ premenných – jednak premenných x_i, a jednak premenných $\mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Napríklad ak máme funkciu dvoch premenných $f(x,y)$, potom:

$$\mathrm{d}f(x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\mathrm{d}x)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(\mathrm{d}y)^2.$$

Príklad 4
Určte $\mathrm{d}^3 f(A, X)$, ak $A = [1, 2]$ a

$$f(x, y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2.$$

Riešenie:
Keďže sa jedná o tretí diferenciál, potrebujeme vypočítať všetky tretie parciálne derivácie funkcie f v bode A. Platí (medzivýpočty vynechávame):

$$f'''_{xxx}(A) = (24xy^2 + 12)_A = 108,$$

$$f'''_{xxy}(A) = (24x^2y)_A = 48,$$
$$f'''_{xyy}(A) = (8x^3 + 18y)_A = 44,$$
$$f'''_{yyy}(A) = (18x)_A = 18.$$

Potom:

$$\mathrm{d}^3 f(A, X) = f'''_{xxx}(A)(x-1)^3 + 3f'''_{xxy}(A)(x-1)^2(y-2)+$$

$$+3f'''_{xyy}(A)(x-1)(y-2)^2 + f'''_{yyy}(A)(y-2)^3.$$

Po dosadení:

$$\mathrm{d}^3 f(A, X) = 108(x-1)^3 + 144(x-1)^2(y-2) + 132(x-1)(y-2)^2 + 18(y-2)^3.$$

Príklad 5
Určte $\mathrm{d}^2 f$ vo všeobecnom bode, pričom:

$$f(x, y) = y \sin x + x \cos y.$$

Riešenie:
Potrebujeme zistiť druhé parciálne derivácie funkcie f:

$$f''_{xx} = -y \sin x, \qquad f''_{xy} = \cos x - \sin y, \qquad f''_{yy} = -x \cos y.$$

Teda:

$$\mathrm{d}^2 f = f''_{xx}(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(\mathrm{d}y)^2.$$

Po dosadení máme:

$$\mathrm{d}^2 f = -(y\sin x)\cdot(\mathrm{d}x)^2 + 2(\cos x - \sin y)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y - (x\cos y)\cdot(\mathrm{d}y)^2.$$

Príklad 6

Nájdite $T_3(x,y)$ so stredom v bode $A=[1,1]$ pre funkciu $f(x,y)=x^y$. Pomocou tohto výsledku potom určte približne $1.1^{1.02}$.

Riešenie:

Vieme, že $T_3(x,y)$ má tvar:

$$T_3(x,y) = f(A) + \mathrm{d}f(A) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(A) + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3 f(A).$$

Platí $f(A)=1$. Ďalej potrebujeme určiť prvý, druhý a tretí diferenciál funkcie f v bode $A=[1,1]$. Postupne vypočítame parciálne derivácie potrebných rádov:

$$f'_x = (yx^{y-1})_A = 1, \quad f'_y = (x^y\ln x)_A = 0,$$
$$f''_{xx} = (y(y-1)x^{y-2})_A = 0, \quad f''_{xy} = (x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x)_A = 1,$$
$$f''_{yy} = (x^y\ln^2 x)_A = 0,$$
$$f'''_{xxx} = (y(y-1)(y-2)x^{y-3})_A = 0,$$
$$f''_{xxy} = ((2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x)_A = 1,$$
$$f'''_{xyy} = (yx^{y-1}\ln^2 x + 2x^{y-1}\ln x)_A = 0, \quad f'''_{yyy} = (x^y\ln^3 x)_A = 0.$$

Jednotlivé diferenciály budú:

$$\mathrm{d}f(A) = x-1,$$
$$\mathrm{d}^2 f(A) = 2(x-1)(y-1),$$
$$\mathrm{d}^3 f(A) = 3(x-1)^2(y-1).$$

Taylorov polynóm $T_3(x,y)$ má potom tvar:

$$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2}.$$

Zároveň tento polynóm aproximuje výraz x^y pre (x, y) z malého okolia bodu $[1, 1]$:

$$x^y \approx x + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2}, \quad (x, y) \in O([1, 1]).$$

Máme približne zistiť hodnotu $1.1^{1.02}$. Po dosadení $x = 1.1$ a $y = 1.2$ dostaneme:

$$1.1^{1.2} \approx 1.1 + 0.1 \cdot 0.02 + \frac{0.1^2 \cdot 0.02}{2} = 1.1 + 0.002 + 0.0001 = 1.1021.$$