Príklady na precvičovanie – diferenciály a Taylorov polynóm funkcií viac premenných

Riešené príklady

Príklad 1 (prvý diferenciál)
Overme, že funkcia $f(x,y) = 2xy - 3x^2y + y\ln x$ je diferencovateľná v bode $A = [1,2]$ a nájdime jej diferenciál $\mathrm{d}f(A,h,k)$.

Riešenie:
Pre parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y)$ platí

$$f'_x(x,y) = 2y - 6xy + \frac{y}{x}, \qquad f'_y(x,y) = 2x - 3x^2 + \ln x$$

(samy overte :)). Funkcie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ sú spojité v bode A (i toto samy overte ;)), a tak funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v bode A. Nakoľko $f'_x(A) = -6$ a $f'_y(A) = -1$, pre jej prvý diferenciál $\mathrm{d}f(A,h,k)$ máme

$$\mathrm{d}f(A,h,k) = f'_x(A)\cdot h + f'_y(A)\cdot k = -6h - k, \quad [h,k] \in \mathbb{R}^2.$$

Príklad 2 (prvý diferenciál)
Dokážme, že funkcia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

je spojitá v bode $[0,0]$, parciálne derivácie $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$ existujú, ale $f(x,y)$ nie je diferencovateľná v bode $[0,0]$.

Riešenie:
Pomocou transformácie do polárnych súradníc $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$ zistíme, že platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

(samy overte :)). Funkcia $f(x,y)$ je teda spojitá v bode $[0,0]$. Parciálne derivácie $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$ určíme priamo z ich definície, t.j.,

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot y}{0^2+y^2}-0}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(samy si premyslite ;)). Preskúmame teraz diferencovateľnosť funkcie $f(x,y)$ v bode $[0,0]$. Keďže existujú parciálne derivácie $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$, skutočnosť, že funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v bode $[0,0]$, znamená, že funkcia $w(h,k)$ daná predpisom

$$w(h,k) := f(0+h,0+k) - f(0,0) - f'_x(0,0)\cdot h - f'_y(0,0)\cdot k$$

spĺňa limitnú podmienku $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ (samy si dobre premyslite na základe definície :)). V našom prípade $w(h,k) = f(h,k)$, t.j.,

$$w(h,k) = \begin{cases} \frac{h^2k}{h^2+k^2}, & [h,k] \neq [0,0], \\ 0, & [h,k] = [0,0] \end{cases}$$

(samy overte využitím vyššie uvedených výpočtov ;)). Potom dostávame

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posledná limita však neexistuje, ako sa možno ľahko presvedčiť pomocou polárnych súradníc $h = \rho\cos\varphi$ a $h = \rho\sin\varphi$ (samy overte :)). To znamená, že funkcia $f(x,y)$ nie je diferencovateľná v bode $[0,0]$.

Príklad 3 (prvý diferenciál)
Ukážme, že funkcia

$$f(x,y) = \psi(x) + \psi(y), \quad \text{kde} \quad \psi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

je diferencovateľná v bode $[0,0]$, hoci parciálne derivácie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ nie sú spojité v bode $[0,0]$.

Riešenie:

Najprv overíme existenciu parciálnych derivácií prvého rádu funkcie $f(x,y)$ v bode $[0,0]$. Priamo z definície a zo zadania príkladu máme

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)+\psi(0)-[\psi(0)+\psi(0)]}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\psi(0)+\psi(y)-[\psi(0)+\psi(0)]}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\psi(y)-\psi(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\sin\frac{1}{y}}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y} = 0 \end{aligned}$$

(samy overte :)). Ďalej vieme, že fakt, že funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v bode $[0,0]$ znamená, že funkcia $w(h,k)$ definovaná

$$w(h,k) = f(0+h,0+k) - f(0,0) - f'_x(0,0)\cdot h - f'_y(0,0)\cdot k = \psi(h)+\psi(k)$$

pre $[h,k]\in\mathbb{R}^2$ spĺňa limitnú podmienku

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\psi(h)+\psi(k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Platnosť poslednej rovnosti dokážeme pomocou vety o dvoch policajtoch :). Podľa definície funkcie $\psi(t)$ v zadaní príkladu platia odhady

$$|\psi(h)| \le h^2, \quad |\psi(k)| \le k^2, \qquad [h,k]\in\mathbb{R}^2$$

(samy si premyslite ;)). Následne pomocou trojuholníkovej nerovnosti máme

$$0 \le \left|\frac{\psi(h)+\psi(k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \frac{\overbrace{|\psi(h)|}^{\le h^2} + \overbrace{|\psi(k)|}^{\le k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

(samy overte :)). A keďže platí $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$, podľa vety o dvoch policajtoch dostávame rovnosť

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{\psi(h)+\psi(k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\psi(h)+\psi(k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

(samy si pozorne premyslite :)). Funkcia $f(x,y)$ je teda diferencovateľná v bode $[0,0]$. Avšak parciálne derivácie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ nie sú spojité v bode $[0,0]$. Vyplýva to z nasledujúcich skutočností. Funkcia $\psi(t)$ má deriváciu na celom $\mathbb{R}$, pričom platí

$$\psi'(t) = \begin{cases} 2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

(samy overte, pre $t = 0$ vypočítajte $\psi'(0)$ priamo z definície derivácie :)). Pre ľubovoľný bod $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ potom máme

$$f'_x(x,y) = \psi'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \psi'(y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

(i toto si samy dobre premyslite ;)). Z posledných identít však vyplýva, že funkcie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ nemajú limity v bode $[0,0]$. Konkrétne, pre cestu $y = x$ dostávame

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \text{ neexistuje},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim_{y\to 0} \left(2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y} \right) = \text{ neexistuje}$$

(samy overte :)). Parciálne derivácie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ preto nie sú spojité v bode $[0,0]$. To ilustruje fakt, že spojitosť parciálnych derivácií funkcie $f(x,y)$ je len postačujúcou podmienkou jej diferencovateľnosti, nie však nutnou podmienkou (porovnaj s Príkladom 1 :)).

Príklad 4 (dotyková rovina, normála)
Určme rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x$$

v bode $A = [1, 0, ?]$.

Riešenie:
Bod A leží na grafe funkcie $f(x,y)$, preto hodnota jeho tretej súradnice je $f(1,0) = 2$ (samy si premyslite :)). Potrebujeme ďalej stanoviť prvý diferenciál funkcie $f(x,y)$ v bode $[1,0]$, keďže hľadaná rovnica dotykovej roviny v bode A má tvar

$$z - f(1,0) = \mathrm{d}f(1,0,h,k),$$

kde prírastky $h = x - 1$ a $k = y - 0 = y$. Postupne dostávame

$$f'_x(1,0) = 3x^2 + 3y^2 - y + 1\big|_{[1,0]} = 4, \qquad f'_y(1,0) = 6xy - x\big|_{[1,0]} = -1.$$

Nakoľko sú parciálne derivácie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ spojité v bode $[1,0]$ (samy overte :)), funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v bode $[1,0]$ s prvým diferenciálom tvaru

$$\mathrm{d}f(1,0,x,y) = f'_x(1,0)\cdot h + f'_y(1,0)\cdot k = 4\cdot(x-1) - 1\cdot y = 4x - y - 4.$$

Graf funkcie $f(x,y)$ teda má v bode A hľadanú doykový rovinu s rovnicou

$$z - 2 = 4x - y - 4 \quad\Longrightarrow\quad 4x - y - z - 2 = 0.$$

Jedným z normálových vektorov tejto roviny je napríklad $\bar{n} = (4, -1, -1)^T$ (koeficienty pri premenných x, y, z v poslednej rovnici :)). Parametrické vyjadrenie normály ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode A je preto dané

$$x = 1 + 4t, \quad y = -t, \quad z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \quad :).$$

Príklad 5 (dotyková rovina, normála)
Určme rovnicu dotykovej roviny grafu funkcie $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, ktorá je

rovnobežná s rovinou $\sigma\,:\,8x-6y-z-15=0$.

Riešenie:
Keďže parciálne derivácie $f'_x(x,y)=4x$ a $f'_y(x,y)=-2y$ sú spojité na celom $\mathbb{R}^2$, funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná na $\mathbb{R}^2$, a teda v každom bode jej grafu je existuje dotykovú rovinu (samy si premyslite :)). Nech σ_0 je hľadaná dotyková rovina zostrojená v bode $[x_0,\,y_0,\,f(x_0,y_0)]$. Potom zrejme

$$\sigma_0\,:\,z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot x+f'_y(x_0,y_0)\cdot y+(-1)\cdot z+\big[f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\,x_0-f'_y(x_0,y_0)\,y_0\big]=0$$

(samy overte ;)). Obzvlášť, normálový vektor $\bar{n}_0$ roviny σ_0 má tvar

$$\bar{n}_0=(f'_x(x_0,y_0),\,f'_y(x_0,y_0),\,-1)^T=(4x_0,\,-2y_0,\,-1)^T$$

(i toto si samy premyslite :)). Na druhej strane, normálový vektor $\bar{n}$ roviny σ je $\bar{n}=(8,-6,-1)^T$, a nakoľko sú roviny σ a σ_0 rovnobežné, vektory $\bar{n}$ a $\bar{n}_0$ sú kolineárne, t.j., $\bar{n}_0=k\cdot\bar{n}$ pre nejaké nenulové reálne číslo k. Teda

$$(4x_0,\,-2y_0,\,-1)^T=(8k,\,-6k,\,-k)^T$$

$$\Downarrow$$

$$4x_0=8k,\quad -2y_0=-6k,\quad -k=-1$$

$$\Downarrow$$

$$k=1,\quad x_0=2,\quad y_0=3,\quad f(x_0,y_0)=-1$$

(samy overte :)). Hľadaná rovina σ_0 je teda dotykovou rovinou ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode $[2,3,-1]$ a jej rovnica je $8x-6y-z+1=0$:).

Príklad 6 (približné výpočty)
Pomocou prvého diferenciálu vhodnej funkcie dvoch premenných stanovme približne hodnotu $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$.

Riešenie:
Ako vhodný kandidát sa nám prirodzene ponúka funkcia $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$.

Chceme zistiť jej hodnotu v bode $[x_*, y_*] = [1.02, 1.97]$. Vieme, že pre bod $[x_0, y_0]$ z definičného oboru funkcie $f(x, y)$, ktorý je dostatočne „blízko“ k bodu $[x_*, y_*]$, platí

$$f(x_*, y_*) - f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d}f(x_0, y_0, h, k)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_*, y_*) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0, h, k),$$

kde prírastky $h = x_* - x_0$ a $k = y_* - y_0$. Celý vtip je v tom, že bod $[x_0, y_0]$ sa snažíme zvoliť tak, aby výpočet funkčnej hodnoty $f(x_0, y_0)$ bol čo najjednoduchší a podľa možností presný :). Takým bodom je napríklad $[x_0, y_0] = [1, 2]$, keďže $f(1, 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$. Potom $h = 0.02$ a $k = -0.03$ a prvý diferenciál funkcie $f(x, y)$ v bode $[x_0, y_0]$ vzhľadom na bod $[x_*, y_*]$ je

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, h, k) = f'_x(1, 2) \cdot h + f'_y(1, 2) \cdot k,$$

$$f'_x(1,2) = \left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{[1,2]} = \frac{1}{2}, \qquad f'_y(1,2) = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{[1,2]} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, h, k) = \frac{1}{2} \cdot h + 2 \cdot k = -0.05.$$

Pre hľadanú hodnotu v zadaní príkladu potom dostávame odhad

$$\sqrt{1.02^3 + 1.97^3} = f(1.02, 1.97) \approx f(1, 2) - 0.05 = 2.95 \quad :).$$

Príklad 7 (kmeňová funkcia)
Rozhodnime, či výraz

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y$$

je prvým diferenciálom nejakej funkcie $F(x, y)$. Ak áno, nájdime všetky takéto funkcie $F(x, y)$.

Riešenie:
Chceme overiť, či existuje funkcia $F(x, y)$ s vlastnosťou

$$\mathrm{d}F(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Keďže pre (úplný) diferenciál $\mathrm{d}F(x, y)$ platí

$$\mathrm{d}F(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

dostávame podmienky

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

Hľadaná funkcia $F(x, y)$ je teda kmeňová funkcia k dvojici

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Postupujeme preto štandardne ako pri riešení exaktných diferenciálnych rovníc. Z výpočtu prvých parciálnych derivácií

$$M'_y(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \qquad N'_x(x,y) = -\frac{yx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

(samy overte :)) vyplýva rovnosť $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$, ktorá zaručuje existenciu kmeňovej funkcie $F(x, y)$ k dvojici $M(x, y)$ a $N(x, y)$. Platí napríklad

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2} + C(y),$$

kde funkcia $C(y)$ je neznáma „integračná konštanta“ (integrovali sme neurčito podľa premennej x ;)). Určíme ju na základe druhej rovnosti

$$N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

Dosadení dostaneme ($C'(y)$ označuje klasickú deriváciu funkcie $C(y)$ podľa premennej y :))

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y)$$

$$\Downarrow$$

$$C'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C(y) = K, \qquad K \in \mathbb{R} \text{ je konštanta.}$$

Všetky funkcie $F(x,y)$, ktorých prvý diferenciál je rovný výrazu v zadaní príkladu, majú teda tvar

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Poznamenajme, že kmeňovú funkciu $F(x,y)$ nájdeme i tak, že vypočítame obidva neurčité integrály $\int M(x,y)\,\mathrm{d}x$ a $\int N(x,y)\,\mathrm{d}y$. Dostaneme tak dve integračné konštanty $C(y)$ a $D(x)$, ktoré určíme vzájomným porovnaním získaných vyjadrení pre funkciu $F(x,y)$. Konkrétne, v našom prípade máme

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2} + C(y),$$

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+y^2} + D(x).$$

Pravé strany týchto rovností sa musia identicky rovnať na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Nutne potom $C(y) \equiv K \equiv D(x)$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konštanta :).

Príklad 8 (diferenciály vyšších rádov)
Určme tretí diferenciál funkcie $f(x,y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2$ v bode $A = [1,2]$.

Riešenie:
Potrebujeme vypočítať všetky parciálne derivácie tretieho rádu funkcie $f(x,y)$ v bode A. Postupne platí (medzivýpočty vynechávame)

$$f'''_{xxx}(A) = 24xy^2 + 12\big|_A = 108,$$

$$f'''_{xxy}(A) = f'''_{xyx}(A) = f'''_{yxx}(A) = 24x^2y\big|_A = 48,$$

$$f'''_{xyy}(A) = f'''_{yxy}(A) = f'''_{yxx}(A) = 8x^3 + 18y\big|_A = 44,$$

$$f'''_{yyy}(A) = 18x|_A = 18$$

(samy overte :)). Pre hľadaný diferenciál $\mathrm{d}^3 f(A, h, k)$ tak máme

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 f(A, h, k) &= f'''_{xxx}(A) \cdot h^3 + 3f'''_{xxy}(A) \cdot h^2 k + 3f'''_{xyy}(A) \cdot hk^2 + f'''_{yyy}(A) \cdot k^3 \\ &= 108h^3 + 144h^2 k + 132hk^2 + 18k^3, \quad [h, k] \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Niekedy je vhodné vyjadriť prírastky h a k nezávislých premenných x a y v bode A explicitne, t.j., $h = x - 1$ a $k = y - 2$. Diferenciál má potom tvar

$$\mathrm{d}^3 f(A, x, y) = 108(x-1)^3 + 144(x-1)^2(y-2) + 132(x-1)(y-2)^2 + 18(y-2)^3$$

pre $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Zápis $\mathrm{d}^3 f(A, x, y)$ je možné interpretovať ako tretí diferenciál funkcie $f(x, y)$ v bode A vzhľadom na bod $[x, y]$ z jej definičného oboru.

Príklad 9 (diferenciály vyšších rádov)
Stanovme druhý diferenciál funkcie $f(x, y) = y \sin x + x \cos y$ v ľubovoľnom bode jej definičného oboru.

Riešenie:
Nájdeme parciálne derivácie druhého rádu funkcie $f(x, y)$. Platí

$$f''_{xx}(x, y) = -y \sin x, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \cos x - \sin y, \quad f''_{yy}(x, y) = -x \cos y$$

(samy overte ;)). Potom pre $[x, y], [h, k] \in \mathbb{R}^2$ dostávame

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(x, y, h, k) &= f''_{xx}(x, y) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(x, y) \cdot hk + f''_{yy}(x, y) \cdot k^2 \\ &= -(y \sin x) \cdot h^2 + 2(\cos x - \sin y) \cdot hk - (x \cos y) \cdot k^2.\end{aligned}$$

V tomto prípade sa prírastky h a k väčšinou vyjadrujú v tvare $h = \mathrm{d}x$ a $k = \mathrm{d}y$ a do argumentu diferenciálu sa už potom explicitne neuvádzajú, t.j.,

$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = -(y \sin x) \cdot \mathrm{d}x^2 + 2(\cos x - \sin y) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y - (x \cos y) \cdot \mathrm{d}y^2.$$

Poznamenajme, že zaužívaný, ale nie príliš presný zápis $\mathrm{d}x^2$ znamená $(\mathrm{d}x)^2$, nie však $\mathrm{d}(x^2)$:).

Príklad 10 (Taylorov polynóm)
Zostrojme tretí Taylorov polynóm $T_3(x, y)$ so stredom v bode $A = [1, 1]$ pre funkciu $f(x, y) = x^y$. Pomocou neho potom určme odhad hodnoty $1.1^{1.02}$.

Riešenie:
Hľadaný Taylorov polynóm $T_3(x, y)$ má tvar
$$T_3(x, y) = f(A) + \mathrm{d}f(A, x, y) + \frac{1}{2!} \cdot \mathrm{d}^2 f(A, x, y) + \frac{1}{3!} \cdot \mathrm{d}^3 f(A, x, y).$$
Platí $f(A) = 1$. Ďalej potrebujeme určiť prvý, druhý a tretí diferenciál funkcie $f(x, y)$ v bode A. Postupne vypočítame parciálne derivácie potrebných rádov funkcie $f(x, y)$ v bode A
$$f'_x(A) = yx^{y-1}\big|_A = 1, \quad f'_y(A) = x^y \ln x|_A = 0,$$

$$f''_{xx}(A) = y(y-1)x^{y-2}\big|_A = 0, \quad f''_{yy}(A) = x^y \ln^2 x\big|_A = 0,$$
$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x\big|_A = 1,$$

$$f'''_{xxx}(A) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}\big|_A = 0, \quad f'''_{yyy}(A) = x^y \ln^3 x\big|_A = 0,$$
$$f'''_{xxy}(A) = f'''_{xyx}(A) = f'''_{yxx}(A) = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x\big|_A = 1,$$
$$f'''_{xyy} = f'''_{yxy}(A) = f'''_{yyx}(A) = yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x\big|_A = 0$$
(samy overte jednotlivé výpočty :)). Pre príslušné diferenciály tak máme
$$\mathrm{d}f(A, x, y) = x - 1, \quad \mathrm{d}^2 f(A, x, y) = 2(x-1)(y-1), \quad \mathrm{d}^3 f(A, x, y) = 3(x-1)^2(y-1)$$
(i toto samy overte ;)). Taylorov polynóm $T_3(x, y)$ má potom tvar
$$T_3(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2}.$$
Funkcia $T_3(x, y)$ zrejme aproximuje výraz x^y pre body $[x, y]$ z dostatočne malého okolia bodu A, t.j., platí takýto zaujímavý odhad
$$x^y \approx x + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2} \quad \text{pre } [x, y] \in O(A).$$
V našom prípade po dosadení $x = 1.1$ a $y = 1.2$ dostaneme
$$1.1^{1.2} \approx 1.1 + 0.1 \cdot 0.02 + \frac{0.1^2 \cdot 0.02}{2} = 1.1021 \quad :).$$