Príklady na precvičovanie – parciálne derivácie

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajte smerovú deriváciu funkcie $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ v smere vektora $\bar{u} = (1,2)$ v bode $A = [1,1]$.

Riešenie:
Úlohu budeme riešiť dvomi spôsobmi – jednak priamo z definície smerovej derivácia, a jednak pomocou gradientu funkcie f. Smerová derivácie funkcie f v smere vektora $\bar{u}$ v bode A je definovaná:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \bar{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A + t\cdot \bar{u}) - f(A)}{t}.$$

Platí $A + t\cdot\bar{u} = [1,1] + t\cdot(1,2) = [1+t, 1+2t]$. Po dosadení dostaneme:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \bar{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,1+2t) - f(1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2 + 3(1+t)(1+2t) + (1+2t)^2 - 5}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{11t^2 + 15t}{t} = \lim_{t\to 0} (11t + 15) = 15.$$

Na druhej strane gradient funkcie f v ľubovoľnom bode $[x,y]$ má tvar:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = (2x + 3y,\ 3x + 2y).$$

Po dosadení teda máme $\operatorname{grad} f(A) = (5,5)$ a pre smerovú deriváciu platí:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \bar{u}} = \operatorname{grad} f(A)\cdot\bar{u} = (5,5)\cdot(1,2)^T = 5\cdot 1 + 5\cdot 2 = 15.$$

Poznamenajme, že výpočet smerovej derivácie pomocou gradientu je možný, ak f má spojité parciálne derivácie (čo v našom prípade platí); výpočet pomocou limity však funguje vždy.

Príklad 2

Vypočítajte z'_x, z'_y, ak:

$$z = \ln(u^2 + v^2),$$

kde $u = y\cos x$ a $v = x\sin y$.

Riešenie:

Funkcia z je zložená funkcia – $z = z(u(x,y), v(x,y))$. Platí:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y.$$

Postupne dostaneme:

$$z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot (-y\sin x) + \frac{2v}{u^2+v^2} \cdot \sin y = \frac{2v\sin y - 2uy\sin x}{u^2+v^2},$$

$$z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot \cos x + \frac{2v}{u^2+v^2} \cdot x\cos y = \frac{2u\cos x + 2vx\cos y}{u^2+v^2}.$$

Príklad 3

Vypočítajte u'_x, u'_y, u'_z, ak:

$$u = \ln(r^2 + v + s^2),$$

kde $r = 2^{x+y^2+z}$, $v = x^2yz$ a $s = \sin(x+y+z)$.

Riešenie:

Funkcia u je zložená funkcia – $u = u(r(x,y,z), v(x,y,z), s(x,y,z))$. Platí:

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_v \cdot v'_x + u'_s \cdot s'_x,$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_v \cdot v'_y + u'_s \cdot s'_y,$$

$$u'_z = u'_r \cdot r'_z + u'_v \cdot v'_z + u'_s \cdot s'_z.$$

Postupne dostaneme:

$$u'_x = \frac{2r}{r^2+v+s^2} \cdot 2^{x+y^2+z}\ln 2 + \frac{1}{r^2+v+s^2} \cdot 2xyz +$$

$$+\frac{2s}{r^2+v+s^2}\cdot\cos(x+y+z),$$

$$u'_y=\frac{2r}{r^2+v+s^2}\cdot 2^{x+y^2+z}\ln 2\cdot(2y)+\frac{1}{r^2+v+s^2}\cdot x^2z+$$

$$+\frac{2s}{r^2+v+s^2}\cdot\cos(x+y+z),$$

$$u'_z=\frac{2r}{r^2+v+s^2}\cdot 2^{x+y^2+z}\ln 2+\frac{1}{r^2+v+s^2}\cdot x^2y+$$

$$+\frac{2s}{r^2+v+s^2}\cdot\cos(x+y+z).$$

Príklad 4

Ukážte, že funkcia $u=1/r$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, je riešením lineárnej parciálnej DR druhého rádu:

$$u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0.$$

Riešenie:

Funkcia u je zložená funkcia $u=u(r(x,y,z))$. Potrebujeme stanoviť jej parciálne derivácie u''_{xx}, u''_{yy} a u''_{zz}. Postupne dostávame:

$$u'_x=u'_r\cdot r'_x=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}.$$

Pri prechode k poslednému výrazu sme využili skutočnosť, že $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nakoľko premenné x,y,z vystupujú vo funkcii u symetricky, platí (overte samy):

$$u'_y=-\frac{y}{r^3},\quad u'_z=-\frac{z}{r^3}.$$

Pre druhú parciálnu deriváciu u''_{xx} potom platí:

$$u''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{\partial(-x)}{\partial x}\cdot\frac{1}{r^3}-x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}-x\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=$$

$$=-\frac{1}{r^3}-x\cdot\left(\frac{-3}{r^4}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

Podobným spôsobom pre u''_{yy} a u''_{zz} dostaneme:

$$u''_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad u''_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

Potom platí:

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

Funkcia u je teda riešením rovnice v zadaní. Poznamenajme, že k úlohe sa dalo pristúpiť i tak, že by sme vo výraze $u = 1/r$ rovno dosadili za $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, t.j.

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

a priamo by sme spočítali parciálne derivácie u''_{xx}, u''_{yy} a u''_{zz}. Dostali by sme samozrejme ten istý výsledok.

Príklad 5

Rovnicu

$$(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0$$

transformujte do nových premenných $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Riešenie:

V pôvodnej rovnici máme výrazy z'_x, z'_y vyjadriť pomocou výrazov z'_u, z'_v. Treba si uvedomiť, že neznáma funkcia z je jednak „priamou" funkciou premenných x, y (z pohľadu pôvodnej rovnice), a jednak zloženou funkciou $z = z(u(x,y), v(x,y))$ (z pohľadu transformácie). Preto platí:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

pričom po dosadení za u'_x, u'_y, v'_x, u'_y máme:

$$z'_x = z'_u \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + z'_v \cdot \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{xz'_u - yz'_v}{x^2+y^2},$$

$$z'_x = z'_u \cdot \frac{y}{x^2+y^2} + z'_v \cdot \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{yz'_u + xz'_v}{x^2+y^2}.$$

(z'_u, z'_v nepoznáme). Po dosadení do rovnice dostaneme:

$$\frac{(x+y)(xz'_u - yz'_v)}{x^2+y^2} - \frac{(x-y)(yz'_u + xz'_v)}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\frac{(x^2+y^2)z'_u - (x^2+y^2)z'_v}{x^2+y^2} = 0,$$

$$z'_u - z'_v = 0.$$

Príklad 6

Rovnicu

$$4xyz''_{xy} - 2yz'_y = 0$$

transformujte do nových premenných $u = \sqrt{xy}$, $v = \sqrt{x/y}$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Vyjadríme najprv prvé derivácie z'_x, z'_y:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_v \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z'_v \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}.$$

Ďalej vyjadríme deriváciu $z''_{xy} = (z'_x)'_y$:

$$z''_{xy} = \left(z'_u \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_v \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \right)'_y =$$

$$= (z'_u)'_y \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \right)'_y + (z'_v)'_y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{xy}} \right)'_y,$$

$$= (z'_u)'_y \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} + (z'_v)'_y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}.$$

Ale $z'_u = z'_u(u(x,y), v(x,y))$ a $z'_v = z'_v(u(x,y), v(x,y))$ sú opäť zložené funkcie, takže pre derivácie $(z'_u)'_y$, $(z'_v)'_y$ platí:

$$(z'_u)'_y = (z'_u)'_u \cdot u'_y + (z'_u)'_v \cdot v'_y = z''_{uu} \cdot u'_y + z''_{uv} \cdot v'_y =$$

$$= z''_{uu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{uv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}},$$

$$(z'_v)'_y = (z'_v)'_u \cdot u'_y + (z'_v)'_v \cdot v'_y = z''_{vu} \cdot u'_y + z''_{vv} \cdot v'_y =$$

$$= z''_{vu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{vv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}.$$

Po dosadení pre z''_{xy} máme:

$$z''_{xy} = \left(z''_{uu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{uv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} +$$

$$+ \left(z''_{vu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{vv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}.$$

Po úpravách dostaneme:

$$z''_{xy} = \frac{1}{4} z''_{uu} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} - z''_{vv} \cdot \frac{1}{4y^2} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}.$$

Dosadíme do pôvodnej rovnice:

$$4xyz''_{xy} - 2yz'_y = 0,$$

$$4xy \left(\frac{1}{4} z''_{uu} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} - z''_{vv} \cdot \frac{1}{4y^2} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}} \right) -$$

$$-2y \left(z'_u \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z'_v \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}} \right) = 0,$$

$$xy \cdot z''_{uu} - \frac{x}{y} \cdot z''_{vv} = 0,$$

$$u^2 \cdot z''_{uu} - v^2 \cdot z''_{vv} = 0.$$

V transformovanej rovnici sa už premenné x, y nemôžu explicitne vyskytovať; v našom prípade sme využili $xy = u^2$ a $x/y = v^2$, podľa zadania. Vo všeobecnom prípade sa staré premenné x, y vyjadria pomocou nových premenných u, v.

Príklad 7

Vyriešte lineárnu parciálnu DR prvého rádu

$$xz'_x + yz'_y = 0$$

tým, že ju transformujete do nových premenných $u = x$, $v = y/x$.

Riešenie:

Z pohľadu premenných x, y je funkcia $z = z(x, y)$ dvoch premenných x, y. Z pohľadu nových premenných u, v je $z = z(u, v)$ opäť funkciou dvoch premenných u, v, avšak v tomto prípade je z zložená funkcia: $z = z(u(x, y), v(x, y))$. Je potrebné vyjadriť parciálne derivácie z'_x, z'_y pomocou parciálnych derivácií z'_u, z'_v, premenné x, y pomocou u, v, a potom tieto vyjadrenia dosadiť do rovnice v zadaní. Tak s chuťou do toho :). Platí $x = u$ a $y = xv = uv$. Ďalej máme:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = z'_u - z'_v \cdot \frac{y}{x^2} = z'_u - z'_v \cdot \frac{v}{u},$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot 0 + z'_v \cdot \frac{1}{x} = z'_v \cdot \frac{1}{u}$$

(za x, y sme dosadili vyjadrenia pomocou premenných u, v). Dosadením do rovnice v zadaní dostaneme:

$$xz'_x + yz'_y = 0,$$

$$u \cdot \left(z'_u - z'_v \cdot \frac{v}{u}\right) + uv \cdot \left(z'_v \cdot \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Po úprave získame rovnicu $u \cdot z'_u = 0$, resp. $z'_u = 0$. Toto je jednoduchá parciálna DR, ktorú vieme poľahky vyriešiť. Z rovnice vyplýva, riešenie $z(u, v)$ nezávisí na premennej u, nakoľko parciálna derivácia z podľa u je všade nulová. Preto z je funkciou iba premennej v a má všeobecný tvar $z = f(v) = f(y/x)$, ak sa vrátime naspäť k premenným x, y. Za f môžeme vziať ľubovoľnú funkciu jednej premenej, ktorá je spojito diferencovateľná podľa svojho argumentu (napr. pre $f(t) = t^2$ máme $z = y^2/x^2$; pre $f(t) = \ln(1 + t)$ máme $z = \ln(1 + (y/x))$, atď.)