Príklady na precvičovanie – parciálne derivácie

Riešené príklady

Príklad 1

Vypočítajme smerovú deriváciu funkcie $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ v bode $A = [1,1]$ v smere vektora $\bar{u} = (1,2)^T$.

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť dvomi spôsobmi – jednak priamo z definície smerovej derivácia, a jednak pomocou gradientu funkcie $f(x,y)$. Smerová derivácia funkcie $f(x,y)$ v bode A v smere vektora $\bar{u}$ je definovaná

$$\frac{\partial f(A)}{\partial\,\bar{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A + t\cdot\bar{u}) - f(A)}{t}.$$

Platí $A + t\cdot\bar{u} = [1,1] + t\cdot(1,2)^T = [1+t, 1+2t]$, kde parameter $t \in \mathbb{R}$. Po dosadení postupne dostaneme

$$\frac{\partial f(A)}{\partial\,\bar{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, 1+2t) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2 + 3\cdot(1+t)\cdot(1+2t) + (1+2t)^2 - 5}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{11t^2 + 15t}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} (11t + 15) = 15.$$

Na druhej strane, gradient funkcie $f(x,y)$ má v ľubovoľnom bode $[x,y]$ tvar

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^T = (2x+3y,\, 3x+2y)^T.$$

Nakoľko $\operatorname{grad} f(A) = (5,5)^T$, pre hľadanú smerovú deriváciu potom platí

$$\frac{\partial f(A)}{\partial\,\bar{u}} = \operatorname{grad} f(A)\cdot\bar{u} = (5,5)\cdot(1,2)^T = 5\cdot 1 + 5\cdot 2 = 15 \quad :).$$

Je potrebné poznamenať, že v tomto prípade je výpočet smerovej derivácie pomocou gradientu možný, keďže funkcia $f(x,y)$ má spojité parciálne derivácie prvého rádu v bode A (samy overte :)).

Príklad 2
Stanovme smerovú deriváciu funkcie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^4}{x^2+y^2}, & [x,y]\neq[0,0],\\ \\ 0, & [x,y]\neq[0,0],\end{cases}$$

v bode $A=[0,0]$ v smere vektora $\bar{u}=(3,1)^T$.

Riešenie:
V tomto prípade podľa definície smerovej derivácie máme

$$f_{\bar{u}}(A)=\lim_{t\to 0}\frac{f(A+t\cdot\bar{u})-f(A)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3t,t)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{(3t)^3-t^4}{(3t)^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{27t^3-t^4}{10t^3}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{27}{10}-\frac{t}{10}\right)=\frac{27}{10}$$

(samy overte jednotlivé výpočty ;)). Skúsme teraz aplikovať výpočet smerovej derivácie pomocou gradientu $\operatorname{grad} f(A)$. Zo zadania funkcie $f(x,y)$ musíme parciálne derivácie $f_x(A)$ a $f_y(A)$ vypočítať priamo podľa definície, konkrétne

$$f_x(A)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3-0}{x^2+0}-0}{x}=\lim_{x\to 0}1=1,$$

$$f_y(A)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0-y^4}{0+y^2}-0}{y}=\lim_{y\to 0}(-y)=0$$

(samy si premyslite :)). Teda $\operatorname{grad} f(A)=(1,0)^T$, a následne

$$\operatorname{grad} f(A)\cdot\bar{u}=(1,0)\cdot(3,1)^T=3\ \ldots\ ???\ \ :-//$$

Vidíme, že výpočet pomocou gradientu nám dáva nesprávny výsledok. Príčinou tohto pozorovania je fakt, že ani jedna z parciálnych derivácií $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ nie je spojitá v bode A. Skutočne, pre bod $[x,y]\neq[0,0]$ platí

$$f_x(x,y)=\left(\frac{x^3-y^4}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \left(\frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2}\right)'_y = -\frac{2y^5 + 4x^2y^3 + 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

(samy overte :)). Avšak limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$$

neexistujú, ako sa možno ľahko presvedčiť (napríklad pomocou polárnych súradníc ;)). Preto funkcie $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ nie sú spojité v bode $A = [0,0]$.

Príklad 3

Vypočítajme z'_x, z'_y pre $z = \ln(u^2 + v^2)$, kde $u = y\cos x$ a $v = x\sin y$.

Riešenie:

Zrejme z je zložená funkcia – $z = z(u(x,y), v(x,y))$. Platí teda

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y.$$

Postupne dostaneme

$$z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot (-y\sin x) + \frac{2v}{u^2+v^2} \cdot \sin y = \frac{2v\sin y - 2uy\sin x}{u^2+v^2},$$

$$z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot \cos x + \frac{2v}{u^2+v^2} \cdot x\cos y = \frac{2u\cos x + 2vx\cos y}{u^2+v^2}$$

(samy overte jednotlivé výpočty :)).

Príklad 4

Vypočítajme u'_x, u'_y, u'_z pre $u = \ln(r^2 + v + s^2)$, kde $r = 2^{x+y^2+z}$, $v = x^2yz$ a $s = \sin(x+y+z)$.

Riešenie:

Funkcia u je zložená, konkrétne $u = u(r(x,y,z), v(x,y,z), s(x,y,z))$. Platí

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_v \cdot v'_x + u'_s \cdot s'_x,$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_v \cdot v'_y + u'_s \cdot s'_y,$$

$$u'_z = u'_r \cdot r'_z + u'_v \cdot v'_z + u'_s \cdot s'_z.$$

Následne postupne máme (samy overte výpočty ;))

$$u'_x = \frac{2r}{r^2+v+s^2} \cdot 2^{x+y^2+z} \ln 2 + \frac{1}{r^2+v+s^2} \cdot 2xyz + \frac{2s}{r^2+v+s^2} \cdot \cos(x+y+z),$$

$$u'_y = \frac{2r}{r^2+v+s^2} \cdot 2^{x+y^2+z} \ln 2 \cdot (2y) + \frac{1}{r^2+v+s^2} \cdot x^2 z + \frac{2s}{r^2+v+s^2} \cdot \cos(x+y+z),$$

$$u'_z = \frac{2r}{r^2+v+s^2} \cdot 2^{x+y^2+z} \ln 2 + \frac{1}{r^2+v+s^2} \cdot x^2 y + \frac{2s}{r^2+v+s^2} \cdot \cos(x+y+z).$$

Príklad 5

Ukážme, že funkcia $u = \frac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, je riešením lineárnej parciálnej diferenciálnej druhého rádu

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

Riešenie:

Potrebujeme vypočítať parciálne derivácie u''_{xx}, u''_{yy} a u''_{zz} zloženej funkcie $u = u(r(x,y,z))$. Platí

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r}} = -\frac{x}{r^3},$$

$$u''_{xx} = \left(-\frac{x}{r^3}\right)'_x = (-1) \cdot \frac{1}{r^3} - x \cdot \left(\frac{1}{r^3}\right)'_x = -\frac{1}{r^3} - x \cdot \left(\frac{1}{r^3}\right)'_r \cdot r'_x$$

$$= -\frac{1}{r^3} - x \cdot \left(\frac{-3}{r^4}\right) \cdot \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r}} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

(samy si dobre premyslite :)). Keďže premenné x, y, z vystupujú vo funkcii u symetricky, rovnako platí

$$u''_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad u''_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

(i toto si samy dobre premyslite ;)). Napokon máme

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3 \cdot \overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}^{r^2}}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

Funkcia u je teda riešením rovnice v zadaní príkladu. Poznamenajme, že túto úlohu sme mohli riešiť aj tak, že by sme vo výraze $u = \frac{1}{r}$ hneď dosadili za $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, t.j.,

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

a priamo by sme počítali parciálne derivácie u''_{xx}, u''_{yy} a u''_{zz}. Dostali by sme samozrejme ten istý výsledok :).

Príklad 6

Parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$(x + y)z'_x - (x - y)z'_y = 0$$

transformujme do nových premenných $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Riešenie:

V predloženej rovnici máme výrazy z'_x, z'_y vyjadriť pomocou výrazov z'_u, z'_v. Treba si uvedomiť, že neznáma funkcia z je jednak „priamou“ funkciou premenných x a y (z pohľadu pôvodnej rovnice), a jednak zloženou funkciou $z = z(u(x, y), v(x, y))$ (z pohľadu transformácie). Preto platí

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \quad \text{a} \quad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

(samy si pozorne premyslite ;)). Na základe predpísanej transformácie máme

$$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad v'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad v'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(samy overte :)). Pre parciálne derivácie z'_x a z'_y potom dostávame vyjadrenia

$$z'_x = z'_u \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + z'_v \cdot \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{xz'_u - yz'_v}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = z'_u \cdot \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + z'_v \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{yz'_u + xz'_v}{x^2+y^2}$$

(parciálne derivácie z'_u a z'_v nepoznáme). Dosadení do rovnice v zadaní príkladu postupne máme

$$(x+y) \cdot \frac{xz'_u - yz'_v}{x^2+y^2} - (x-y) \cdot \frac{yz'_u + xz'_v}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x^2+y^2) \cdot z'_u - (x^2+y^2) \cdot z'_v}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z'_u - z'_v = 0.$$

Posledná rovnica predstavuje hľadanú transformáciu pôvodnej rovnice v zadaní príkladu do nových premenných u, v :).

Príklad 7

Lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$4xyz''_{xy} - 2yz'_y = 0$$

transformujme do nových premenných $u = \sqrt{xy}$ a $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Vyjadríme najprv prvé parciálne derivácie z'_x a z'_y

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_v \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z'_v \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}$$

(samy overte :)). Ďalej vyjadríme druhú parciálnu deriváciu $z''_{xy} = (z'_x)'_y$

$$z''_{xy} = \left(z'_u \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_v \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}\right)'_y$$

$$= (z'_u)'_y \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)'_y + (z'_v)'_y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}\right)'_y$$

$$= (z'_u)'_y \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} + (z'_v)'_y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}.$$

Ale $z'_u = z'_u(u(x,y), v(x,y))$ a $z'_v = z'_v(u(x,y), v(x,y))$ sú opäť zložené funkcie, takže pre parciálne derivácie $(z'_u)'_y$ a $(z'_v)'_y$ analogicky platí

$$(z'_u)'_y = (z'_u)'_u \cdot u'_y + (z'_u)'_v \cdot v'_y = z''_{uu} \cdot u'_y + z''_{uv} \cdot v'_y = z''_{uu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{uv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}},$$

$$(z'_v)'_y = (z'_v)'_u \cdot u'_y + (z'_v)'_v \cdot v'_y = z''_{vu} \cdot u'_y + z''_{vv} \cdot v'_y = z''_{vu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{vv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}$$

(samy si pozorne premyslite ;)). Dosadením do vyjadrenia pre z''_{xy} máme

$$z''_{xy} = \left(z''_{uu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{uv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

$$+ \left(z''_{vu} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z''_{vv} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}.$$

Po elementárnych úpravách dostaneme

$$z''_{xy} = \frac{1}{4}\, z''_{uu} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} - z''_{vv} \cdot \frac{1}{4y^2} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}$$

(samy overte :)). Pôvodná rovnica v zadaní príkladu bude mať preto tvar

$$4xyz''_{xy} - 2yz'_y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4xy\left(\frac{1}{4}\, z''_{uu} + z'_u \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} - z''_{vv} \cdot \frac{1}{4y^2} - z'_v \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy^3}}\right) - 2y\left(z'_u \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - z'_v \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$xy \cdot z''_{uu} - \frac{x}{y} \cdot z''_{vv} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u^2 \cdot z''_{uu} - v^2 \cdot z''_{vv} = 0 \quad :).$$

V novej transformovanej rovnici sa už premenné x, y nemôžu explicitne vyskytovať. V našom prípade sme využili rovnosti $xy = u^2$ a $\frac{x}{y} = v^2$ predpísané v zadaní príkladu. Vo všeobecnosti je nutné pôvodné premenné x, y vyjadriť pomocou nových premenných u, v.

Príklad 8

Vyriešme lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$xz'_x + yz'_y = 0$$

tak, že ju transformujeme do nových premenných $u = x$ a $v = \frac{y}{x}$.

Riešenie:

Najprv príslušnú rovnicu transformujeme do nových premenných u, v. Je potrebné vyjadriť prvé parciálne derivácie z'_x, z'_y pomocou parciálnych derivácií

z'_u, z'_v, premenné x, y vyjadriť pomocou u, v, a následne tieto vyjadrenia dosadiť do rovnice v zadaní príkladu. Tak s chuťou do toho :). Platí $x = u$ a $y = xv = uv$ (samy overte :)). Ďalej máme

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = z'_u - z'_v \cdot \frac{v}{u},$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot 0 + z'_v \cdot \frac{1}{x} = z'_v \cdot \frac{1}{u}$$

(za x, y sme dosadili vyjadrenia pomocou premenných u, v :)). Rovnice v zadaní príkladu potom nadobudne tvar

$$xz'_x + yz'_y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u \cdot \left(z'_u - z'_v \cdot \frac{v}{u}\right) + uv \cdot \left(z'_v \cdot \frac{1}{u}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u \cdot z'_u = 0 \quad \Longrightarrow \quad z'_u = 0 \quad :).$$

Posledná rovnica je jednoduchá parciálna diferenciálna rovnica, ktorú vieme ľahko vyriešiť. Z nej vyplýva, že hľadané riešenie z nezávisí na premennej u, keďže prvá parciálna derivácia z'_u je všade nulová (samy si dobre premyslite ;)). Preto z je funkciou iba premennej v a má všeobecný tvar $z = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, kde f je ľubovoľná funkcia jednej premenej, ktorá je spojito diferencovateľná podľa svojho argumentu. Napríklad voľbou $f(t) = t^2$ máme riešenie $z = \frac{y^2}{x^2}$, kým pre $f(t) = \ln(1 + t)$ získame riešenie $z = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$:).