Príklady na precvičovanie – funkcia určená implicitne

Intuitívna predstava funkcie jednej premennej určenej implicitne je nasledovná. Máme rovnicu:

$$F(x, y) = 0,$$

a bod $A = [x_0, y_0]$ taký, že $F(x_0, y_0) = 0$. Zoberme si nejaké okolie bodu x_0 a postupne dosadzujme do danej rovnice za x body z tohto okolia. Ak za x zvolíme nejaké konkrétne číslo, tak uvedená rovnica sa stane rovnicou s jednou neznámou y – cítime preto, že y bude nejako určené výberom konkrétneho x tak, aby platila uvedená rovnica (pre rôzne x môžeme vo všeobecnosti očakávať rôzne y). Ak platí, že pre *každé* x z nejakého okolia bodu x_0 existuje *práve jedno* y také, že

$$F(x, y) = 0,$$

potom hovoríme, že rovnicou $F(x, y) = 0$ a bodom $A = [x_0, y_0]$ je určená implicitne funkcia $y = y(x)$. Táto funkcia je reprezentovaná priradením „ku každému x existuje práve jedno y“. Jej definičný obor dané okolie bodu x_0.

Podobne možno uvažovať i funkciu dvoch (viac) premenných určenú implicitne. Opäť máme nejakú rovnicu tvaru

$$F(x, y, z) = 0$$

a bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ taký, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Potom ak konkrétne zvolíme x, y, premenná z už bude istým spôsobom určená – ako riešenie rovnice $F(x, y, z) = 0$ so známymi x, y. Preto ak platí, že pre *každú* dvojicu (x, y) z nejakého okolia bodu $[x_0, y_0]$ existuje *práve jedno* z také, že

$$F(x, y, z) = 0,$$

potom hovoríme, že rovnicou $F(x, y, z) = 0$ a bodom $A = [x_0, y_0, z_0]$ je určená implicitne funkcia dvoch premenných $z = z(x, y)$.

Dosť často sa pracuje so spojitými, resp. so spojito diferencovateľnými implicitnými funkciami. Postačujúce podmienky pre existenciu práve jednej spojito diferencovateľnej implicitnej funkcie sú nasledovné.

- pre funkciu jednej premennej:
  - $F(x, y)$ je spojitá na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$,
  - $F(A) = 0$,

– $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ sú spojité na okolí bodu A a $F'_y(A) \neq 0$.

- pre funkciu dvoch premennej:
  – $F(x,y,z)$ je spojitá na okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$,
  – $F(A) = 0$,
  – $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ sú spojité na okolí bodu A a $F'_z(A) \neq 0$.

Riešené príklady

Príklad 1

Overte, že rovnicou $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ a bodom $A = [3,3]$ je implicitne určená práve jedna spojito diferencovateľná funkcia $y = y(x)$ a nájdite jej prvú a druhú deriváciu v bode $x_0 = 3$.

Riešenie:

V našom prípade funkcia $F(x,y)$ je:

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy.$$

Funkcia F je iste spojitá na celom $\mathbb{R}$, pričom $F(3,3) = 0$. Ďalej parciálne derivácie $F'_y = 3y^2 - 6x$ a $F'_x = 3x^2 - 6y$ sú spojité na okolí bodu A a platí $F'_y(3,3) = 9 \neq 0$. Preto podľa úvodnej poznámky existuje na istom okolí bodu $x_0 = 3$ práve jedna spojito diferencovateľná funkcia $y = y(x)$ spĺňajúca:

$$x^3 + (y(x))^3 - 6xy(x) = 0, \quad y(3) = 3.$$

Jej prvú deriváciu y' zistíme tak, že rovnicu v zadaní derivujeme podľa premennej x, pričom berieme do úvahy, že $y = y(x)$ je funkciou premennej x:

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0 \quad / \,\mathrm{d}/\mathrm{d}x,$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0.$$

Z tejto rovnice vyjadríme y':

$$3x^2 - 6y + (3y^2 - 6x)y' = 0,$$

$$y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}.$$

Pre $y'(3)$ platí:

$$y'(3) = \frac{6y(3) - 3 \cdot 3^2}{3(y(3))^2 - 6 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3} = -1.$$

Podobne druhú deriváciu y'' dostameme tak, že buď opäť zderivujeme rovnicu

$$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$$

podľa x a následne vyjadríme y'' alebo priamo zderivujeme odvodený výraz pre y'. V oboch prípadoch dostaneme:

$$y'' = \frac{6y' - 6x - y'(6yy' - 6)}{3y^2 - 6x}.$$

V bode $x_0 = 3$ platí (využijeme zistenie, že $y'(3) = -1$):

$$y''(3) = -\frac{16}{3}.$$

Príklad 2

Nájdite všetky prvé parciálne derivácie funkcie $z = z(x, y)$ určenej implicitne rovnicou

$$\mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$$

a bodom $A = [1, -6, 0]$.

Riešenie:

Predpokladáme, že taká funkcia $z = z(x, y)$ jednoznačne existuje (overte si to :)). Parciálne derivácie z'_x, z'_y nájdeme derivovaním danej rovnice podľa x, resp. podľa y (nesmieme zabudnúť, že $z = z(x, y)$, a preto rovnicu derivujeme podľa jednotlivých premenných *parciálne*):

$$\mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0 \quad / \partial/\partial x,$$

$$\mathrm{e}^z z'_x + 2xy + z'_x = 0,$$

$$z'_x = -\frac{2xy}{\mathrm{e}^z + 1}.$$

Podobne:

$$\mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0 \quad / \partial/\partial y,$$

$$\mathrm{e}^z z'_y + x^2 + z'_y = 0,$$

$$z'_y = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^z + 1}.$$

Poznamenajme, že odvodené výrazy pre z'_x a z'_y platia len na nejakom malom okolí bodu $[1, -6]$.

Príklad 3

Nájdite $\mathrm{d}z(1,1)$, kde funkcia $z = z(x, y)$ je určená implicitne rovnicou

$$x^5 + y^5 + z^5 - x - y - z = 0$$

a bodom $A = [1, 1, 1]$.

Riešenie:

Potrebujeme zistiť $z'_x(1,1)$, $z'_y(1,1)$. Poznamenajme, že nakoľko funkcia $z = z(x, y)$ je určená implicitne rovnicou a bodom A v zadaní, platí $z(1,1) = 1$. Postupujeme ako v predchádzajúcom príklade – rovnicu parciálne derivujeme podľa x, resp. podľa y:

$$x^5 + y^5 + z^5 - x - y - z = 0 \quad / \partial/\partial x,$$

$$5x^4 + 5z^4 z'_x - 1 - z'_x = 0,$$

$$z'_x = \frac{1 - 5x^4}{5z^4 - 1},$$

$$z'_x(1,1) = \frac{1-5}{5-1} = -1.$$

Podobne:

$$x^5 + y^5 + z^5 - x - y - z = 0 \quad / \partial/\partial y,$$

$$5y^4 + 5z^4 z'_y - 1 - z'_y = 0,$$

$$z'_y = \frac{1 - 5y^4}{5z^4 - 1},$$

$$z'_y(1,1) = \frac{1-5}{5-1} = -1.$$

Teda prvý diferenciál funkcie z v bode $[1, 1]$ bude:

$$\mathrm{d}z(1,1) = z'_x(1,1)(x-1) + z'_y(1,1)(y-1) = -x - y + 2.$$

Príklad 4
Nájdite rovnicu dotyčnice a normály v bode A ku grafu funkcie $y = y(x)$ určenej implicitne rovnicou

$$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$$

a bodom $A = [1, 2]$.

Riešenie:
Keďže poznáme bod $A = [1, 2]$, ktorým daná dotyčnica prechádza, stačí nájsť jej smernicu, t.j. $y'(1)$. Platí:

$$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0 \quad / \, \mathrm{d}/\mathrm{d}x,$$

$$4y^3y' - 16x^3 - 6y - 6xy' = 0,$$

$$y' = \frac{16x^3 + 6y}{4y^3 - 6x},$$

$$y'(1) = \frac{28}{26} = \frac{14}{13}.$$

Pri dosadzovaní sme využili $y(1) = 2$. Potom smernicový tvar rovnice dotyčnice je:

$$\frac{y-2}{x-1} = y'(1) = \frac{14}{13} \quad \Longrightarrow \quad 14x - 13y + 12 = 0.$$

Rovnica normály má tvar:

$$\frac{y-2}{x-1} = -\frac{1}{y'(1)} = \frac{-13}{14} \quad \Longrightarrow \quad 13x + 14y - 41 = 0.$$

Príklad 5
Určte lokálne extrémy funkcií $z = z(x, y)$ určených implicitne rovnicou:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 10 = 0.$$

Riešenie:
Nájdeme stacionárne body daných funkcií z (zámerne píšeme množné číslo,

pretože, ako uvidíme, daných funkcií bude viac; k rovnici totiž nie je zadaný bod, ktorý by hľadanú implicitnú funkciu bližšie určoval). Prvé parciálne derivácie budú (nájdeme ich podobne ako v predchádzajúcich príkladoch):

$$z'_x = \frac{-2-2x}{2z-4}, \quad z'_y = \frac{2-2y}{2z-4}.$$

Ľahko vidíme, že obe derivácie sa nulujú práve vtedy, keď $x = -1$ a $y = 1$. Dosadením do pôvodnej rovnice v zadaní potom máme:

$$z^2 - 4z - 12 = 0.$$

Teda $z = -2$ alebo $z = 6$. Máme teda *jeden* bod $[x, y] = [-1, 1]$, ktorý je stacionárnym bodom pre *dve* funkcie $z_1 = z_1(x, y)$ a $z_2 = z_2(x, y)$ určené implicitne rovnicou v zadaní a bodmi $A_1 = [-1, 1, -2]$ a $A_2 = [-1, 1, 6]$. Dobre si to premyslite. Je potrebné si uvedomiť, že každý z bodov A_1 a A_2 skutočne určuje inú implicitnú funkciu, nejedná sa o tú istú funkciu. Vidno to z toho, že funkcia $z_1(-1, 1) = -2$ a funkcia $z_2(-1, 1) = 6$. Funkcie z_1 a z_2 majú teda v tom istom bode $[-1, 1]$ rôzne hodnoty. Vyšetrime charakter teraz stacionárneho bodu $[-1, 1]$ funkcií z_1, z_2. Potrebujeme zistiť druhé parciálne derivácie funkcií z_1, z_2 v bode $[-1, 1]$. Preto parciálne derivujeme výrazy pre z'_x, z'_y podľa premenných x, y:

$$z''_{xx} = \frac{4(x+1)z'_x - 4(z-2)}{(2z-4)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{4(x+1)z'_y}{(2z-4)^2} = \frac{4(y-1)z'_x}{(2z-4)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{4(y-1)z'_y - 4(z-2)}{(2z-4)^2}.$$

V prípade funkcie z_1 máme (pri výpočte využijeme, že $z'_{1_x}(-1, 1) = 0$ a $z'_{1_y}(-1, 1) = 0$):

$$z''_{1_{xx}}(-1, 1) = \frac{1}{4}, \quad z''_{1_{xy}}(-1, 1) = 0, \quad z''_{1_{yy}}(-1, 1) = \frac{1}{4}.$$

Príslušná Hessova matica má teda tvar:

$$H_1(-1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} > 0$$

Je pozitívne definitná, a preto funkcia z_1 má v bode $[-1,1]$ ostré lokálne minimum s hodnotou $z_1(-1,1) = -2$. Podobne v prípade funkcie z_2 dostaneme(pri výpočte opäť využijeme, že $z'_{2_x}(-1,1) = 0$ a $z'_{2_y}(-1,1) = 0$):

$$z''_{2_{xx}}(-1,1) = -\frac{1}{4}, \quad z''_{2_{xy}}(-1,1) = 0, \quad z''_{2_{yy}}(-1,1) = -\frac{1}{4}.$$

Príslušný hessián má tvar:

$$H_2(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} < 0$$

Je negatívne definitný, a teda funkcia z_2 má v bode $[-1,1]$ ostré lokálne maximum s hodnotou $z_2(-1,1) = 6$.

Príklad 6

Určte všetky prvé parciálne derivácie funkcie $z = z(x,y)$ určenej implicitne rovnicou

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = a,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Riešenie:

Hľadaná funkcia $z = z(x,y)$ je funkciou dvoch premenných x, y. Chceme nájsť jej prvé parciálne derivácie, takže danú rovnicu derivujeme postupne podľa premenných x, y:

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = a \quad / \partial/\partial x,$$

$$\cos y - y(\sin z)\cdot z'_x + z'_x\cos x - z\sin x = 0,$$

$$z'_x(\cos x - y\sin z) = z\sin x - \cos y,$$

$$z'_x = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}.$$

Podobne podľa premennej y:

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = a \quad / \partial/\partial y,$$

$$-x\sin y + \cos z - y(\sin z)\cdot z'_y + z'_x\cos x = 0,$$

$$z'_y(\cos x - y\sin z) = x\sin y - \cos z,$$

$$z'_y = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$$

Príklad 7
Nájdite body na krivke s rovnicou

$$x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0,$$

v ktorých nie sú splnené predpoklady vety o existencii implicitnej funkcie $y = y(x)$.

Riešenie:
Nakoľko funkcia $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 8$ je spojitá a má spojité parciálne derivácie na celom svojom definičnom obore, jediný predpoklad, ktorý môže byť porušený, je nenulovosť F'_y. Preto hľadajme body $[x, y]$, ktoré vyhovujú danej rovnici a zároveň nulujú parciálnu deriváciu F'_y:

$$F'_y = 2x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x.$$

Dosadení $y = x$ do rovnice v zadaní dostaneme:

$$x^2 + 2x^2 - x^2 - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2.$$

Hľadané body sú preto $[2, 2]$ a $[-2, -2]$.

Príklad 8
Určte rovnicu dotykovej roviny a normály k ploche s rovnicou

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$$

v bode $A = \left[2, \frac{4}{3}, -1\right]$.

Riešenie:
Jedná sa o funkciu $z = f(x, y)$ dvoch premenných x, y, ktorá je implicitne určená rovnicou a bodom A v zadaní. Chceme nájsť rovnicu dotykovej roviny a normály k jej grafu v bode $A = [2, 4/3, -1]$. K tomu potrebujeme určiť prvý diferenciál funkcie f v bode $[2, 4/3]$ (je potrebné si uvedomiť, že $z = -1$ je hodnota funkcie f v bode $[2, 4/3]$), a teda prvé parciálne derivácie $f'_x = z'_x$

a $f'_y = z'_y$ v bode $[2, 4/3]$. Derivujeme preto rovnicu v zadaní (nezabudnime, že $z = f(x, y)$ je chápaná ako funkcia premenných x, y):

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0 \quad / \partial/\partial x,$$

$$x + 4z \cdot z'_x = 0,$$

$$z'_x = -\frac{x}{4z} \quad \Longrightarrow \quad z'_x\left(2, \frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{4z\left(2, \frac{4}{3}\right)} = -\frac{2}{4 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Podobne:

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0 \quad / \partial/\partial y,$$

$$-3 + 4z \cdot z'_y = 0,$$

$$z'_y = \frac{3}{4z} \quad \Longrightarrow \quad z'_y\left(2, \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4z\left(2, \frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{4 \cdot (-1)} = -\frac{3}{4}.$$

Pre prvý diferenciál $\mathrm{d}f(2, 4/3)$ máme:

$$\mathrm{d}f(2, 4/3) = z'_x\left(2, \frac{4}{3}\right)(x - 2) + z'_y\left(2, \frac{4}{3}\right)\left(y - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x - 2) - \frac{3}{4} \cdot \left(y - \frac{4}{3}\right) = \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}.$$

Rovnica dotykovej roviny má potom tvar:

$$z - f(2, 4/3) = \mathrm{d}f(2, 4/3).$$

Avšak $f(2, 4/3) = -1$, preto po dosadení dostaneme:

$$z + 1 = \frac{x}{2} - \frac{3y}{4} \quad \Longrightarrow \quad 2x - 3y - 4z - 4 = 0.$$

Normálový vektor tejto roviny je $(2, -3, -4)$, preto parametrické vyjadrenie normály platí:

$$x = 2 + 2t, \quad y = \frac{4}{3} - 3t, \quad z = -1 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Príklad 9
Určte lokálne extrémy funkcie $z = z(x, y)$ určenej implicitne rovnicou

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Riešenie:
Bavíme sa o funkcii $y = y(x)$ jednej premennej x, ktorá je implicitne daná uvedenou rovnicou. Jej lokálne extrémy sa budú nadobúdať v jej stacionárnych bodoch. Preto nájdime deriváciu y' a zistime, kedy bude nulová:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0 \quad / \mathrm{d}/\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0 \quad / \mathrm{d}/\mathrm{d}x,$$

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0,$$

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} - \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$x + yy' - y'x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Nulovú hodnotu nadobúda y' práve vtedy, keď $y = -x$. Po dosadení do pôvodnej rovnice zistíme hodnotu x, a následne i hodnotu y:

$$\ln \sqrt{x^2 + x^2} - \operatorname{arctg} \frac{-x}{x} = 0,$$

$$\ln \sqrt{2x^2} - \operatorname{arctg}(-1) = 0,$$

$$\ln(\sqrt{2}|x|) = -\frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad |x| = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Máme teda dva stacionárne body ležiace na krivke v zadaní:

$$\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right], \quad \left[-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right].$$

Presvedčte sa (pomocou postačujúcich podmienok pre existenciu implicitnej funkcie), že každým z týchto bodov je určená *jediná* implicitná funkcia.

To, či obidva body určujú *tú istú* funkciu alebo každý bod určuje *inú* funkciu, v tomto momente nie je dôležité (prečo? :)). Pripomímane, ako správne interpretovať to, čo sme práve dostali. Zistili sme, že v bode

$$x_1 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

má istá jediná implicitná funkcia $y = f(x)$ stacionárny bod a platí

$$f(x_1) = f\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = y_1.$$

Ďalej sme zistili, že v bode

$$x_2 = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

má istá jediná implicitná funkcia $y = g(x)$ stacionárny bod a platí

$$g(x_2) = g\left(-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = y_2.$$

Charakter týchto stacionárnych bodov vyšetríme pomocou druhej derivácie y''. Platí:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad / \,\mathrm{d}/\mathrm{d}x,$$

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2}.$$

Zaujíma nás $y''(x_1)$ a $y''(x_2)$. Avšak body x_1 a x_2 sú obidva stacionárnymi bodmi implicitných funkcií, takže $y'(x_1) = 0 = y'(x_2)$. Preto platí:

$$y''(x_1) = \frac{x_1 - y_1 - (x_1 + y_1)}{(x_1 - y_1)^2} = \frac{-2y_1}{(x_1 - y_1)^2},$$

$$y''(x_2) = \frac{x_2 - y_2 - (x_2 + y_2)}{(x_2 - y_2)^2} = \frac{-2y_2}{(x_2 - y_2)^2}.$$

A teraz pozor – nás zaujíma len *znamienka* $y''(x_1)$ a $y''(x_2)$, preto nemusíme vyčísľovať celé druhé derivácie. Vidíme, že znamienka y'' v bodoch x_1 a x_2 budú práve opačné ako znamienka y_1 a y_2. Nakoľko $y_1 < 0$ a $y_2 > 0$, platí:

$$y''(x_1) > 0, \quad y''(x_2) < 0.$$

Preto v bode x_1 nastáva lokálne minimum s hodnotou y_1 a v bode x_2 nastáva lokálne maximum s hodnotou y_2).

Všimnime si, že uvedený výsledok vôbec nezávisí od toho, či implicitné funkcie f a g, určené bodmi $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, sú tie isté alebo rôzne. Jednoducho funkcia určená bodom $[x_1, y_1]$ má v x_1 lokálne minimum s hodnotou y_1 a funkcia určená bodom $[x_2, y_2]$ má v x_2 lokálne maximum s hodnotou y_2.

Príklad 10

Rozhodnite, či má funkcia určená implicitne rovnicou

$$z^2 - xy + \ln(x + y + z) = 0$$

lokálny extrém v bode $A = [1, 1, -1]$.

Riešenie:

Jedná sa o implicitnú funkciu dvoch premenných $z = z(x, y)$. Stačí nám zistiť prvé a druhé parciálne derivácie $z(x, y)$ podľa premenných x, y. Postupne dostaneme (detailné výpočty pre jednoduchosť opomenieme, je to mechanická záležitosť :)):

$$z'_x = \frac{y(x + y + z) - 1}{1 + 2z(x + y + z)}, \quad z'_y = \frac{x(x + y + z) - 1}{1 + 2z(x + y + z)}.$$

Po dosadení $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$ zistíme, že $z'_x(1, 1) = 0 = z'_y(1, 1)$, teda $[1, 1]$ je stacionárny bod funkcie $z = z(x, y)$ (platí $z(1, 1) = -1$). Pomocou práve odvodených výrazov pre z'_x a z'_y vypočítame druhé parciálne derivácie funkcie $z(x, y)$ (dobré cvičenie na koncentráciu pri parciálnom derivovaní ;)):

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(\frac{y(x + y + z) - 1}{1 + 2z(x + y + z)}\right)'_x =$$

$$= \frac{y(1 + z'_x)}{1 + 2z(x + y + z)} - \frac{2[y(x + y + z) - 1] \cdot [z + z'_x(x + y + 2z)]}{[1 + 2z(x + y + z)]^2},$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(\frac{x(x + y + z) - 1}{1 + 2z(x + y + z)}\right)'_y =$$

$$= \frac{x(1 + z'_y)}{1 + 2z(x + y + z)} - \frac{2[x(x + y + z) - 1] \cdot [z + z'_y(x + y + 2z)]}{[1 + 2z(x + y + z)]^2},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y(x+y+z)-1}{1+2z(x+y+z)} \right)'_y =$$

$$= \frac{x+y+z+y(1+z'_y)}{1+2z(x+y+z)} - \frac{2[y(x+y+z)-1]\cdot[z+z'_y(x+y+2z)]}{[1+2z(x+y+z)]^2}.$$

Dosadením $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$ a využitím toho, že $z'_x(1,1) = z'_y(1,1) = 0$, dostaneme:

$$z''_{xx}(1,1) = -1, \quad z''_{yy}(1,1) = -1, \quad z''_{xy}(1,1) = -2.$$

Príslušná Hessova matica $H(1,1)$ má tvar:

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} z''_{xx}(1,1) & z''_{xy}(1,1) \\ z''_{yx}(1,1) & z''_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ indefinitná.}$$

Preto v bode $[1,1]$ nemá funkcia $z = z(x,y)$ lokálny extrém.

Príklad 11

Rozhodnite, či plocha s rovnicou

$$x + y^2 + z^3 + z = 4$$

leží v okolí bodu $A = [1,1,1]$ nad alebo pod dotykovou rovinou.

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy využijeme nasledovné pozorovanie. Ak je plocha v okolí svojho bodu A pod dotykovou rovinou zostrojenou v A, tak je plocha *konkávna* na danom okolí bodu A. Naopak, ak leží nad dotykovou rovinou, tak je *konvexná* na danom okolí bodu A. Je to podobné ako pri funkciách jednej premennej. Tam sa hráme, či sa graf funkcie nachádza nad dotyčnicou alebo pod dotyčnicou. Spomeňme si, že v tomto prípade o konvexnosti, resp. konkávnosti rozhodovala druhá derivácia funkcie. Nuž a v prípade funkcií viac premenných budú o konvexnosti, resp, konkávnosti plochy (t.j. grafu funkcie $z(x,y)$) rozhodovať druhé parciálne derivácie, konkrétne nič iné ako Hessova matica $H(x,y)$. Ak $H(x,y)$ bude pozitívne definitná („kladná“), potom bude plocha konvexná na okolí bodu A a bude ležať nad dotykovou rovinou. Ak $H(x,y)$ bude negatívne definitná („záporná“), bude plocha konkávna na okolí bodu A a bude ležať pod dotykovou rovinou. Korektný dôkaz týchto úvah je možné vykonať napr. pomocou Taylorovej vety.

Takže je treba vypočítať druhé parciálne derivácie implicitnej funkcie $z = z(x,y)$ v bode $[1,1]$ (platí $z(1,1) = 1$). Postupne dostaneme:

$$x + y^2 + z^3 + z = 0 \quad / \partial/\partial x,$$

$$1 + 3z^2 z'_x + z'_x = 0,$$

$$z'_x = -\frac{1}{3z^2+1} \quad \Longrightarrow \quad z'_x(1,1) = -\frac{1}{4}.$$

$$x + y^2 + z^3 + z = 0 \quad / \partial/\partial y,$$

$$2y + 3z^2 z'_y + z'_y = 0,$$

$$z'_y = -\frac{2y}{3z^2+1} \quad \Longrightarrow \quad z'_y(1,1) = -\frac{1}{2}.$$

Pre druhé parciálne derivácie dostaneme:

$$z'_{xx} = (z'_x)'_x = \left(-\frac{1}{3z^2+1}\right)'_x = \frac{6zz'_x}{(3z^2+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad z''_{xx}(1,1) = -\frac{3}{32}.$$

$$z'_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-\frac{2y}{3z^2+1}\right)'_y = \frac{12yzz'_y - 2(3z^2+1))}{(3z^2+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad z'_{yy}(1,1) = -\frac{7}{8}.$$

$$z'_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{1}{3z^2+1}\right)'_y = \frac{6zz'_y}{(3z^2+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad z'_{xy}(1,1) = -\frac{3}{16}.$$

Hessova matica $H(1,1)$ má potom tvar:

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} z''_{xx}(1,1) & z''_{xy}(1,1) \\ z''_{yx}(1,1) & z''_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix} < 0.$$

Matica $H(1,1)$ je negatívne definitná, a preto podľa úvodnej diskusie je plocha v okolí bodu A konkávna, t.j. leží pod dotykovou rovinou.

Príklad 12

K elipsoidu s rovnicou

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

určte všetky dotykové roviny rovnobežné s rovinou $\tau : x + 4y + 6z = 0$.

Riešenie:
Nech $A = [x_0, y_0, z_0]$ je ľubovoľný bod na danom elipsoide, t.j. platí:

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21.$$

Odvodíme všeobecný tvar dotykovej roviny k danému elipsoidu v bode A. Ak $z_0 \neq 0$, rovnicou v zadaní a bodom A je určená práve jedna implicitná funkcia $z = f(x, y)$ definovaná na okolí bodu $[x_0, y_0]$ (zdôvodnite prečo :)). Rovnica dotykovej roviny v bode A má potom tvar:

$$z - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0, y_0),$$

kde $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ je prvý diferenciál funkcie f v bode $[x_0, y_0]$. Na jeho konštrukciu potrebujeme zistiť prvé parciálne derivácie $f'_x = z'_x$ a $f'_y = z'_y$ v bode $[x_0, y_0]$. Vypočítame ich derivovaním rovnice v zadaní podľa premenných x, y:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \quad / \partial/\partial x,$$

$$2x + 6zz'_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad z'_x = -\frac{x}{3z} \quad \Longrightarrow \quad z'_x(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{3z_0},$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \quad / \partial/\partial y,$$

$$4y + 6zz'_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad z'_y = -\frac{2y}{3z} \quad \Longrightarrow \quad z'_x(x_0, y_0) = -\frac{2y_0}{3z_0}.$$

Potom máme:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= -\frac{x_0}{3z_0} \cdot (x - x_0) - \frac{2y_0}{3z_0} \cdot (y - y_0) = -\frac{x_0 x}{3z_0} - \frac{2y_0 y}{3z_0} + \frac{x_0^2 + 2y_0^2}{3z_0}.$$

Po dosadení do rovnice dotykovej roviny, využití faktu, že $f(x_0, y_0) = z_0$, a po menších úpravách dostaneme:

$$z - z_0 = -\frac{x_0 x}{3z_0} - \frac{2y_0 y}{3z_0} + \frac{x_0^2 + 2y_0^2}{3z_0},$$

$$3z_0 z - 3z_0^2 = -x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + 2y_0^2,$$

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z - (x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2) = 0.$$

V poslednej rovnici však $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$, preto finálna rovnica dotykovej roviny v bode A má tvar:

$$x_0 \cdot x + 2y_0 \cdot y + 3z_0 \cdot z - 21 = 0.$$

Chceme, aby táto rovina bola rovnobežná s rovinou τ v zadaní. To znamená, že normálové vektory oboch rovín sú rovnobežné. Normálový vektor dotykovej roviny je $(x_0, 2y_0, 3z_0)$, normálový vektor roviny τ je $(1, 4, 6)$. Tieto dva vektory budú rovnobežné práve vtedy, keď ich súradnice budú v rovnakých pomeroch, t.j. musí platiť:

$$x_0 : 2y_0 : 3z_0 = 1 : 4 : 6.$$

Odtiaľto potom dostávame:

$$\frac{2y_0}{x_0} = 4 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 2x_0,$$

$$\frac{3z_0}{x_0} = 6 \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 2x_0.$$

Tieto vyjadrenia súradníc y_0 a z_0 pomocou x_0 dosadíme do rovnice v zadaní a nájdeme hodnotu x_0 (pripomíname, že bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ leží na danom elipsoide):

$$x_0^2 + 2 \cdot 4x_0^2 + 3 \cdot 4x_0^2 = 21 \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \pm 1.$$

K elipsoidu teda existujú práve dve dotykové roviny, ktoré sú rovnobežné s rovinou τ. Jednak je to dotyková rovina k bodu $A = [1, 2, 2]$ s rovnicou

$$x + 4y + 6z - 21 = 0,$$

a jednak dotyková rovina k bodu $B = [-1, -2, -2]$ s rovnicou

$$x + 4y + 6z + 21 = 0.$$

Námet na ďalší príklad:
Odvoďte všeobecný tvar dotykovej roviny k elipsoidu v zadaní príkladu 12 v bode $A = [x_0, y_0, z_0]$ so $z_0 = 0$. Získaný výsledok porovnajte s rovnicou dotykovej roviny, ktorú sme odvodili v tomto príklade.