Príklady na precvičovanie – separovateľné a homogénne DR

Riešené príklady

Príklad 1

$$\sin x \cos y + y' \operatorname{tg} y \cos x = 0.$$

Riešenie:
Ide o separovateľnú rovnicu. Separujeme premenné:

$$y' \operatorname{tg} y \cos x = -\sin x \cos y,$$

$$y' \frac{\operatorname{tg} y}{\cos y} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\cos y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz $\cos y$ nemože byť rovný nule, nakoľko pre také y by nebol definovaný $\operatorname{tg} y$. Teda separáciou sme nestratili žiadne riešenia. Integrujeme:

$$\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Postupne vypočítame neurčité integrály:

$$\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} \cos y = t, \\ -\sin y \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos y},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|.$$

Po dosadení do rovnice teda máme (nezabudneme na integračnú konštantu):

$$\frac{1}{\cos y} = \ln|\cos x| + C,$$

$$\cos y = \frac{1}{\ln|\cos x| + C},$$

$$y=\arccos\left(\frac{1}{\ln|\cos x|+C}\right), \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Dostali sme všeobecné riešenie.

Príklad 2

$$y\sqrt{1+x^2}-xy+(1+x^2)y'=0, \qquad y(0)=1.$$

Riešenie:
Ide o separovateľnú rovnicu. Separujeme premenné:

$$(1+x^2)y'=xy-y\sqrt{1+x^2},$$

$$y'=y\cdot\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{1+x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\cdot\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{1+x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}\cdot\mathrm{d}x.$$

Separácia vyžaduje $y\neq 0$. Ľahko overíme, že i funkcia $y=0$ je riešením pôvodnej rovnice. Integrujeme:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Spočítame neurčité integrály:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln|y|,$$

$$\int\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-$$

$$-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|1+x^2|-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|=$$

$$=\ln\sqrt{1+x^2}-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right|.$$

Dosadíme do rovnice:

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right| + C_*,$$

$$y = C \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right),$$

kde $C := \pm e^{C_*} \neq 0$. Toto je všeobecné riešenie (ak C pripustíme aj nulové, nakoľko i $y = 0$ je riešenie pôvodnej rovnice). Chceme nájsť riešenie spĺňajúce začiatočnú podmienku $y(0) = 1$. Ľahko zistíme dosadením $y = 1$ a $x = 0$, že $C = 1$. Takže príslušné partikulárne riešenie je:

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Príklad 3

$$y' = 6x + 2y + 3.$$

Riešenie:
Zavedením novej závislej premennej $z(x) = 6x + 2y + 3$ (namiesto premennej y) prevedieme danú rovnicu na separovateľnú. Platí:

$$y = \frac{z - 6x - 3}{2}, \qquad y' = \frac{z' - 6}{2}.$$

Po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme:

$$\frac{z' - 6}{2} = z,$$

$$z' = 2z + 6.$$

Za predpokladu $2z + 6 \neq 0$ môžeme poslednú rovnicu separovať:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2z + 6,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{2z + 6} = \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2z+6} = \int \mathrm{d}x.$$

Po elementárnej integrácii dostaneme:

$$\frac{1}{2}\ln|z+3| = x + C_*,$$

$$\ln|z+3| = 2x + 2C_*,$$

$$|z+3| = \mathrm{e}^{2C_*}\mathrm{e}^{2x},$$

$$z+3 = \pm\mathrm{e}^{2C_*}\mathrm{e}^{2x}.$$

Vrátiac sa k pôvodnej premennej y máme:

$$6x + 2y + 6 = \pm\mathrm{e}^{2C_*}\mathrm{e}^{2x} \implies y = C\mathrm{e}^{2x} - 3(x+1),$$

kde $C := \pm\mathrm{e}^{2C_*}/2 \neq 0$. Treba ešte preskúmať prípad $2z+6=0$, teda $z=-3$, resp. $y=-3(x+1)$. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že táto funkcia je tiež riešením rovnice v zadaní úlohy. Všeobecné riešenie preto môžeme súhrnne napísať v tvare:

$$y = C\mathrm{e}^{2x} - 3(x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 4

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Riešenie:

Ide o homogénnu rovnicu, nakoľko pravá strana má tvar:

$$y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Použijeme substitúciu $u = y/x$, teda $y = ux$, kde u je nová závislá premenná (funkcia premennej x). Nájdeme vyjadrenie pre y':

$$y' = u'x + u.$$

Substituujeme do rovnice a separujeme:

$$u'x + u = \frac{1+u^2}{u},$$

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u,$$
$$u'x = \frac{1}{u},$$
$$uu' = \frac{1}{x},$$
$$u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x},$$
$$u\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Nestratili sme žiadne riešenia. Integrujeme:

$$\int u\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$
$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C/2,$$
$$u^2 = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + C.$$

Dosadíme za u:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln x^2 + C,$$
$$y^2 = x^2(\ln x^2 + C), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Máme všeobecné riešenie.

Príklad 5

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

Riešenie:

Ide o rovnicu, ktorá vedie na homogénnu rovnicu, pretože pravá strana má tvar:

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right) = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y+2-2(x+1)}{x+1}\right) =$$
$$= \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y+2}{x+1} - 2\right) = f\left(\frac{y+2}{x+1}\right).$$

Vyriešime sústavu:

$$y+2=0, \qquad x+1=0.$$

Riešenie je $x=-1$ a $y=-2$. Zavedieme nové premenné u (nezávislá namiesto x) a v (závislá namiesto y; v je funkciou premennej u):

$$u=x+1, \qquad v=y+2.$$

Substituujeme do rovnice (platí $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}v=\mathrm{d}y$):

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{v}{u}+\operatorname{tg}\left(\frac{v}{u}-2\right).$$

Dostali sme homogénnu rovnicu. Použijeme ďalej substitúciu $z=v/u$, z je nová závislá premenná, funkcia premennej u. Nakoľko $v=zu$, platí:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=v'=z'u+z.$$

Dosadením do rovnice a následnou separáciou máme:

$$z'u+z=z+\operatorname{tg}(z-2),$$

$$z'u=\operatorname{tg}(z-2),$$

$$\frac{z'}{\operatorname{tg}(z-2)}=\frac{1}{u},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\operatorname{tg}(z-2)}=\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Pri separácii sme museli predpokladať $\operatorname{tg}(z-2)\neq 0$. Vynechali sme teda funkcie $z-2=k\pi$, resp. $y=(x+1)(2+k\pi)-2$ v premenných x,y, kde $k\in\mathbb{Z}$. Ľahko overíme, že tieto funkcie sú riešeniami pôvodnej rovnice pre každé $k\in\mathbb{Z}$. Separovanú rovnicu integrujeme:

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\operatorname{tg}(z-2)}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

$$\ln|\sin(z-2)|=\ln|u|+C_*,$$

$$\sin(z-2)=\pm\mathrm{e}^{C_*}u.$$

Pre jednoduchosť zavedieme označenie $C:=\pm\mathrm{e}^{C_*}\neq 0$ a pokračujeme v úpravách:

$$z-2=\arcsin Cu,$$

$$z = 2 + \arcsin Cu,$$
$$v/u = 2 + \arcsin Cu,$$
$$v = u(2 + \arcsin Cu),$$
$$y + 2 = (x+1)(2 + \arcsin C(x+1)),$$
$$y = (x+1)(2 + \arcsin C(x+1)) - 2, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Všeobecné riešenie teda má tvar:

$$y = (x+1)(2 + \arcsin C(x+1)) - 2, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\},$$
$$y = (x+1)(2 + k\pi) - 2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 6

$$(2x + y + 1)\mathrm{d}x - (4x + 2y - 3)\mathrm{d}y = 0, \quad y(2) = 1.$$

Riešenie:
Z rovnice vyjadríme $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$:

$$y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}.$$

Táto úprava bola ekvivalentná, nakoľko $4x + 2y - 3 \neq 0$ (overte, že funkcia $y = -2x + 3/2$ nemôže byť riešením rovnice v zadaní). Vidíme, že posledná rovnica môže viesť na homogénnu rovnicu; pozrieme sa na riešenia sústavy

$$2x + y + 1 = 0, \quad 4x + 2y - 3 = 0.$$

Ihneď zistíme, že nemá riešenie. Zavedením novej závislej premennej $z = 2x + y$ (z je funkcia premennej x) prevedieme rovnicu na separovateľnú. Platí $y' = z' - 2$ a po dosadení dostaneme:

$$z' - 2 = \frac{z + 1}{2z - 3},$$
$$z' = \frac{z + 1}{2z - 3} + 2,$$
$$z' = \frac{5z - 5}{2z - 3}.$$

Za predpokladu $5z-5 \neq 0$ separujeme premenné a následne vykonáme integráciu:

$$\begin{aligned}
\frac{2z-3}{5z-5}\,\mathrm{d}z &= \mathrm{d}x, \\
\int \frac{2z-3}{5z-5}\,\mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}x, \\
\frac{1}{5}\int \left(2-\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z &= x + C_*, \\
\frac{2}{5}\,z - \frac{1}{5}\ln|z-1| &= x + C_*, \\
2z - \ln|z-1| &= 5x + 5C_*.
\end{aligned}$$

Vrátime sa k pôvodnej premennej y a vykonáme úpravy:

$$4x + 2y - \ln|2x+y-1| = 5x + 5C_*,$$

$$\begin{aligned}
\ln|2x+y-1| &= 2y - x - 5C_*, \\
2x + y - 1 &= \pm \mathrm{e}^{5C_*}\mathrm{e}^{2y-x}.
\end{aligned}$$

Položiac $C := \pm \mathrm{e}^{5C_*} \neq 0$ dostaneme:

$$2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}.$$

Musíme ešte preveriť funkciu $5z-5=0$, resp. $y=-2x+1$, či je riešením pôvodnej rovnice. Ľahko sa presvedčíme, že je riešením (samy overte :)). Preto množina všetkých riešení rovnice v zadaní má tvar:

$$2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(voľbou $C \neq 0$ dostaneme všetky riešenia, získané "klasickou" integráciou (tzv. kvadratúrou), kým pre $C=0$ máme práve diskutované "patologické" riešenie $y=-2x+1$). Nakoniec je treba z týchto riešení vybrať to, ktoré spĺňa podmienku $y(2)=1$, t.j. určiť voľnú integračnú konštantu C. Dosadením $x=2$ a $y=1$ dostaneme $C=4$, a teda hľadané riešenie našej začiatočnej úlohy je krivka $2x+y-1=4\mathrm{e}^{2y-x}$.

Neriešené príklady

1. $y' = \cos(y - x)$.
2. $1 - 2x - y^2 y' = 0$.
3. $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$.
4. $y \ln y + xy' = 0, \quad y(1) = 1$.
5. $y' = \sqrt{4x + 2y + 1}$.
6. $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$.
7. $(xy' - y) \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = x, \quad y(1) = 0$.
8. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'$.
9. $y' = \frac{x+7y+2}{3x+5y+6}$.
10. $\sin\frac{x+y}{2} - \sin\frac{x-y}{2} + y' = 0$.

Návod:
Pri 1. a 5. použitím vhodnej substitúcie preveďte rovnice na separovateľné. Pri 10. upravte výraz so sínusmi.

Zaujímavé, ťažšie príklady

1. Nájdite riešenie separovateľnej rovnice, ktoré spĺňa danú podmienku:

$$x^2 y' - \cos 2y = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \pi/4.$$

2. Vhodnou substitúciou (zavedením novej nezávislej i závislej premennej) preveďte rovnicu na homogénnu a vyriešte ju:

$$2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + 3y^2.$$

Návod:
Pri 2. vydeľte celú rovnicu x^3 a následne skúste použiť substitúciu $u = x^3$, $v = y^2$. Vyjadrite $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u$.