Separovateľné a homogénne DR – riešenie ťažších príkladov

1. $x^2y' - \cos 2y = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pi/4.$

   Riešenie:
   Nájdeme najprv všeobecné riešenie rovnice. Ide o separovateľnu DR. Za podmienky $1 + \cos 2y \neq 0$ môžeme separovať, pričom dostaneme:

   $$\frac{\mathrm{d}y}{1+\cos 2y} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

   $$\frac{\mathrm{d}y}{2\cos^2 y} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

   $$\int \frac{\mathrm{d}y}{2\cos^2 y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

   Pri úpravách sme využili vzorček $2\cos^2 y = 1 + \cos 2y$. Vykonáme integráciu a dostaneme:

   $$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = -\frac{1}{x} + C,$$

   $$\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 2C,$$

   $$y = \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

   Prípad $1 + \cos 2y = 0$ vedie na funkcie $y_k = k\pi - \pi/2$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pre každé celé k je funkcia y_k riešením rovnice v zadaní. Preto všetky riešenia rovnice sú:

   $$y = \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

   $$y_k = k\pi - \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Prejdime teraz k nájdeniu partikulárneho riešenia, ktoré spĺňa podmienku v zadaní. Je ľahko vidieť, že toto riešenie musí byť tvaru $y =$

$\operatorname{arctg}(2C - 2/x)$, pretože $\lim_{x\to\infty} y_k = k\pi - \pi/2 \neq \pi/4$ pre každé celé k. Neznámu konštantu C určíme z podmienky:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(2C - \frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Po limitovaní dostaneme:

$$\operatorname{arctg} 2C = \frac{\pi}{4},$$

$$2C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

$$C = \frac{1}{2}.$$

Hľadané riešenie má preto tvar:

$$y = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

2. $2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + 3y^2$.

Riešenie:
Na pohľad pomerne ťažká rovnica :-/. Podľa dobre mienenej rady teda vydeľme rovnicu výrazom x^3:

$$\frac{2yy'}{x^2} = 3\frac{\sqrt{x^6 - y^4}}{x^3} + 3\frac{y^2}{x^3},$$

$$\frac{2yy'}{x^2} = 3\sqrt{1 - \frac{y^4}{x^6}} + 3\frac{y^2}{x^3},$$

a zaveďme novú nezávislú premennú u a novú závislú premennú v:

$$u = x^3, \qquad v = y^2.$$

Potrebujem určiť $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u$. Platí:

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}(y^2) = 2y\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}(x^3) = 3x^2\mathrm{d}x,$$

z čoho máme:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2y\mathrm{d}y}{3x^2\mathrm{d}x} = \frac{2y}{3x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2yy'}{3x^2} \implies 3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2yy'}{x^2}.$$

To je skvelé, pretože na ľavej strane upravenej rovnice máme presne výraz $2yy'/x^2$. Takže po zavedení premenných u, v dostaneme:

$$3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 3\sqrt{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2} + 3\frac{v}{u},$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2} + \frac{v}{u}.$$

No ale toto je predsa homogénna rovnica. Takže vyzerá to tak, že situácia sa začína vylepšovať :). Nasadíme obvyklý aparát. Zavediem substitúciu $z = v/u$. Poznamenajme, že ďalej bude symbol $'$ označovať deriváciu podľa premennej u:

$$v = zu, \qquad v' = z'u + z.$$

Teda po dosadení máme:

$$z'u + z = \sqrt{1-z^2} + z,$$
$$z'u = \sqrt{1-z^2},$$
$$\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{u},$$

samozrejme za predpokladu, že $z \neq \pm 1$. Integrujeme:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u},$$
$$\arcsin z = \ln|u| + C.$$

Spätne dosadíme jednak v/u za z, a jednak y^2, x^3 za v, u:

$$\arcsin\frac{v}{u} = \ln|u| + C,$$
$$\arcsin\frac{y^2}{x^3} = \ln|x^3| + C,$$
$$y^2 = x^3\sin(\ln|x^3| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pozrime sa ešte na prípady $z = 1$ a $z = -1$. Sú to funkcie:

$$y^2 = x^3, \qquad y^2 = -x^3.$$

Pomerne ľahko sa presvedčíme, že sú tiež riešeniami pôvodnej rovnice. Kľúčové pri riešení rovnice bolo vhodnou substitúciou premenných previesť rovnicu na typ, ktorý už vieme riešiť (na homogénnu rovnicu).