Príklady na precvičovanie – lineárne DR I. rádu, Bernoulliho DR, zámena premenných

Riešené príklady

Príklad 1

$$y' \cos x = y \sin x.$$

Riešenie:
Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu I. rádu, homogénnu, a teda separovateľnú. Vykonáme separáciu premenných, predpokladáme $y \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Vykonáme integráciu:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y|,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x, = -\ln|\cos x|.$$

Po dosadení dostaneme:

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_*, \quad C_* \in \mathbb{R},$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x|^{-1} + C_*,$$

$$y = \frac{\pm \mathrm{e}^{C_*}}{\cos x}.$$

Položiac $C := \pm \mathrm{e}^{C_*}$ obdržíme riešenie v tvare:

$$y = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Nakoniec funkcia $y = 0$ je tiež riešením rovnice v zadaní, takže všeobecné riešenie môžeme zapísať v tvare:

$$y = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2

$$y' + y \operatorname{cotg} x = \sin x, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Riešenie:
Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu I. rádu, nehomogénnu (s pravou stranou). Budeme ju riešiť metódou variácie konštánt. Nájdeme najprv všeobecné riešenie príslušnej homogénnej LDR, teda rovnice:

$$y' + y \operatorname{cotg} x = 0.$$

Je to jednoduchá separovateľná rovnica. Jej všeobecné riešenie má tvar:

$$y_H = C \cdot \mathrm{e}^{-\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x} = C\mathrm{e}^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x} = C\mathrm{e}^{-\ln|\sin x|} = C\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{|\sin x|}} =$$

$$= \frac{C}{\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie pôvodnej rovnice s pravou stranou budeme predpokladať v takomto tvare, avšak C bude znamenať nejakú funkciu premennej x:

$$y = \frac{C(x)}{\sin x}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice zistíme správnu funkciu $C(x)$:

$$\left(\frac{C(x)}{\sin x}\right)' + \frac{C(x)}{\sin x} \cdot \operatorname{cotg} x = \sin x,$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} = \sin x,$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} = \sin x,$$

$$C'(x) = \sin^2 x,$$

$$C(x) = \int \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + K.$$

Po dosadení máme všeobecné riešenie:

$$y = \frac{C(x)}{\sin x} = \frac{K}{\sin x} + \frac{x}{2\sin x} - \frac{\sin 2x}{4\sin x} = \frac{K}{\sin x} + \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Chceme nájsť partikulárne riešenie $y(\pi/2) = 1$. Dosadením $x = \pi/2$ a $y = 1$ určíme voľnú integračnú konštantu K:

$$1 = \frac{K}{\sin(\pi/2)} + \frac{\pi/2}{2\sin(\pi/2)} - \frac{\cos(\pi/2)}{2},$$

$$1 = K + \frac{\pi}{4},$$

$$K = \frac{4-\pi}{4}.$$

Preto hľadaná funkcia, ktorá rieši našu začiatočnú Cauchyho úlohu v zadaní, má tvar:

$$y = \frac{4-\pi}{4\sin x} + \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2}.$$

Príklad 3

$$y' - \frac{4}{3}y = \frac{x+1}{3y^2}.$$

Riešenie:
Ide o Bernoulliho rovnicu, $\alpha = -2$. Vydelíme celú rovnicu výrazom y^{-2}:

$$y^2y' - \frac{4}{3}y^3 = \frac{x+1}{3}.$$

Použijeme substitúciu $z = y^3$, pričom máme:

$$z' = 3y^2y' \implies z'/3 = y^2y'.$$

Po dosadení dostaneme:

$$\frac{z'}{3} - \frac{4}{3}z = \frac{x+1}{3},$$

$$z' - 4z = x + 1.$$

Rovnicu sme previedli na LDR I. rádu s pravou stranou. Riešime ju metódou variácie konštánt, teda jej všeobecné riešenie budeme predpokladať v tvare:

$$z = C(x)\mathrm{e}^{\int 4\mathrm{d}x} = C(x)\mathrm{e}^{4x}.$$

Dosadením zistíme neznámu funkciu $C(x)$:

$$\left(C(x)\mathrm{e}^{4x}\right)' - 4C(x)\mathrm{e}^{4x} = x + 1,$$

$$
\begin{aligned}
C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4C(x)\mathrm{e}^{4x} - 4C(x)\mathrm{e}^{4x} &= x+1, \\
C'(x)\mathrm{e}^{4x} &= x+1, \\
C'(x) &= (x+1)\mathrm{e}^{-4x}, \\
C(x) = \int (x+1)\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x &= -\frac{(x+1)}{4}\,\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-4x} + K.
\end{aligned}
$$

Všeobecné riešenie lineárnej rovnice má preto tvar:

$$
z = C(x)\mathrm{e}^{4x} = K\mathrm{e}^{4x} - \frac{x+1}{4} - \frac{1}{16} = K\mathrm{e}^{4x} - \frac{4x+5}{16}.
$$

Teda všeobecné riešenie pôvodnej Bernoulliho rovnice je:

$$
y^3 = K\mathrm{e}^{4x} - \frac{4x+5}{16}, \quad K \in \mathbb{R}.
$$

Príklad 4

$$
y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}.
$$

Riešenie:

Je to Bernoulliho rovnicu s $\alpha = 1/2$. Postupujeme štandardnym spôsobom. Vydelíme celú rovnicu výrazom $\sqrt{y}$

$$
\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{y}}{x} + x
$$

a následne použijeme substitúciu $z = \sqrt{y}$. Samozrejme, predpokladáme, že $y \neq 0$. Dostaneme:

$$
z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \implies 2z' = \frac{y'}{\sqrt{y}}.
$$

Po dosadení máme:

$$
\begin{aligned}
2z' &= \frac{4z}{x} + x, \\
z' - \frac{2z}{x} &= \frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

Získali sme na LDR I. rádu s pravou stranou, ktorú vyriešime metódou variácie konštánt. Jej všeobecné riešenie budeme predpokladať v tvare:

$$
z = C(x)\mathrm{e}^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x} = C(x)\mathrm{e}^{2\ln|x|} = C(x)\mathrm{e}^{\ln x^2} = C(x)x^2.
$$

Dosadením zistíme neznámu funkciu $C(x)$:

$$\big(C(x)x^2\big)' - 2C(x)x = \frac{x}{2},$$

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - 2C(x)x = \frac{x}{2},$$

$$C'(x)x^2 = \frac{x}{2},$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x},$$

$$C(x) = \int \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x| + K = \ln\sqrt{|x|} + K.$$

Všeobecné riešenie lineárnej rovnice má preto tvar:

$$z = C(x)x^2 = (\ln\sqrt{|x|} + K)x^2,$$

z čoho pre riešenie pôvodnej Bernoulliho rovnice máme:

$$\sqrt{y} = (\ln\sqrt{|x|} + K)x^2,$$

$$y = (\ln\sqrt{|x|} + K)^2x^4.$$

Ošetríme ešte prípad $y = 0$. Ľahko overíme, že táto funkcia tiež rieši rovnicu v zadaní. Preto množina všetkých riešení má tvar:

$$y = 0, \quad y = (\ln\sqrt{|x|} + K)^2x^4, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Nasledujúci príklad je riešený metódou zámeny premenných. Vzájomná zámena premenných je trik, pri ktorom premennú x považujeme za *závislú* (t.j. za funkciu premennej y, $x = x(y)$) a premennú y za *nezávislú* premennú. To samozrejme vyžaduje, aby k funkcii $y = y(x)$ existovala inverzná funkcia, t.j. aby $y(x)$ bola prostá. Potom $y'(x) \neq 0$ a integrálnu krivku hľadáme v tvare $x = x(y)$. Využívame pri tom fakt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{y'}.$$

Prakticky sa to robí väčšinou tak, že vyjadríme y', prepíšeme ju pomocou diferenciálov a následne celú rovnicu prevrátime hore nohami.

Príklad 5

$$(x + y^2)y' - y = 0.$$

Riešenie:
Vidíme, že rovnica nie je ani separovateľná, ani homogénna, ani LDR I. rádu a dokonca ani Bernoulliho :-/. No a práve teraz nás zachráni metóda zámeny premenných :-). Najprv si všimnime, že funkcia $y = 0$ je riešením rovnice. Predpokladajme teraz, že $y \neq 0$. Potom výraz $x + y^2$ je nutne nenulový (prečo?) a môžeme vyjadriť deriváciu y':

$$y' = \frac{y}{x + y^2}.$$

Z poslednej rovnosti a z relácie $y \neq 0$ vyplýva, že i $y' \neq 0$, a preto môžeme smelo použiť zámenu premenných. Platí:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + y^2}, \quad \text{/otočíme hore nohami}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x + y^2}{y},$$

$$x' = \frac{x}{y} + y.$$

To je však LDR I. rádu vzhľadom na neznámu funkciu $x = x(y)$, ktorú už vieme riešiť. Nasadíme štandardný aparát. Všeobecnej riešenie príslušnej homogénnej LDR je:

$$x_H(y) = C\mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y} = C\mathrm{e}^{\ln|y|} = Cy.$$

Podľa metódy variácie konštánt budeme preto všeobecnej riešenie nehomogénnej rovnice predpokladať v tvare:

$$x = C(y)y.$$

Neznámu funkciu $C(y)$ zistíme dosadením do rovnice (symbol $'$ značí derivovanie podľa y):

$$(C(y)y)' = C(y) + y,$$

$$C'(y)y + C(y) = C(y) + y,$$

$$C'(y)y = y,$$
$$C'(y) = 1,$$
$$C(y) = y + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Preto $x(y) = y^2 + Ky$ a množina všetkých riešení rovnice v zadaní má tvar:

$$y = 0, \quad x = y^2 + Ky, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Neriešené príklady

1. $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$.
2. $y' - 9x^2 y + 3(x^5 - x^2)\sqrt[3]{y^2} = 0$.
3. $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}, \quad y(0) = 1$.
4. $\frac{y'}{\sqrt{y}} + 4\sqrt{y}\,x = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. $xy' - 2y = x^3 \cos x$.
6. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
7. $xy' + 2y = 2x \cos 2x + 2 \sin 2x, \quad y(\pi) = 1$.
8. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.
9. $(2x + y - 4 \ln y)y' - y = 0$.
10. $(2x^2 y \ln y - x)y' - y = 0$.

Návod:
V 8., 9. a 10. použitím vzájomnej zámeny premenných preveďte rovnice na LDR I. rádu, resp. na Bernoulliho DR. Oprávnenosť použitia tohto triku si riadne zdôvodnite. Nezabudnite na "patologické" riešenia (ak také existujú).