Príklady na precvičovanie – exaktné DR, integračný faktor

Riešené príklady

Príklad 1

$$(y\cos x - x\sin y)\mathrm{d}x + \left(\sin x - \frac{x^2}{2}\cos y + \operatorname{tg} y\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Riešenie:
Overíme exaktnosť rovnice. Príslušné funkcie $M(x,y)$, $N(x,y)$ sú:

$$M(x,y) = y\cos x - x\sin y,$$

$$N(x,y) = \sin x - \frac{x^2}{2}\cos y + \operatorname{tg} y.$$

Vypočítame prvé parciálne derivácie:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x - x\cos y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x - x\cos y.$$

Príslušné parciálne derivácie sa identicky rovnajú, teda rovnica je exaktná. Určíme kmeňovú funkciu $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (y\cos x - x\sin y)\,\mathrm{d}x = y\sin x - \frac{x^2}{2}\sin y + C(y),$$

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \left(\sin x - \frac{x^2}{2}\cos y + \operatorname{tg} y\right)\mathrm{d}y =$$

$$= y\sin x - \frac{x^2}{2}\sin y - \ln|\cos y| + D(x).$$

Porovnaním oboch vyjadrení pre funkciu $F(x,y)$ dostaneme pre neznáme funkcie $C(y)$, $D(x)$:

$$C(y) = -\ln|\cos y|, \qquad D(x) = 0.$$

Platí teda:

$$F(x,y) = y \sin x - \frac{x^2}{2} \sin y - \ln|\cos y|,$$

a všeobecné riešenie rovnice je:

$$y \sin x - \frac{x^2}{2} \sin y - \ln|\cos y| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2

$$4x^3 \mathrm{e}^y \mathrm{d}x + (x^4 \mathrm{e}^y + 2y)\mathrm{d}y = 0.$$

Riešenie:
Overíme exaktnosť rovnice. Príslušné funkcie $M(x,y)$, $N(x,y)$ sú:

$$M(x,y) = 4x^3 \mathrm{e}^y,$$

$$N(x,y) = x^4 \mathrm{e}^y + 2y.$$

Vypočítame prvé parciálne derivácie:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 \mathrm{e}^y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 \mathrm{e}^y.$$

Príslušné parciálne derivácie sa identicky rovnajú, preto je rovnica exaktná. Pre príslušnú kmeňovú funkciu $F(x,y)$ platí:

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (x^4 \mathrm{e}^y + 2y)\,\mathrm{d}y = x^4 \mathrm{e}^y + y^2 + D(x),$$

kde $D(x)$ je neznáma integračná funkcia iba premennej x. Určíme ju z vlastnosti:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y).$$

Platí:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 \mathrm{e}^y + y^2 + D(x)) = 4x^3 \mathrm{e}^y + D'(x),$$

$$M(x,y) = 4x^3 \mathrm{e}^y.$$

($\partial D(x)/\partial x = D'(x)$, nakoľko $D(x)$ je funkcia iba jednej premennej x). Po dosadení dostaneme:

$$4x^3\mathrm{e}^y + D'(x) = 4x^3\mathrm{e}^y,$$

$$D'(x) = 0,$$

z čoho napr. máme $D(x) = 0$. Preto pre kmeňovú funkciu $F(x, y)$ platí:

$$F(x, y) = x^4\mathrm{e}^y + y^2,$$

a všeobecné riešenie rovnice v zadaní má tvar:

$$x^4\mathrm{e}^y + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3

$$(2y + 4x^2y^2)\,\mathrm{d}x + (x + 2yx^3)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Riešenie:
Vyšetríme exaktnosť rovnice. Funkcie $M(x, y)$, $N(x, y)$ sú:

$$M(x, y) = 2y + 4x^2y^2,$$

$$N(x, y) = x + 2yx^3.$$

Parciálne derivácie sú:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 8x^2y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 6yx^2.$$

Vidíme, že rovnica nie je exaktná, nakoľko sa uvedené parciálne derivácie nerovnajú. Pokúsime sa nájsť vhodný integračný faktor R ako funkciu jednej premennej, $R = R(x)$ alebo $R = R(y)$. Za týmto účelom preskúmajme výraz:

$$\frac{M'_y - N'_x}{N}.$$

Platí:

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{2 + 8x^2y - 1 - 6yx^2}{x + 2yx^3} = \frac{1 + 2yx^2}{x(1 + 2yx^2)} = \frac{1}{x}.$$

Vidíme, že ide o výraz obsahujúci iba premennú x, preto integračný faktor môžeme vybrať v tvare:

$$R(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

Vynásobením pôvodnej rovnice týmto integračným faktorom dostaneme už exaktnú rovnicu (ako sa možno ľahko presvedčiť):

$$(2yx + 4x^3y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2yx^4)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Príslušná kmeňová funkcie je:

$$F(x, y) = \int (2yx + 4x^3y^2)\,\mathrm{d}x = yx^2 + x^4y^2 + C(y),$$

$$F(x, y) = \int (x^2 + 2yx^4)\,\mathrm{d}y = yx^2 + y^2x^4 + D(x).$$

Pre funkcie $C(y)$, $D(x)$ teda platí: $C(y) = 0 = D(x)$. Kmeňová funkcia má teda tvar:

$$F(x, y) = yx^2 + x^4y^2.$$

Všeobecné riešenie je:

$$yx^2 + x^4y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Chceme nájsť partikulárne riešenie so začiatočnou podmienkou $y(1) = 1$. Dosadením $x = 1$ a $y = 1$ pre konštantu C dostaneme:

$$1 + 1 = C \implies C = 2.$$

Hľadaná integrálna krivka je:

$$yx^2 + x^4y^2 = 2.$$

Príklad 4 (pomocou integračného faktora)

$$y' + y\cos x = \sin 2x.$$

Riešenie
Rovnicu už máme prepísanú vo vhodnom tvare (na pravej strane nie je y), funkcia $f(x) = -\cos x$. Integračný faktor má preto tvar:

$$\mathrm{e}^{+\int \cos x \, \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\sin x}.$$

Po vynásobení rovnice týmto faktorom dostaneme:

$$y' \mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{\sin x} y \cos x = \mathrm{e}^{\sin x} \sin 2x,$$

$$\left(y \, \mathrm{e}^{\sin x}\right)' = \mathrm{e}^{\sin x} \sin 2x,$$

$$y \, \mathrm{e}^{\sin x} = \int \mathrm{e}^{\sin x} \sin 2x \, \mathrm{d}x.$$

Neurčitý integrál vypočítame pomocou vhodnej substitúcie v kombinácii s integráciou po častiach:

$$\int \mathrm{e}^{\sin x} \sin 2x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sin x} 2 \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = 2 \int \mathrm{e}^{\sin x} \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = 2 \int t \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = 1, & v = \mathrm{e}^t \end{array} \right| =$$

$$= 2t\mathrm{e}^t - 2 \int \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = 2(t-1)\mathrm{e}^t + C = 2(\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + C.$$

Platí teda:

$$y \, \mathrm{e}^{\sin x} = 2(\sin x - 1)\mathrm{e}^{\sin x} + C,$$

$$y = 2(\sin x - 1) + C\mathrm{e}^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Získali sme všeobecné riešenie danej rovnice.

Metóda integračného faktora pre riešenie LDR I. rádu je pomerne rýchla, v porovnaní s metódou variácie konštánt. Je dobré obratne ovládať obidve metódy.

Neriešené príklady

1. $\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \, \mathrm{d}x - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + 1 \right) \mathrm{d}y = 0.$

2. $\left(3x^2y^2 + \frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x - (2x^3y + \ln x) \, \mathrm{d}y = 0.$

3. $y\,\mathrm{d}x = \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - x\right)\mathrm{d}y, \qquad y(\sqrt{2}) = 1.$

4. $2xy\,\mathrm{d}x + (y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

5. $(3x^2y + y^3)\,\mathrm{d}x - (2x^3 + 5y)\,\mathrm{d}y = 0.$

6. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}\sin x$ (pomocou integračného faktora).

Zaujímavé, ťažšie príklady

1. $(x^2y^3 + y)\,\mathrm{d}x + (x^3y^2 - x)\,\mathrm{d}y = 0.$

2. $(3x^3 - 3x^2y + 1)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$

3. $x\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2 + y)\,\mathrm{d}y = 0.$

Návod:

1. Overte, že výraz:
$$\frac{N'_x - M'_y}{xM - yN}$$
je funkciou iba premennej xy. Potom použite integračný faktor tvaru:
$$R = R(xy) = \mathrm{e}^{\int \frac{N'_x - M'_y}{xM - yN}},$$
pričom naznačenú integráciu vykonajte podľa premennej xy.

2. Overte, že výraz:
$$\frac{M'_y - N'_x}{M + N}$$
je funkciou iba premennej $x-y$. Potom použite integračný faktor tvaru:
$$R = R(x-y) = \mathrm{e}^{\int \frac{M'_y - N'_x}{M + N}},$$
pričom naznačenú integráciu vykonajte podľa premennej $x - y$.

3. Overte, že výraz:
$$\frac{N'_x - M'_y}{2yM - 2xN}$$
je funkciou iba premennej $x^2 + y^2$. Potom použite integračný faktor tvaru:
$$R = R(x^2 + y^2) = \mathrm{e}^{\int \frac{N'_x - M'_y}{2yM - 2xN}},$$
pričom naznačenú integráciu vykonajte podľa premennej $x^2 + y^2$.

Poznámka:
$$M'_y = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \quad N'_x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$