Príklady na precvičovanie – kmeňová funkcia viac premenných

Pojem kmeňovej funkcie úzko súvisí s vyšetrovaním diferenciálnych foriem tvaru

$$P_1(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 + P_2(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_n(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

kde $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ pre $i = 1, \ldots, n$ sú dvakrát spojito diferencovateľné funkcie a $n \in \mathbb{N}$. Riešime problém, kedy takáto forma je prvým diferenciálom nejakej funkcie $F(x_1, \ldots, x_n)$, t.j.

$$P_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Ak pre funkcie $P_1, \ldots, P_n$ takáto funkcia F existuje, hovoríme jej *kmeňová funkcia* pre n-ticu $P_1, \ldots, P_n$. Nutná a postačujúca podmienka existencie kmeňovej funkcie pre n-ticu $P_1, \ldots, P_n$ je platnosť rovností:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Prípad $n = 2$ sme prebrali pri riešení exaktných DR. Tam sme hľadali kmeňovú funkciu pre dvojicu $M(x, y)$ a $N(x, y)$. Podmienka jej existencie mala tvar:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

V prípade $n = 3$ vyšetrujeme, kedy diferenciálny výraz

$$P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

je prvým diferenciálom nejakej funkcie $F(x, y, z)$. Hľadáme teda kmeňovú funkcie k trojici P, Q, R. Nutná a postačujúca podmienka na jej existenciu má tvar:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Hľadaná kmeňová funkcie F sa potom zistí integráciou funkcií P, Q a R podľa premenných x, y a z:

$$F(x, y, z) = \int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y = \int R(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Nakoľko integrujeme neurčito, v daných integráloch sa objavia neznáme integračné funkcie, ktoré je potrebné určiť. V nasledujúcich príkladoch ilustrujeme dve metódy riešenia tohto problému.

Riešené príklady

Príklad 1
Rozhodnite, či výraz

$$(3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y + (3z^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}z$$

je prvým diferenciálom nejakej funkcie premenných x, y, z.

Riešenie:
Máme teda rozhodnúť, či pre trojicu funkcií

$$P(x,y,z) = 3x^2 - 3yz + 2, \quad Q(x,y,z) = 3y^2 - 3xz + \ln y + 1,$$
$$R(x,y,z) = 3z^2 - 3xy + 1$$

existuje kmeňová funkcia $F(x,y,z)$. Overíme nutné a postačujúce podmienky:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3z,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -3x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -3x,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = -3y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -3y.$$

Pre trojicu P, Q, R teda existuje kmeňová funkcia F, t.j. platí:

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Pokúsime sa teraz nájsť všetky takéto funkcie F. Integráciou postupne dostaneme:

$$F = \int P\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 3yz + 2)\,\mathrm{d}x = x^3 - 3yzx + 2x + A(y,z),$$

$$F = \int Q\,\mathrm{d}y = \int (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\,\mathrm{d}y = y^3 - 3xzy + y\ln y + B(x,z),$$

$$F = \int R\,\mathrm{d}z = \int (3z^2 - 3xy + 1)\,\mathrm{d}z = z^3 - 3xyz + z + C(x,y).$$

V prvom integrále sme integrovali podľa premennej x, takže neznáma integračná funkcia $A(y,z)$ je vo všeobecnosti funkciou premenných y,z. Podobne v druhom integrále sme integrovali podľa premennej y, preto neznáma integračná funkcia $B(x,z)$ je funkciou premenných x,z. Nakoniec poslednú integráciu sme vykonali podľa premennej z, teda vznikla nám neznáma integračná funkcia $C(x,y)$ premenných x,y. Vzájomným porovnaním získaných výrazov pre funkciu F zistíme neznáme funkcie A,B,C. Postupne máme:

- 1. a 2. integrál:

$$x^3 - 3yzx + 2x + A(y,z) = y^3 - 3xzy + y\ln y + B(x,z),$$
$$\underbrace{A(y,z) - y^3 - y\ln y}_{\text{tu sú iba premenné } y,z} = \underbrace{B(x,z) - x^3 - 2x}_{\text{tu sú iba premenné } x,z}.$$

  Aby posledná rovnosť platila *identicky*, na ľavej strane nesmie byť premenná y, kým na pravej strane sa zas nesmie vyskytovať premenná x. Máme teda:

$$A(y,z) - y^3 - y\ln y = D(z) = B(x,z) - x^3 - 2x$$
$$\Downarrow$$
$$A(y,z) = y^3 + y\ln y + D(z), \quad B(x,z) = x^3 + 2x + D(z),$$

  pre nejakú funkciu $D(z)$ jednej premennej z.

- 2. a 3. integrál:

$$y^3 - 3xzy + y\ln y + B(x,z) = z^3 - 3xyz + z + C(x,y),$$
$$\underbrace{B(x,z) - z^3 - z}_{\text{tu sú iba premenné } x,z} = \underbrace{C(x,y) - y^3 - y\ln y}_{\text{tu sú iba premenné } x,y}.$$

  Aby posledná rovnosť platila *identicky*, na ľavej strane nesmie byť premenná z, kým na pravej strane sa zas nesmie vyskytovať premenná y. Z toho dostávame:

$$B(x,z) - z^3 - z = E(x) = C(x,y) - y^3 - y\ln y$$
$$\Downarrow$$
$$B(x,z) = z^3 + z + E(x), \quad C(x,y) = y^3 + y\ln y + E(x),$$

  pre nejakú funkciu $E(x)$ jednej premennej x.

- 3. a 1. integrál:

$$z^3 - 3xyz + z + C(x,y) = x^3 - 3yzx + 2x + A(y,z),$$

$$\underbrace{C(x,y) - x^3 - 2x}_{\text{tu sú iba premenné } x,y} = \underbrace{A(y,z) - z^3 - z}_{\text{tu sú iba premenné } y,z}.$$

  Aby posledná rovnosť platila *identicky*, na ľavej strane nesmie byť premenná x, kým na pravej strane sa zas nesmie vyskytovať premenná z. Z toho dostávame:

$$C(x,y) - x^3 - 2x = G(y) = A(y,z) - z^3 - z$$

$$\Downarrow$$

$$C(x,y) = x^3 + 2x + G(y), \quad A(y,z) = z^3 + z + G(y),$$

  pre nejakú funkciu $G(y)$ jednej premennej y.

Pre každú z neznámych funkcií A, B, C sme teda získali dve vyjadrenia, v ktorých už však figurujú funkcie D, E, G závislé iba na *jednej* premennej. V prípade funkcie $A(y,z)$ platí:

$$A(y,z) = y^3 + y\ln y + D(z) = z^3 + z + G(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{D(z) - z^3 - z}_{\text{tu je iba premenná } z} = \underbrace{G(y) - y^3 - y\ln y}_{\text{tu je iba premenná } y}$$

$$\Downarrow$$

$$D(z) = z^3 + z + K, \quad G(y) = y^3 + y\ln y + K,$$

kde K je konštanta. Podobne v prípade funkcie $B(x,z)$ máme:

$$B(x,z) = x^3 + 2x + D(z) = z^3 + z + E(x)$$

Využitím práve získaného vyjadrenia $D(z) = z^3 + z + K$ ihneď pre funkciu $E(x)$ dostávame:

$$E(x) = x^3 + 2x + K.$$

Pomocou odvodených výrazov pre funkcie D, E, G spätne dostaneme tvar funkcií A, B, C:

$$A(y,z) = y^3 + y\ln y + D(z) = y^3 + y\ln y + z^3 + z + K,$$

$$B(x,z) = x^3 + 2x + D(z) = x^3 + 2x + z^3 + z + K,$$
$$C(x,y) = x^3 + 2x + G(y) = x^3 + 2x + y^3 + y \ln y + K.$$

Nakoniec pre kmeňovú funkciu získame finálny výraz:

$$F(x,y,z) = x^3 - 3yzx + 2x + A(y,z) = x^3 - 3yzx + 2x + y^3 + y \ln y + z^3 + z + K$$

$$\Downarrow$$

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + y \ln y + z + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Toto sú zároveň všetky kmeňové funkcie F, ktoré odpovedajú trojici funkcií P, Q, R.

Príklad 2

Rozhodnite, či výraz

$$\frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}\,\mathrm{d}x + \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2}\,\mathrm{d}y + \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}\,\mathrm{d}z$$

je prvým diferenciálom nejakej funkcie premenných x, y, z.

Riešenie:

Máme teda zistiť, či existuje kmeňová funkcia F k trojici funkcií P, Q, R tvaru:

$$P(x,y,z) = \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \quad Q(x,y,z) = \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2}, \quad R(x,y,z) = \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}.$$

Overíme parciálne derivácie funkcií P, Q, R:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{z(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{x(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{y(1 - x^2y^2z^2)}{(1 + x^2y^2z^2)^2}.$$

Kmeňová funkcia F teda existuje a platí:

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Funkciu F teraz určíme iným spôsobom, než v predchádzajúcom príklade. Vykonáme iba jednu integráciu, napríklad podľa premennej x:

$$F = \int P \,\mathrm{d}x = \int \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(xyz) + A(y, z).$$

Neznámu integračnú funkciu $A(y, z)$ stanovíme tak, že získaný výraz pre funkciu F parciálne derivujeme podľa premenných y a z a výsledky porovnáme s funkciami Q a R. Postupne platí:

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{xz}{1 + x^2y^2z^2} = \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2} + A'_y \quad \Longrightarrow \quad A'_y = 0.$$

$$R = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} = \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} + A'_z \quad \Longrightarrow \quad A'_z = 0.$$

Riešime teraz nasledovný problém. Pre funkcie $M(y, z) = 0$, $N(y, z) = 0$ máme nájsť funkciu $A(y, z)$ tak, aby platilo:

$$M = A'_y, \quad N = A'_z.$$

Inými slovami, máme nájsť kmeňovú funkciu A pre dvojicu M, N. V tomto prípade je to veľmi jednoduché, nakoľko ihneď vidíme, že $A(y, z) = K$, kde K je reálna konštanta. Preto hľadaná kmeňová funkcia F má tvar:

$$F(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xyz) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Toto sú zároveň všetky kmeňové funkcie F pre trojicu danú P, Q, R.

Práve prezentovaná metóda hľadania kmeňovej funkcie pre trojicu daných funkcií je založená na tom, že integráciou daný problém prevedieme na úlohu nájsť kmeňovú funkciu pre *dvojicu* istých funkcií. Poznamenajme, že tento postup funguje i pri určovaní kmeňových funkcií pre 4 a viac funkcií. Napríklad ak máme nájsť kmeňovú funkciu pre štvoricu funkcií, jednou integráciou tento problém zredukujeme na úlohu nájsť kmeňovú funkciu pre trojicu istých funkcií, atď.

Na druhej strane v metóde, ukázanej v riešení prvého príkladu, vykonáme všetky integrácie a následne porovnávame získané vyjadrenia kmeňovej funkcie F. Tento postup je možné opäť uplatniť i vo vyšších dimenziách.