Príklady na precvičovanie – DR nerozriešené vzhľadom na deriváciu

Riešené príklady

Príklad 1

$$x = (y')^3 + y' - 1.$$

Riešenie:
Najprv si všimnime, že ak $y = y(x)$ je riešenie tejto rovnice, potom nutne $y' \neq 0$. Zavedieme parameter $p = y'$:

$$x = p^3 + p - 1.$$

Túto rovnicu teraz derivujeme podľa premennej y. Je potrebné si uvedomiť, že nenulovosť $p = y'$ implikuje, že k funkcii $y = y(x)$ existuje inverzná funkcia $x = x(y)$. Nakoľko $p = p(x)$ je funkciou premennej x, parameter p je aj funkciou premennej y. Preto derivovanie podľa premennej y je oprávnené a $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/p$. Platí teda:

$$x' = 3p^2p' + p',$$

$$\frac{1}{p} = 3p^2p' + p',$$

$$\frac{1}{p} = (3p^2 + 1)p',$$

$$\frac{1}{p} = (3p^2 + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Dostali sme separovateľnú rovnicu (p je zavislá premenná, y je nezávislá premenná). Vykonáme separáciu premenných a následne integrujeme:

$$\mathrm{d}y = (3p^3 + p)\mathrm{d}p,$$

$$\int \mathrm{d}y = \int (3p^3 + p)\mathrm{d}p,$$

$$y = \int (3p^3 + p)\mathrm{d}p.$$

$$y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C.$$

Úvodná rovnica teda má všeobecné riešenie v parametrickom vyjadrení:

$$x = p^3 + p - 1, \quad y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2

$$y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y(-4) = -7.$$

Riešenie:
Ide o Clairautovu diferenciálnu rovnicu. Zavedieme parameter $p = y'$

$$y = xp - \sqrt{1 + p^2}$$

a rovnicu zderivujeme podľa premennej x (treba si uvedomiť, že p je funkcia premennej x):

$$y' = p + xp' - \frac{pp'}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$p = p + xp' - \frac{pp'}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$0 = xp' - \frac{pp'}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$0 = \left(x - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) p'.$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je nulová funkcia. Môžu teda nastať dve možnosti. Buď p' je identická nula alebo výraz $x - p/\sqrt{1 + p^2}$ je identická nula. V prvom prípade máme:

$$p' = 0 \implies p = C, \quad C \text{ je konštanta.}$$

Potom dostávame riešenie:

$$y = xC - \sqrt{1 + C^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

V druhom prípade dostaneme riešenie vyjadrené parametricky pomocou parametra p:

$$x - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \implies x = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Dosadením tohto vyjadrenia pre y potom máme:

$$y = xp - \sqrt{1+p^2} = \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} - \sqrt{1+p^2} = \frac{p^2-1-p^2}{\sqrt{1+p^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Teda riešenie má tvar:

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p \in (-\infty, \infty).$$

Túto integrálnu krivku vieme zapísať aj v explicitnom tvare. Platí totiž:

$$x^2 = \frac{p^2}{1+p^2}, \qquad y^2 = \frac{1}{1+p^2},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{p^2+1}{1+p^2} = 1,$$

a pre y platí:

$$y = -\sqrt{1-x^2},$$

nakoľko y nadobúda záporné hodnoty podľa parametrického vyjadrenia. Všeobecné riešenie zadanej rovnice teda je:

$$y = xC - \sqrt{1+C^2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}.$$

Chceme nájsť riešenie s vlastnosťou $y(-4) = -7$. Ľahko overíme, že nepôjde o druhé z riešení. To znamená, že hľadané partikulárne riešenie bude tvaru:

$$y = xC - \sqrt{1+C^2}$$

pre vhodnú konštantu C. Určíme ju:

$$-7 = -4C - \sqrt{1+C^2}.$$

Vyriešime túto rovnicu:

$$-7 = -4C - \sqrt{1+C^2},$$

$$7 - 4C = \sqrt{1+C^2},$$

$$
\begin{gathered}
(7-4C)^2 = 1 + C^2, \\
49 - 56C + 16C^2 = 1 + C^2, \\
15C^2 - 56C + 48 = 0, \\
C_{1,2} = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 15 \cdot 48}}{30} = \frac{56 \pm \sqrt{256}}{30} = \frac{56 \pm 16}{30}, \\
C_1 = 72/30 = 12/5, \qquad C_2 = 40/30 = 4/3.
\end{gathered}
$$

Urobili sme neekvivalentnú úpravu (umocňovanie na druhú), a preto je treba korene overiť. Zistíme, že koreň C_1 nevyhovuje. Preto $C = 4/3$ a hľadané partikulárne riešenie je:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Príklad 3

$$2yy' = x(1 + (y')^2) + (y')^4 + 3(y')^2.$$

Riešenie:
Z rovnice sa dá vyjadriť napríklad y:

$$y = x\left(\frac{1 + (y')^2}{2y'}\right) + \frac{(y')^3 + 3y'}{2}.$$

Touto úpravou sme nestratili žiadne riešenie, nakoľko $y' \neq 0$ pre riešenie $y(x)$ rovnice v zadaní (overte). Dostali sme Lagrangeovu rovnicu. Zavedieme parameter $p = y' \neq 0$ a následne celú rovnicu zderivujeme podľa premennej x:

$$
\begin{gathered}
y = x\left(\frac{1+p^2}{2p}\right) + \frac{p^3 + 3p}{2}, \\
y = x\left(\frac{1+p^2}{2p}\right) + \frac{p^3 + 3p}{2}, \quad / \quad \mathrm{d}/\mathrm{d}x \\
y' = p = \frac{1+p^2}{2p} + x\left(\frac{p^2-1}{2p^2}\right)p' + 3\left(\frac{p^2+1}{2}\right)p', \\
p - \frac{1+p^2}{2p} = \left(x \cdot \frac{p^2-1}{2p^2} + \frac{3(p^2+1)}{2}\right)p', \\
\frac{p^2-1}{2p} = \left(x \cdot \frac{p^2-1}{2p^2} + \frac{3(p^2+1)}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.
\end{gathered}
$$

Za predpokladu $p^2 - 1 \neq 0$ platí, že $p' \neq 0$, a teda k funkcii $p = p(x)$ existuje funkcia inverzná $x = x(p)$. Preto môžeme v poslednej rovnici využiť trik zámeny premenných x, p:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{p^2-1}{2p} = x \cdot \frac{p^2-1}{2p^2} + \frac{3(p^2+1)}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \left[x \cdot \frac{p^2-1}{2p^2} + \frac{3(p^2+1)}{2}\right] \cdot \frac{2p}{p^2-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{x}{p} + \frac{3p(p^2+1)}{p^2-1},$$

$$x' - \frac{x}{p} = \frac{3p(p^2+1)}{p^2-1}.$$

Dostali sme LDR I. rádu s neznámou funkciou $x = x(p)$ (pripomíname, že x je teraz závislá premenná a p nezávislá premenná). Túto rovnicu vyriešime metódou integračného faktora. Príslušný integračný faktor je:

$$\mathrm{e}^{-\int 1/p \,\mathrm{d}p} = \frac{1}{p}.$$

Teda ak ním vynásobíme rovnicu, dostaneme:

$$\frac{x'}{p} - \frac{x}{p^2} = \frac{3(p^2+1)}{p^2-1},$$

$$\left(\frac{x}{p}\right)' = \frac{3(p^2+1)}{p^2-1},$$

$$\frac{x}{p} = \int \frac{3(p^2+1)}{p^2-1}\,\mathrm{d}p.$$

Vypočítame príslušný neurčitý integrál:

$$\int \frac{3(p^2+1)}{p^2-1}\,\mathrm{d}p = 3\int \left(1 + \frac{2}{p^2-1}\right)\mathrm{d}p = 3\int \left(1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)\mathrm{d}p =$$

$$= 3p + 3\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right| + C.$$

Pre x teda platí:

$$x = 3p^2 + 3p\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right| + Cp.$$

Dosadením tohto vyjadrenia do výrazu pre y dostaneme (po úpravách):

$$y = x\left(\frac{1+p^2}{2p}\right) + \frac{p^3+3p}{2} =$$

$$= p(2p^2+3) + \frac{C}{2}(p^2+1) + \frac{3}{2}(p^2+1)\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right|.$$

Získali sme riešenie určené parametricky, avšak za predpokladu $p^2 - 1 \neq 0$ a $p \neq 0$ (pozri diskusiu v úvode príkladu pri zavádzaní p). Pozrime sa teraz na prípad $p^2 - 1 = 0$. Platí $p = 1$, resp. $p = -1$. Ak $p = 1$, potom $p' = 0$ a rovnica

$$\frac{p^2-1}{2p} = \left(x \cdot \frac{p^2-1}{2p^2} + \frac{3(p^2+1)}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

je splnená. Analogický záver platí i pre $p = -1$. Príslušné odpovedajúce riešenia $y(x)$ rovnice v zadaní príkladu sú:

$$p = 1 \implies y = x + 2,$$

$$p = -1 \implies y = -x - 2.$$

Tieto funkcie dostaneme dosadením príslušnej hodnoty parametra p do vyjadrenia y pomocou p v úvode príkladu. Množina všetkých riešení pôvodnej rovnice má teda tvar:

$$y = x + 2, \qquad y = -x - 2,$$

$$x = 3p^2 + 3p\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right| + Cp,$$

$$y = p(2p^2+3) + \frac{C}{2}(p^2+1) + \frac{3}{2}(p^2+1)\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \neq \pm 1,\, 0.$$

Neriešené príklady

1. $y = xy'(y'+2)$.
2. $y = \ln(1-(y')^2)$.
3. $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

4. $y\sqrt{1+(y')^2} = y'$.

5. $y = xy' - 4(y')^2$.

6. $2y = \frac{x(y')^2}{y+2}$.

Návod:
V úlohách 3. a 6. vyjadrite x a po zavedení parametra rovnicu derivujte podľa premennej y. Nestraťte riešenia! :)