Príklady na precvičovanie – LDR n-tého rádu s konštantnými koeficientami, Eulerova DR

Riešené príklady

Príklad 1

$$y'' - 7y' + 10y = -\mathrm{e}^{2x}(6x+7).$$

Riešenie:
Vyriešime najprv odpovedajúcu homogénnu rovnicu, t.j.

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Ide o LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi. Jej charakteristická rovnica je:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Ľahko nájdeme jej korene: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Preto máme dve lineárne nezávislé riešenia

$$\mathrm{e}^{2x}, \quad \mathrm{e}^{5x},$$

ktoré tvoria fundamentálny systém. Všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice teda má tvar:

$$y_H = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

K nájdeniu všeobecného riešenia pôvodnej nehomogénnej rovnice nám stačí nájsť jedno jej partikulárne riešenie. Odhadneme ho vďaka vhodnému tvaru pravej strany rovnice (koeficient 2 v exponente e^{2x} je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice):

$$y_P = x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}.$$

Neznáme koeficienty A, B určíme metódou neurčitých koeficientov – funkciu y_P dosadíme do nehomogénnej rovnice a porovnáme obe strany rovnice. Po výpočte dostaneme hodnoty: $A = 1$, $B = 3$. Teda všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice je:

$$y = y_H + y_P = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{5x} + x(x+3)\mathrm{e}^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2

$$y^{(4)} + y'' = 7x - 3\cos x.$$

Riešenie:
Nájdeme všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Charakteristická rovnica:

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0.$$

Jej korene sú: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \mathrm{i}$, $\lambda_4 = -\mathrm{i}$. Celkovo máme 4 lineárne nezávislé riešenia tvoriace fundamentálny systém (0 je dvojnásobný koreň, $0 + \mathrm{i}$, $0 - \mathrm{i}$ sú dva komplexne združené korene):

$$\mathrm{e}^{0\cdot x} = 1, \quad x\mathrm{e}^{0\cdot x} = x,$$

$$\mathrm{e}^{0\cdot x}\sin x = \sin x, \quad \mathrm{e}^{0\cdot x}\cos x = \cos x.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar:

$$y_H = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \sin x + C_4 \cos x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Odhadneme partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice, pričom využijeme princíp superpozície, keďže pravá strana je súčtom dvoch odlišných výrazov. Výrazu $7x = 7x \cdot \mathrm{e}^{0\cdot x}$ odpovedá partikulárne riešenie tvaru:

$$x^2(Ax + B),$$

keďže číslo 0 v exponente $\mathrm{e}^{0\cdot x}$ je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice. Výrazu $-3\cos x = (-3 \cdot \cos(1 \cdot x) + 0 \cdot \sin(1 \cdot x)) \cdot \mathrm{e}^{0\cdot x}$ odpovedá partikulárne riešenie tvaru:

$$x(C \sin x + D \cos x),$$

nakoľko číslo $0 + 1 \cdot \mathrm{i}$ je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice. Partikulárne riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice budeme teda uvažovať v tvare:

$$y_P = x^2(Ax + B) + x(C \sin x + D \cos x).$$

Po dosadení do rovnice a po porovnaní dostaneme takéto hodnoty koeficientov:

$$A = 7/6, \quad B = 0, \quad C = 3/2, \quad D = 0.$$

Všeobecné riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice má teda tvar:

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x \sin x,$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \mathrm{e}.$$

Riešenie:
Nájdeme všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice. Charakteristická rovnica:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Má dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2} = 1$. Preto všeobecné riešenie homogénnej časti bude:

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice nájdeme metódou variácie konštánt. Budeme ho predpokladať v tvare:

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x) x \mathrm{e}^x,$$

kde neznáme funkcie $C_1(x)$, $C_2(x)$ získame zo sústavy:

$$C_1' \cdot \mathrm{e}^x + C_2' \cdot x\mathrm{e}^x = 0,$$

$$C_1' \cdot (\mathrm{e}^x)' + C_2' \cdot (x\mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Po vykonaní naznačených derivácií dostaneme:

$$C_1' \cdot \mathrm{e}^x + C_2' \cdot x\mathrm{e}^x = 0$$

$$C_1' \cdot \mathrm{e}^x + C_2' \cdot \mathrm{e}^x(1 + x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Z tejto sústavy vyjadríme derivácie C_1', C_2':

$$C_1' = -1, \qquad C_2' = \frac{1}{x}.$$

Teda pre funkcie C_1, C_2 platí:

$$C_1(x) = -x + K_1, \qquad C_2(x) = \ln|x| + K_2.$$

Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice má preto tvar:

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)x\mathrm{e}^x =$$

$$= K_1\mathrm{e}^x + K_2x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \ln|x|, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Chceme nájsť riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky:

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = \mathrm{e}.$$

Vyjadríme si deriváciu y':

$$y' = K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^x(1+x) - \mathrm{e}^x(1+x) + \mathrm{e}^x(\ln|x| + x\ln|x| + 1).$$

Po dosadení $x = 1$ do výrazov pre y a y', a položiac $y(1) = 0$ a $y'(1) = 0$, dostaneme sústavu pre neznáme konštanty K_1, K_2:

$$K_1\mathrm{e} + K_2\mathrm{e} - \mathrm{e} = 0,$$

$$K_1\mathrm{e} + 2K_2\mathrm{e} - \mathrm{e} = \mathrm{e}.$$

Má jediné riešenie $K_1 = 0$, $K_2 = 1$. Preto hľadané riešenie zadanej rovnice spĺňajúce uvedené začiatočné podmienky je:

$$y = x\mathrm{e}^x \ln|x|.$$

Príklad 4

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x.$$

Riešenie:

Ide o Eulerovu diferenciálnu rovnicu s pravou stranou. Zavedením novej nezávislej premennej $t = \ln x$ prevedieme túto rovnicu na LDR tretieho rádu s konštantnými koeficientami a s pravou stranou. Potrebujeme vyjadriť derivácie $y = y(t)$ podľa novej premennej t; derivácie podľa novej premennej t budeme pre jednoduchosť označovať takto:

$$y^{[1]} := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad y^{[2]} := \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \quad y^{[3]} := \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}.$$

Vypočítame ich buď postupným derivovaním zloženej funkcie $y(t(x))$, kde $t = \ln x$, alebo využijeme už hotové formulky pre vyjadrenie členov na ľavej strane pôvodnej rovnice (pozri nižšie):

$$xy' = y^{[1]},$$

$$x^2y'' = y^{[2]} - y^{[1]},$$
$$x^3y''' = y^{[3]} - 3y^{[2]} + 2y^{[1]}.$$

V tomto príklade uprednostníme prvý, ťažší spôsob :), aby sme získali istú predstavu, ako boli vyššie uvedené formulky získané. Potrebujeme substituovať derivácie y', y'', y''', teda vyjadriť ich pomocou derivácií $y^{[1]}$, $y^{[2]}$, $y^{[3]}$ podľa t. Treba si uvedomiť, že funkciu y možno chápať ako zloženú funkciu $y = y(t(x))$, kde $t = \ln x$. Takže platí (deriváciu y podľa x budeme značiť čiarkami):

$$y' = \frac{\mathrm{d}y(t(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y(t(x))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = y^{[1]} \cdot t' = y^{[1]} \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'(t(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y^{[1]} \cdot \frac{1}{x}\right] = \frac{\mathrm{d}y^{[1]}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{x} - y^{[1]} \cdot \frac{1}{x^2} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}y^{[1]}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{x} - y^{[1]} \cdot \frac{1}{x^2} = y^{[2]} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - y^{[1]} \cdot \frac{1}{x^2} = \left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''(t(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{1}{x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}\left(y^{[2]} - y^{[1]}\right)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{x^2} -$$
$$- \left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{\mathrm{d}\left(y^{[2]} - y^{[1]}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{x^2} - \left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{2}{x^3} =$$
$$= \left(y^{[3]} - y^{[2]}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{2}{x^3} = \left(y^{[3]} - 3y^{[2]} + 2y^{[1]}\right) \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Platí teda:

$$y' = y^{[1]} \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \left(y^{[2]} - y^{[1]}\right) \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$y''' = \left(y^{[3]} - 3y^{[2]} + 2y^{[1]}\right) \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Po dosadení do pôvodnej rovnice a zámene $x = \mathrm{e}^t$ dostaneme:

$$y^{[3]} - 3y^{[2]} + 2y^{[1]} - (y^{[2]} - y^{[1]}) + 2y^{[1]} - 2y = \mathrm{e}^{3t} + 3\mathrm{e}^t,$$

$$y^{[3]} - 4y^{[2]} + 5y^{[1]} - 2y = \mathrm{e}^{3t} + 3\mathrm{e}^t.$$

Dostali sme LDR tretieho rádu s konštantnými koeficientmi a s pravou stranou. Charakteristická rovnica

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

má korene: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$. Postupujeme tradičným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch. Dostaneme všeobecné riešenie novej nehomogénnej rovnice:

$$y = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^t + C_3 t\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{3}{2}\,t^2\mathrm{e}^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Spätne dosadíme $t = \ln x$ a tým získame všeobecné riešenie rovnice v zadaní:

$$y = C_1x^2 + C_2x + C_3x\ln x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}\,x\ln^2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Neriešené príklady

1. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y''' + y'' + 8y' + 4y = 0.$
2. $y'' - 7y' + 10y = 20x^2 - 28x + 14.$
3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$
4. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$
5. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}.$
6. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + \sin 2x.$
7. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$

8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$.

9. $x^3y''' - 2xy' = 0$.

10. $(x+1)^2y'' + (x+1)y' + y = x^2 + 2\sin[\ln(1+x)]$.

Poznámka k Eulerovej DR

Pripomeňme, že Eulerova diferenciálna rovnica má všeobecný tvar:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

kde a, b, a_1, $\ldots$, $a_n \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Túto rovnicu zavedením novej nezávislej premennej

$$t = \ln(ax+b)$$

prevedieme na LDR n-tého rádu s konštantnými koeficientmi, pričom neznámu funkciu y budeme hľadať ako funkciu premennej t. Derivácie $y^{(i)}$ podľa premennej x vyjadríme pomocou derivácií $y^{[i]}$ podľa premennej t; môžeme ich vyjadrovať buď postupne, ako sme to robili v poslednom riešenom príklade, alebo využijeme skutočnosť:

$$(ax+b)^i y^{(i)} = a^i \cdot y^{[1]} \times (y^{[1]} - 1) \times (y^{[1]} - 2) \times \cdots \times (y^{[1]} - (i-1)),$$

kde symbolické násobenie $\times$ znamená klasické roznásobenie zátvoriek, avšak namiesto mocnín uvažujeme derivácie, t.j. $y^{[i]} \times y^{[j]} = y^{[i+j]}$. Napríklad:

$$y^{[1]} \times (y^{[1]} - 1) = y^{[1]} \times y^{[1]} - y^{[1]} = y^{[2]} - y^{[1]},$$

$$\begin{aligned} y^{[1]} \times (y^{[1]} - 1) \times (y^{[1]} - 2) &= y^{[1]} \times (y^{[1]} \times y^{[1]} - 2y^{[1]} - y^{[1]} + 2) = \\ &= y^{[1]} \times (y^{[2]} - 3y^{[1]} + 2) = y^{[3]} - 3y^{[2]} + 2y^{[1]}. \end{aligned}$$

Uvedená formulka sa dá samozrejme dokázať napr. pomocou matematickej indukcie vzhľadom na rád derivácie i.