Príklady na precvičovanie – izogonálne trajektórie

V niektorých situáciach sa rieši nasledovná úloha. V rovine máme danú jednoparametrickú sústavu čiar popísanú rovnicou

$$F(x, y, C) = 0,$$

kde C je reálny parameter. Rozumieme tomu tak, že každou konkrétnou voľbou konštanty C dostaneme rovnicu jednej čiary. Podstatné je, aby sa pre rôzne hodnoty parametra C tieto čiary vzájomne nepretínali. Zväčša ide o sústavu integrálnych kriviek nejakej diferenciálnej rovnice I. rádu. Našou úlohou je nájsť krivku, ktorá každú čiaru tejto sústavy pretína podľa nejakého pravidla. Takejto krivke sa hovorí *trajektória* danej sústavy. Dôležitým typom trajektórii sú tzv. *izogonálne trajektórie* – každú čiaru našej sústavy pretínajú pod rovnakým uhlom $\varphi \in [0, \pi/2]$. Pod uhlom dvoch kriviek sa myslí uhol ich príslušných dotyčníc zostrojených v ich priesečníku. Ak daný uhol je pravý, vtedy hovoríme o ortogonálnych trajektóriach.

Treba si uvedomiť, že pre uhol $\varphi \neq \pi/2$, $\varphi \neq 0$ k danej sústave čiar existujú vždy dve rôzne sústavy izogonálnych trajektórií pretínajúcich čiary sústavy pod uhlom φ; sústava ortogonálnych trajektórií (t.j. pre $\varphi = \pi/2$) existuje vždy len jedna. Premyslite si to. Nakreslite si do roviny priamku. Koľko priamok zviera s ňou v danom bode uhol s veľkosťou povedzme $\pi/6$? A koľko priamok zviera s ňou v danom bode pravý uhol?

Izogonálne trajektórie (a to najmä ortogonálne trajektórie) majú široké uplatnenie napríklad vo fyzike, v teórii polí. Napríklad ak máme dané nejaké rovinné silové pole, tak jeho siločiary predstavujú našu sústavu čiar. Ekvipotenciálne krivky tohto poľa (množiny bodov s rovnakým potenciálom) sú potom ortogonálne trajektórie sústavy siločiar.
(To, že je v rovine rozložené nejaké silové pole, si môžeme zhruba predstaviť takto. Ak do nejakého bodu roviny položíme malinkú loptičku, neostane v kľude, ale začne sa (zdanlivo sama od seba) pohybovať. To je znak prítomnosti istého silového pôsobenia v rovine – rovinného silového poľa (dobrý príklad je magnetické pole). Čiaram, ktoré loptička pri svojom pohybe opisuje, hovoríme siločiary daného rovinného poľa. Na základe ich rozmiestnenia a tvaru vieme dané silové pole identifikovať; loptičku natrieme trebárs čiernou farbou a pri svojom pohybe v rovine bude zanechávať dobre viditeľnú stopu a my dostaneme pekný obraz silového pôsobenia. Napr. centrálne príťažlivé silové pole so zdrojom v bode $[0, 0]$ poznáme tak, že loptička sa začne pohybovať priamočiaro k bodu $[0, 0]$, nech ju umiestnime kdekoľvek do roviny.

Stopy, ktoré bude zanechávať, ak budeme meniť jej začiatočnú polohu, budú priamky prechádzajúce bodom $[0, 0]$. No a potenciál silového poľa nie je nič iné, ako energia, ktorú musíme vynaložiť proti pôsobeniu silového poľa, aby sme našu loptičku udržali v danom bode roviny v kľude. Iste v rôznych bodoch bude loptička rôzne neposedná a my budeme musieť na jej ukľudnenie vynaložiť rôznu energiu. Ak si zaznačíme polohy, v ktorých sme vynaložili vždy rovnakú energiu na skrotenie loptičky, a tieto polohy pospájame, dostaneme tzv. ekvipotenciálne krivky daného poľa.)

Izogonálne trajektórie danej sústavy čiar získame nasledovným spôsobom:

- z rovnice $F(x, y, C) = 0$ vyjadríme parameter C, čím dostaneme rovnicu:
$$C = G(x, y).$$
- zistíme prvé parciálne derivácie funkcie $G(x, y)$ podľa premenných x, y
$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}.$$
- v prípade, ak uhol $\varphi \neq \pi/2$, izogonálne trajektórie sú všeobecným riešením nasledovných diferenciálnych rovníc:
$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi\right) y' = \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x},$$
resp.
$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi\right) y' = -\frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}.$$
(pripomeňme, že v tomto prípade existujú dve sústavy izogonálnych trajektórií)
- ak $\varphi = \pi/2$, potom ortogonálne trajektórie sú všeobecným riešením nasledovnej diferenciálnej rovnice:
$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} y' = 0.$$

Riešené príklady

Príklad 1

Nájdime izogonálne trajektórie sústavy čiar:

$$x^2 + y^2 = 2Cx, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Riešenie:
Vyjadríme parameter C:

$$C = \frac{x^2 + y^2}{2x} \Longrightarrow G(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Spočítame parciálne derivácie:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2x^2},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

Zostavíme diferenciálne rovnice izogonálnych trajektórií ($\operatorname{tg} \pi/4 = 1$):

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{1}{2}\right) y',$$

resp.

$$-\left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2x^2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\right) y'.$$

Stačí už len vyriešiť tieto rovnice. Ľahko sa presvedčíme, že obe rovnice sú homogénne (ak vyjadríme y'). Všeobecné riešenie prvej má tvar:

$$y - x = C(x^2 + y^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie druhej rovnice je:

$$y + x = C(x^2 + y^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pre uhol $\varphi = \pi/4$ existujú preto dve sústavy izogonálnych trajektórií:

$$y - x = C(x^2 + y^2), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y + x = C(x^2 + y^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Príklad 2

Nájdime ortogonálne trajektórie sústavy čiar:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C.$$

Riešenie:

Vidíme, že parameter C máme už priamo vyjadrený, takže funkcia $G(x, y)$ je:

$$G(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Parciálne derivácie sú:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{x}{2},$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{2y}{9}.$$

Zostavíme rovnicu ortogonálnych trajektórií (bude len jedna):

$$\frac{2y}{9} - \frac{x}{2} y' = 0.$$

Ide o jednoduchú separovateľnú rovnicu. Jej všeobecné riešenie je:

$$y = Cx^{4/9}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

To je zároveň sústava ortogonálnych trajektórií (pokúste sa nakresliť sústavu čiar v zadaní, a potom do toho istého obrázka aj príslušné ortogonálne trajektórie).

Neriešené príklady

Spočítajte si príklady zo zbierky P. Hasila a P. Zemánka, výsledky sú tam aj graficky znázornené. V príkladoch je nájdená vždy len jedna sústava (v prípade $\varphi \neq \pi/2$) izogonálnych trakjektórií, konkrétne pre rovnicu:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi \right) y' = \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Pri niektoých príkladoch si skúste zrátať aj druhú sústavu trajektórií, t.j. pomocou rovnice:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi\right) y' = -\frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}.$$