Príklady na precvičovanie – lokálne, globálne a viazané extrémy funkcií viac premenných

Riešené príklady – lokálne extrémy

Príklad 1

Určte všetky lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Riešenie:

Funkcia f má parciálne derivácie prvého rádu vo všetkých bodoch svojho definičného oboru, preto sa lokálne extrémy môžu nadobúdať iba v stacionárnych bodoch. Zistíme teda, kde sa nulujú prvé parciálne derivácie funkcie f:

$$f'_x = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x^2 = \frac{1}{4} \implies x = \pm\frac{1}{2},$$

$$f'_y = -1 + \frac{1}{y^2} = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1.$$

Máme preto 4 stacionárne body, a to $[1/2,\ 1]$, $[-1/2,\ -1]$, $[-1/2,\ 1]$ a $[1/2,\ -1]$. Vyšetríme definitnosť hessiánu $H(x,y)$ funkcie f v týchto bodoch. Výpočtom druhých parciálnych derivácií funkcie f dostaneme:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Pre jednotlivé stacionárne body potom platí:

$$H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinitná,}$$

$$H\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ indefinitná,}$$

$$H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$H\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Záver je teda taký, že v bodoch $[1/2,\ 1]$ a $[-1/2,\ -1]$ lokálny extrém nenastáva, v bode $[-1/2,\ 1]$ je ostré lokálne maximum s hodnotou $f(-1/2,\ 1) = -6$ a v bode $[1/2,\ -1]$ je ostré lokálne minimum s hodnotou $f(1/2,\ -1) = 6$.

Príklad 2

Určte všetky lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x, y, z > 0.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Stanovíme stacionárne body funkcie f:

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \implies 4x^2 = y^2,$$

$$f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \implies y^3 = 2xz^2,$$

$$f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \implies z^3 = y.$$

Z prvej rovnice využitím podmienky $x, y > 0$ dostaneme po odmocnení $2x = y$. Dosadením za y z tretej rovnice máme $2x = z^3$. Vyjadrenia $2x = z^3$ a $y = z^3$ napokon dosadíme do druhej rovnice a dostaneme (využijeme fakt, že $z > 0$):

$$z^6 = z^5 \implies z = 1.$$

Potom $2x = 1$, teda $x = 1/2$ a $y = 1$. Máme teda jeden stacionárny bod $[1/2,\ 1,\ 1]$. Pozrieme sa na Hessovu maticu $H(x, y, z)$ v tomto bode. Všeobecne platí:

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{x^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}.$$

Dosadením daného stacionárneho bodu dostaneme číselnú maticu a podľa hlavných minorov zistíme jej definitnosť:

$$H\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} > 0.$$

Preto v bode [1/2, 1, 1] má funkcia f ostré lokálne minimum s hodnotou $f(1/2,\,1,\,1) = 4$.

Príklad 3
Určte všetky lokálne extrémy funkcií

$$\text{a) } f(x,y) = x^2 + y^3, \quad \text{b) } g(x,y) = x^2 + y^4.$$

Riešenie:
a) Nie je ťažké zistiť, že funkcia f má jediný stacionárny bod $[0,0]$, nakoľko:

$$f'_x = 2x = 0, \quad f'_y = 3y^2 = 0.$$

Príslušný hessián má tvar:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

V bode $[0,0]$ máme:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica $H(0,0)$ má vlastné čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Je preto pozitívne semidefinitná, ale nie je pozitívne definitná. V tomto prípade nevieme pomocou hessiánu rozhodnúť, či v bode $[0,0]$ je extrém. Musíme využiť priamo definíciu lokálneho extrému. Platí $f(0,0) = 0$. Ukážeme, že v každom okolí bodu $[0,0]$ existuje bod $[x_1,y_1]$ taký, že $f(x_1,y_1) > 0$, a bod $[x_2,y_2]$ taký, že $f(x_2,y_2) < 0$. Pre $\varepsilon > 0$ uvažujme okolie O_ε bodu $[0,0]$ tvaru $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ (okolie indukované euklidovskou metrikou ρ_2). Potom body $[x_1,y_1] := [0,\varepsilon/2]$ a $[x_2,y_2] := [0,-\varepsilon/2]$ iste patria do okolia O_ε (overte). Naviac:

$$f(x_1,y_1) = \frac{\varepsilon^3}{8} > 0 \quad \text{a} \quad f(x_2,y_2) = -\frac{\varepsilon^3}{8} < 0.$$

Tento záver platí pre ľubovoľné (malé) $\varepsilon > 0$ – inými slovami, pre každé okolie O_ε bodu $[0,0]$. Preto v bode $[0,0]$ nenastáva lokálny extrém funkcie f.

b) Navlas rovnakou úvahou zistíme, že g má jediný stacionárny bod $[0,0]$. Pre príslušnú Hessovu maticu platí:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihneď vidíme vlastné čísla matice $H(0,0)$, konkrétne $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Preto je táto matica opäť pozitívne semidefinitná, ale nie je pozitívne definitná. Musíme teda využiť definíciu lokálneho extrému. Platí $g(0,0) = 0$. Ďalej pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ máme $g(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$. Preto iste existuje nejaké okolie bodu $[0,0]$ tak, že $g(x,y) \geq f(0,0)$ pre každý bod $[x,y]$ z tohto okolia. To znamená, že v bode $[0,0]$ má funkcia g lokálne minimum s hodnotou $g(0,0) = 0$ (toto lokálne minimum je ostré, prečo? :)).

Riešené príklady – globálne extrémy

Príklad 4

Určte najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$$

na množine M ohraničenej priamkami $x = 0$, $y = 0$ a $x + y = 6$.

Riešenie:

Zakreslením množiny M zistíme, že sa jedná o vnútro a hranicu trojuholníka s vrcholmi v bodoch $A = [0,0]$, $B = [6,0]$ a $A = [0,6]$. Nájdeme stacionárne body funkcie f ležiace vo vnútri M:

$$f'_x = y^2(4 - x - y) - xy^2 = 0 \implies y^2(4 - x - y) = xy^2,$$

$$f'_y = 2xy(4 - x - y) - xy^2 = 0 \implies 2xy(4 - x - y) = xy^2.$$

Zaujímajú nás body $[x,y]$, ktoré riešia uvedenú sústavu a ležia vo vnútri M, t.j. $x >$ a $y > 0$. Môžeme preto prvú rovnicu krátiť y^2 a druhú rovnicu krátiť xy. Dostaneme (po úprave):

$$4 - x - y = x, \quad 8 - 2x - 2y = y.$$

Riešením je bod $[1,2]$, ktorý skutočne leží vo vnútri množiny M. Hodnota f v tomto bode je $f(1,2) = 4$. Skúmajme teraz funkčné hodnoty na hranici množiny M. Hranica ∂M pozostáva z troch častí:

- úsečka AB – $y = 0$ a $x \in [0,6]$ (symbol $[\ldots]$ teraz znamená uzavretý interval). Na úsečke AB platí $f(x,y) = f(x,0) = 0$, t.j. f je konštantná s hodnotou 0.

- úsečka AC – $x = 0$ a $y \in [0, 6]$. Na úsečke AC platí $f(x, y) = f(0, y) = 0$, t.j. f je opäť konštantná s hodnotou 0.
- úsečka CB – $y = 6 - x$ a $x \in [0, 6]$. Na úsečke CB platí $f(x, y) = f(x, 6-x) = -2x(x-6)^2$, t.j. f sa správa ako funkcia jednej premennej x; označíme ju $g(x) := -2x(x-6)^2$. Je potrebné nájsť globálne extrémy funkcie g na uzavretom intervale $[0, 6]$. Platí:

  $$g'(x) = -2(x-6)(3x-6) = 0 \Longrightarrow x_1 = 6, \quad x_2 = 2.$$

  V intervale $(0, 6)$ má g teda len jeden stacionárny bod $x_2 = 2$ s hodnotou $g(2) = -64$. V reči funkcie f sa jedná o bod $[2, 4]$ a $f(2, 4) = -64$. V krajných bodoch intervalu $[0, 6]$ platí $g(0) = f(C) = f(0, 6) = 0$ a $g(6) = f(B) = f(6, 0) = 0$.

Vidíme teda, že globálne maximum funkcie f sa nadobúda v bode $[1, 2]$ a jeho hodnota je $f(1, 2) = 4$, kým globálne minimum funkcie f sa nadobúda v bode $[2, 4]$ s hodnotou $f(2, 4) = -64$.

Príklad 5

Určte najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$$

na množine M, ktorá je tvorená vnútrom a hranicou kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Množina M je kruh so stredom v bode $[0, 0]$ a s polomerom 4. Nájdeme stacionárne body funkcie f vo vnútri tohto kruhu:

$$f'_x = -2x = 0, \quad f'_y = -2y + 2 = 0.$$

Máme jeden stacionárny bod $[0, 1]$ ležiaci vo vnútri M. Hodnota funkcie f v ňom je $f(0, 1) = 1$. Ďalej sa pozrieme na maximálnu a minimálnu hodnotu funkcie f na hranici množiny M, t.j. na kružnici $x^2 + y^2 = 16$. Pozostáva z dvoch častí:

- horná polkružnica – $y \geq 0$, teda $y = \sqrt{16 - x^2}$. Funkcia f sa správa ako funkcia jednej premennej x:

  $$g(x) = f(x, \sqrt{16 - x^2}) = -16 + 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

Hľadáme teda globálne extrémy funkcie g na uzavretom intervale $[-4, 4]$. Nájdeme stacionárne body funkcie g v intervale $(-4, 4)$:

$$g'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0, \Longrightarrow x = 0.$$

Hodnota g v bode $x = 0$ je $g(0) = -8$. Z hľadiska funkcie f sa jedná o bod $[0, \sqrt{16 - 0^2}] = [0, 4]$ a $f(0, 4) = -8$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ platí $g(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $g(4) = f(4, 0) = -16$.

- dolná polkružnica – $y \leq 0$, teda $y = -\sqrt{16 - x^2}$. Postupujeme navlas rovnako. Funkcia f sa správa ako funkcia jednej premennej x

$$h(x) = f(x, -\sqrt{16 - x^2}) = -16 - 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

Hľadáme globálne extrémy funkcie h na uzavretom intervale $[-4, 4]$. Nájdeme stacionárne body funkcie h v intervale $(-4, 4)$:

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0, \Longrightarrow x = 0.$$

Hodnota h v bode $x = 0$ je $h(0) = -24$. V reči funkcie f sa jedná o bod $[0, -\sqrt{16 - 0^2}] = [0, -4]$ a $f(0, -4) = -24$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ platí $h(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $h(4) = f(4, 0) = -16$.

Záver je teda taký, že globálne maximum funkcie f na množine M je hodnota 1 a nadobúda sa v bode $[0, 1]$, a globálne minimum funkcie f na množine M je hodnota -24 a nadobúda sa v bode $[0, -4]$.

Príklad 6

Pomocou vrstevníc funkcie f určte najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = x + y$$

na množine M tvaru

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| \leq 1, \ |y| \leq 1 \right\}.$$

Riešenie:

Nakreslíme si množinu M. Je to štvorec s vrcholmi v bodoch $A = [-1, -1]$, $B = [1, -1]$, $C = [1, 1]$ a $D = [-1, 1]$. Vrstevnice funkcie f majú tvar:

$$f(x, y) = c, \quad c \text{ je zafixované} \quad \Longrightarrow \quad x + y = c.$$

Sú to teda priamky rovnobežné s osou druhého a štvrtého kvadrantu (t.j. priamkou $y = -x$), pričom vrstevnica odpovedajúca danému c prechádza bodmi $[0, c]$ a $[c, 0]$. Všimnime si, že poloha vrstevnice $x+y = c$ priamo určuje hodnotu f – všade na vrstevnici $x + y = c$ má f rovnakú hodnotu rovnú c. Nás zaujímajú iba vrstevnice, ktoré prechádzajú cez náš štvorec M. Nie je ťažké si uvedomiť, že posunom vrstevníc smerom od vrchola C k vrcholu A bude hodnota parametra c *klesať*. Teda maximálne c je pre vrstevnicu prechádzajúcu vrcholom $C = [1, 1]$, a v tomto prípade $c = 1 + 1 = 2$. Na vrstevnici $x+y = 2$ bude preto funkcia f nadobúdať svoju najväčšiu hodnotu rovnú 2. Podobne, minimálne c je pre vrstevnicu prechádzajúcu vrcholom $A = [-1, -1]$ a platí $c = -1 - 1 = -2$. Preto najmenšia hodnota funkcie f na množine M je rovná -2.

Metóda vrstevníc je užitočnou metódou pri zisťovaní globálnych extrémov funkcií v prípade, ak vrstevnice sú pomerne jednoduché krivky, napr. priamky, kružnice. Metóda funguje i pre funkcie troch a viac premenných (i keď v prípade funkcií viac ako 3 premenných ťažko znázorniteľná :)). Poznamenajme, že dostaneme samozrejme rovnaké výsledky, ak by sme nasadili obvyklý aparát prezentovaný v predchádzajúcich príkladoch.

Riešené príklady – viazané extrémy

Príklad 7

Určte viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y) = \sqrt{3}\,x - y + 2$$

za prítomnosti väzby $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť metódou Lagrangeovych multiplikátorov. Zostavíme Lagrangeovu funkciu L prislúchajúcu funkcii f a danej väzbe:

$$L(x, y) = \sqrt{3}\,x - y + 2 + \lambda(x^2 + 2x + y^2).$$

Nájdeme stacionárne body funkcie L a neznámy multiplikátor λ. Platí:

$$L'_x = \sqrt{3} + 2\lambda x + 2\lambda = 0 \implies x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2\lambda},$$

$$L'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \implies y = \frac{1}{2\lambda}.$$

Tieto vyjadrenia neznámych x, y pomocou λ dosadíme do väzbovej podmienky a dostaneme (väzbovú podmienku si kvôli zjednodušeniu výpočtov upravíme na štvorec):

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 &= 0, \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1, \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 &= 1, \\ \frac{1}{\lambda^2} = 1 &\implies \lambda = \pm 1. \end{aligned}$$

Pre hodnotu $\lambda_1 = 1$ máme stacionárny bod $A_1 = [-1 + \sqrt{3}/2,\ -1/2]$, kým pre $\lambda_2 = -1$ dostaneme stacionárny bod $A_2 = [-1 - \sqrt{3}/2,\ 1/2]$. Vyšetríme teraz definitnosť druhého diferenciálu d^2L v týchto bodoch za prítomnosti väzbovej podmienky. Vo všeobecnom bode platí:

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 2\lambda, \quad \implies \quad \mathrm{d}^2L = 2\lambda(\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda(\mathrm{d}y)^2.$$

Diferencujeme teraz väzbovú podmienku (pozri tiež poznámku na konci tohto dokumentu):

$$\mathrm{d}(x^2 + 2x + y^2) = 0 \implies 2x\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0 \implies (x+1)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0.$$

Zoberme si stacionárny bod $A_1 = [-1 + \sqrt{3}/2,\ -1/2]$ a $\lambda_1 = -1$. Platí:

$$\mathrm{d}^2L(A_1) = 2\lambda_1(\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda_1(\mathrm{d}y)^2 = -2(\mathrm{d}x)^2 - 2(\mathrm{d}y)^2.$$

Vzťah medzi prírastkami $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ určíme z diferencovanej väzbovej podmienky, do ktorej za x, y dosadíme súradnice stacionárneho bodu A_1:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}y = 0 \implies \mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x.$$

Dosadením vyjadrenia $\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x$ do druhého diferenciálu $\mathrm{d}^2L(A_1)$ dostaneme:

$$\mathrm{d}^2L(A_1) = -2(\mathrm{d}x)^2 - 2 \cdot 3(\mathrm{d}x)^2 = -8(\mathrm{d}x)^2 < 0.$$

Vidíme, že $\mathrm{d}^2L(A_1)$ je negatívne definitný, preto v bode $A_1 = [-1+\sqrt{3}/2,\ -1/2]$ má funkcia f viazané ostré lokálne maximum s hodnotou $f(-1+\sqrt{3}/2,\ -1/2) =$

$4-\sqrt{3}$. Podobným spôsobom vyšetríme i druhý stacionárny bod $A_2 = [-1-\sqrt{3}/2,\ 1/2]$ s $\lambda_2 = 1$. Postupne dostaneme:

$$\mathrm{d}^2L(A_2) = 2\lambda_2(\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda_2(\mathrm{d}y)^2 = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}y = 0 \implies \mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x.$$

Potom $\mathrm{d}^2L(A_2)$ nadobudne tvar:

$$\mathrm{d}^2L(A_2) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2\cdot 3(\mathrm{d}x)^2 = 8(\mathrm{d}x)^2 > 0.$$

Preto je $\mathrm{d}^2L(A_2)$ pozitívne definitný a v bode $A_2 = [-1-\sqrt{3}/2,\ 1/2]$ má funkcia f viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(-1-\sqrt{3}/2,\ 1/2) = -\sqrt{3}$.

Príklad 8

Určte viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

za prítomnosti väzby $xy = 1$.

Riešenie:

Postupujeme úplne rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade. Zostrojíme príslušnú Lagrangeovu funkciu L:

$$L(x,y) = \ln(x+y) + \lambda(xy-1).$$

Stanovíme stacionárne body funkcie L spĺňajúce danú väzbovú podmienku:

$$L'_x = \frac{1}{x+y} + \lambda y = 0 \implies -\frac{1}{x+y} = \lambda y,$$

$$L'_y = \frac{1}{x+y} + \lambda x = 0 \implies -\frac{1}{x+y} = \lambda x.$$

Z týchto dvoch rovníc napríklad máme $\lambda x = \lambda y$, z čoho $x = y$ ($\lambda \neq 0$, premyslite si prečo :)). Dosadením do väzbovej podmienky $xy = 1$ dostaneme $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$. Hodnota $x = -1$ nevyhovuje, nakoľko bod $[-1,-1]$ nepatrí do definičného oboru funkcie L (a ani funkcie f samozrejme). Funkcia L má teda jediný stacionárny bod $[1,1]$, ktorému odpovedá hodnota multiplikátora $\lambda = -1/2$, ako sa ľahko presvedčíme výpočtom. Aby sme sa dozvedeli, či v tomto bode má funkcia f viazaný lokálny extrém, je potrebné zostrojiť druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(1,1)$ s ohľadom na väzbovú podmienku $xy = 1$. Tak s chuťou do toho :). Stanovíme druhé parciálne derivácie funkcie L v bode $[1,1]$:

$$L''_{xx}(1,1) = \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)_{[1,1]} = -\frac{1}{4}, \quad L''_{yy}(1,1) = \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)_{[1,1]} = -\frac{1}{4},$$

$$L''_{xy}(1,1) = \left(-\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda\right)_{[1,1]} = -\frac{3}{4}.$$

Druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(1,1)$ má potom tvar:

$$\mathrm{d}^2L(1,1) = -\frac{1}{4}\,(\mathrm{d}x)^2 - \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\,(\mathrm{d}y)^2.$$

Diferencujeme ešte väzbovú podmienku a nájdeme vzťah medzi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ v bode $[1,1]$. Platí:

$$\mathrm{d}(xy-1) = 0 \implies y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0 \overset{x=y=1}{\implies} \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x.$$

Dosadíme do vyjadrenia pre $\mathrm{d}^2L(1,1)$ a stanovíme jeho definitnosť:

$$\mathrm{d}^2L(1,1) = -\frac{1}{4}\,(\mathrm{d}x)^2 + \frac{3}{2}\,(\mathrm{d}x)^2 - \frac{1}{4}\,(\mathrm{d}x)^2 = (\mathrm{d}x)^2 > 0.$$

Druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(1,1)$ je teda pozitívne definitný, a preto má funkcia f v bode $[1,1]$ viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(1,1) = \ln 2$.

Poznamenajme, že úloha sa dala riešiť i tak, že z väzbovej podmienky $xy = 1$ vyjadríme premenú $y = 1/x$. Následným dosadením do funkcie $f(x,y)$ získame funkciu jednej premennej $g(x) = f(x,\,1/x) = \ln(x + \frac{1}{x})$ a štandarným spôsobom hľadáme jej lokálne extrémy. Overte, že dostaneme rovnaký výsledok :).

Príklad 9

Určte viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

za prítomnosti väzieb $x + y - 3z + 7 = 0$ a $x - y + z + 3 = 0$.

Riešenie:
V tomto prípade máme dve väzbové podmienky, a teda v príslušnej Lagrangeovej funkcii sa objavia dva multiplikátory λ_1 a λ_2:

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y - 3z + 7) + \lambda_2(x - y + z + 3).$$

Nájdeme stacionárne body funkcie L vyhovujúce daným väzbám:

$$L'_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \implies x = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

$$L'_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \implies y = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2},$$

$$L'_z = 2z - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \implies z = \frac{3\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Uvedené vyjadrenia neznámych x, y, z pomocou λ_1 a λ_2 dosadíme do väzbových podmienok a po úpravách máme:

$$3\lambda_2 - 11\lambda_1 + 14 = 0, \quad \lambda_1 - \lambda_2 + 2 = 0.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $\lambda_1 = 5/2$ a $\lambda_2 = 9/2$, a následne $x = -7/2$, $y = 1$ a $z = 3/2$. Funkcia L má teda s ohľadom na väzby jeden stacionárny bod $A = [-7/2,\ 1,\ 3/2]$. Pozrieme sa na druhý diferenciál funkcie L v bode A. Platí:

$$L''_{xx}(A) = L''_{yy}(A) = L''_{zz}(A) = 2, \quad L''_{xy}(A) = L''_{xz}(A) = L''_{yz}(A) = 0.$$

Teda $\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}z)^2$. Ďalej diferencujeme väzbové podmienky v bode A a nájdeme vzťahy medzi diferenciálmi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}(x + y - 3z + 7) = 0 \implies \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - 3\mathrm{d}z = 0,$$

$$\mathrm{d}(x - y + z + 3) = 0 \implies \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

Z toho napríklad máme $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$. Dosadením do výrazu pre $\mathrm{d}^2L(A)$ dostaneme kvadratickú formu iba jednej premennej $\mathrm{d}x$ a stanovíme jej definitnosť:

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2 \cdot 4(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}x)^2 = 12(\mathrm{d}x)^2 > 0.$$

Druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ je teda pozitívne definitný, a preto má funkcia f v bode $A = [-7/2,\ 1,\ 3/2]$ viazané ostré lokálne minimum s hodnotou

$f(-7/2,\ 1,\ 3/2) = 31/2.$

Príklad 10

Určte viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

za prítomnosti väzieb $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Riešenie:

Zostavíme príslušnú Lagrangeovu funkciu a nájdeme jej stacionárne body. Lagrangeova funkcia má tvar:

$$L(y, x, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - 6).$$

Stacionárne body funkcie L určíme z nasledujúcej sústavy rovníc:

$$L'_x = y^2z^3 + \lambda = 0,$$

$$L'_y = 2xyz^3 + 2\lambda = 0,$$

$$L'_z = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0,$$

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Pri predpoklade $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ľahko nájdeme jediné riešenie $x = y = z = 1$ a $\lambda = -1$. Teda kandidátom na viazaný extrém funkcie f je bod $A = [1, 1, 1]$. Aby sme zistili charakter extrému, resp. či extrém vôbec nastáva, vyšetríme druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ funkcie L v bode A – $\mathrm{d}^2L(A)$ je vlastne kvadratická forma v premenných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ a my chceme zistiť jej definitnosť. Diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ má tvar:

$$\mathrm{d}^2L(A) = L''_{xx}(A)(\mathrm{d}x)^2 + L''_{yy}(A)(\mathrm{d}y)^2 + L''_{zz}(A)(\mathrm{d}z)^2 +$$

$$+2L''_{xy}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2L''_{xz}(A)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2L''_{yz}(A)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Potrebujeme teda vypočítať všetky druhé parciálne derivácie funkcie L v bode A. Keď to vykonáme, dostaneme:

$$L''_{xx}(A) = 0, \quad L''_{yy}(A) = 2, \quad L''_{zz}(A) = 6,$$

$$L''_{xy}(A) = 2, \quad L''_{xy}(A) = 3, \quad L''_{yz}(A) = 6.$$

Po dosadení do $\mathrm{d}^2L(A)$ máme:

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}y)^2 + 6(\mathrm{d}z)^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Teraz si však musíme uvedomiť, že prírastky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ nemôžeme voliť ľubovoľne, vzájomne spolu súvisia, pretože s premennými x, y, z sa môžeme hýbať iba v súlade s väzbami. Vzťah medzi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ získame tak, že diferencujeme väzbovú podmienku v bode A:

$$\mathrm{d}(x + 2y + 3z - 6) = 0 \implies \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y + 3\,\mathrm{d}z = 0,$$

z čoho napríklad $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}y - 3\,\mathrm{d}z$. Toto dosadíme do $\mathrm{d}^2L(A)$, čím dostaneme kvadratickú formu premenných $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. Po dosadení a úprave nakoniec máme:

$$\mathrm{d}^2L(A) = -6(\mathrm{d}y)^2 - 12(\mathrm{d}z)^2 - 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

No a až teraz skúmame definitnosť tejto formy. Jej matica bude typu 2x2, lebo je to forma dvoch premenných $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$, a má tvar:

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Je negatívne definitná (podľa minorov). Teda v bode $A = [1, 1, 1]$ má funkcia f ostré viazané lokálne maximum s hodnotou $f(1, 1, 1) = 1$.

Na tomto príklade je veľmi pekne vidno, že rešpektovanie väzbovej podmienky pri skúmaní definitnosti $\mathrm{d}^2L(A)$ je vo všeobecnosti nutné. Ak by sme totiž o definitnosti $\mathrm{d}^2L(A)$ rozhodovali na základe jeho vyjadrenia v tvare

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}y)^2 + 6(\mathrm{d}z)^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

bez ohľadu na prítomnú väzbu $x + 2y + 3z - 6 = 0$, dospeli by sme k záveru, že $\mathrm{d}^2L(A)$ je *indefinitný*. Vyplýva to z toho, že v tomto prípade je $\mathrm{d}^2L(A)$ kvadratickou formou troch premenných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$, pričom matica tejto formy má tvar (pri $(\mathrm{d}x)^2$ je koeficient 0):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Podľa minorov sa môžeme ľahko presvedčiť, že táto matica je indefinitná. Teda funkcia L nemá v bode A *lokálny extrém.* To však ešte neznamená, že v tomto bode A, ak vyhovuje väzbovým podmienkam, nie je ani *viazaný lokálny extrém* funkcie f. Je treba si uvedomiť, že opačný smer je pravdivý – ak funkcia L má v bode A, ktorý vyhovuje väzbovým podmienkam, lokálny extrém, potom je to zároveň i viazaný lokálny extrém pre funkciu f (premyslite si to). To nám niekedy uľahčuje život, nakoľko v tomto prípade nemusíme brať do úvahy väzby (pozri riešenie Príkladu 12). Avšak *vo všeobecnosti* ignorovanie väzbových podmienok môže mať za následok *stratu* viazaných lokálnych extrémov, ako sme sa presvedčili na tomto príklade.

Príklad 11

Na parabole $y^2 = 4x$ nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $x - y + 4 = 0$.

Riešenie:

Tento príklad je zameraný na geometrickú aplikáciu znalostí o viazaných extrémoch funkcií viac premenných. Nech $A = [x, y]$ je ľubovoľný bod na parabole $y^2 = 4x$ a $B = [u, v]$ ľubovoľný bod na priamke $u - v + 4 = 0$. Potom vzdialenosť $\rho(A, B)$ bodov A a B je rovná (uvažujeme štandardnú „euklidovskú“ vzdialenosť):

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Vidíme, že vzdialenosť $\rho(A, B)$ je funkciou 4 premenných x, y, u a v spĺňajúcich dve väzbové podmienky $y^2 = 4x$ a $u-v+4 = 0$. Keďže s odmocninami sa pracuje pomerne ťažkopádne, budeme uvažovať druhú mocninu vzdialenosti $\rho^2(A, B)$. Nie je ťažké si uvedomiť, že body A_0, B_0, v ktorých sa minimalizuje funkcia $\rho(A, B)$, sú práve tie body, v ktorých sa minimalizuje funkcia $\rho^2(A, B)$ a naopak (premyslite si to). Preto bez ujmy na všeobecnosti budeme uvažovať funkciu f štyroch premených x, y, u a v s predpisom:

$$f(x, y, u, v) = (x-u)^2 + (y-v)^2.$$

Našou úlohou je nájsť viazané globálne minimum funkcie f za prítomnosti väzieb:

$$y^2 = 4x, \quad u - v + 4 = 0.$$

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich príkladoch. Príslušná Lagrangeova funkcia L má tvar:

$$L(x, y, u, v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1(y^2 - 4x) + \lambda_2(u - v + 4).$$

Stanovíme jej stacionárne body vyhovujúce daným väzbovým podmienkam:

$$L'_x = 2(x-u) - 4\lambda_1 = 0,$$

$$L'_y = 2(y-v) + 2\lambda_1 y = 0,$$

$$L'_u = -2(x-u) + \lambda_2 = 0,$$

$$L'_v = -2(y-v) - \lambda_2 = 0,$$

$$y^2 = 4x, \quad u - v + 4 = 0.$$

Z tejto sústavy piatich rovníc s piatimi neznámymi $x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2$ zistíme jediné riešenie:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad u = -\frac{1}{2}, \quad v = \frac{7}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Ďalej vyšetríme definitnosť druhého diferenciálu funkcie L v stacionárnom bode $C = [1,\ 2,\ -1/2,\ 7/2]$. Určíme preto druhé parciálne derivácie funkcie L v bode C:

$$L''_{xx}(C) = L''_{uu}(C) = L''_{vv}(C) = 2, \quad L''_{yy}(C) = (2 + 2\lambda_1)_C = \frac{7}{2},$$

$$L''_{xy}(C) = L''_{xv}(C) = L''_{yu}(C) = L''_{uv}(C) = 0, \quad L''_{xu}(C) = -2, \quad L''_{yv}(C) = -2.$$

Potom:

$$\mathrm{d}^2 L(C) = 2(\mathrm{d}x)^2 + \frac{7}{2}(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}u)^2 + 2(\mathrm{d}v)^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}u - 4\mathrm{d}y\mathrm{d}v.$$

Potrebujeme ešte diferencovať väzby v bode C a nájsť vzťah medzi diferenciálmi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$. Platí:

$$\mathrm{d}(y^2 - 4x) = 0 \implies 2y\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}x = 0 \overset{y=2,\,x=1}{\implies} \mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(u - v + 4) = 0 \implies \mathrm{d}u - \mathrm{d}v = 0 \implies \mathrm{d}v = \mathrm{d}u.$$

Po dosadení do výrazu pre $\mathrm{d}^2 L(C)$ získame kvadratickú formu dvoch premenných $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}u$ a určíme jej definitnosť:

$$\mathrm{d}^2 L(C) = 2(\mathrm{d}x)^2 + \frac{7}{2}(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}u)^2 + 2(\mathrm{d}u)^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}u - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}^2 L(C) = \frac{11}{2}(\mathrm{d}x)^2 + 4(\mathrm{d}u)^2 - 8\mathrm{d}x\mathrm{d}u.$$

Posledná kvadratická forma má maticu:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podľa jej minorov sa ľahko presvedčíme, že je pozitívne definitná. Preto funkcia f má v bode $C = [1,\, 2,\, -1/2,\, 7/2]$ viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(1,\, 2,\, -1/2,\, 7/2) = 9/2$. Súčasne je to i viazané globálne minimum funkcie f (samy si zdôvodnite prečo :)). Vrátiac sa k nášmu pôvodnému problému, dospeli sme k záveru, že bod $A_0 = [1, 2]$ na danej parabole a bod $B_0 = [-1/2,\, 7/2]$ na danej priamke majú najmenšiu vzájomnú vzdialenosť $\rho(A_0, B_0) = \sqrt{f(C)} = 3/\sqrt{2}$.

Príklad 12 (ťažší príklad)
Nech $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a $a \in \mathbb{R}^+$ sú pevne zafixované čísla. V závislosti na parametre m vyšetrite maximálnu (resp. supremálnu) a minimálnu (resp. infimálnu) hodnotu výrazu

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1^m + x_2^m + x_3^m + \cdots + x_n^m$$

za podmienky $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = na$ a $x_i \geq 0$ pre každé $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Riešenie:
Našou úlohou je stanoviť globálne extrémy funkcie $P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ n premenných na množine M tvaru:

$$M = \{[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 + \cdots + x_n = na,\ x_i \geq 0,\ i = 1,\, \ldots,\, n\}.$$

Nie je ťažké ukázať, že množina M je ohraničená a uzavretá, t.j. kompaktná v $\mathbb{R}^n$ (napr. vzhľadom na metriku ρ_2). Vnútro množiny M má tvar:

$$M^o = \{[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 + \cdots + x_n = na,\ x_i > 0,\ i = 1,\, \ldots,\, n\}.$$

Hranica ∂M množiny M bude pozostávať z bodov patriacich do M, ktoré majú aspoň jednu súradnicu nulovú. Ďalej si všimnime, že výraz $P(x_1, \ldots, x_n)$, rovnako ako väzbová podmienka $x_1 + \cdots + x_n = na$, sú symetrickými funkciami premenných $x_1, \ldots, x_n$. To (okrem mnohého iného dôležitého :)) znamená, že ak nejaký bod $[x_1, \ldots, x_n]$ patrí do M a funkcia P v ňom nadobúda hodnotu $P(x_1, \ldots, x_n) = h$, potom i každý bod, ktorého súradnice sú nejakou permutáciou súradníc bodu $[x_1, \dots, x_n]$, leží tiež v M a funkcia P v ňom má rovnakú hodnotu h. Napríklad ak $n = 3$ a $[x_1, x_2, x_3] \in M$, potom i body

$$[x_1, x_3, x_2], \quad [x_2, x_1, x_3], \quad [x_2, x_3, x_1], \quad [x_3, x_1, x_2], \quad [x_3, x_2, x_1]$$

patria do M a

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_3, x_2) = P(x_2, x_1, x_3) =$$

$$= P(x_2, x_3, x_1) = P(x_3, x_1, x_2) = P(x_3, x_2, x_1) = h.$$

Toto zdanlivo „nepodstatné“ pozorovanie účinne využijeme neskôr.

Budeme najprv uvažovať $m < 0$. V tomto prípade funkcia P nie je definovaná na hranici ∂M, pretože pre $x_i = 0$ nie je definovaná mocnina x_i^m. Okrem toho, ak sa budeme s bodmi z vnútra M blížiť k hranici ∂M, funkčné hodnoty budú rásť do $+\infty$ (premyslite si to; ak sa bod $[x_1, \dots, x_n]$ z vnútra M blíži k hranici ∂M, nutne aspoň jedna z jeho súradníc x_i sa *sprava* blíži do 0; potom $\lim_{x_i \to 0^+} x_i^m = +\infty$, keďže $m < 0$). Preto v tomto prípade globálne maximum funkcie P na M neexistuje, pričom $\sup P = \infty$. Poďme teraz preskúmať globálne minimum funkcie P. Ak existuje, potom z predchádzajúcej diskusie vyplýva, že sa nutne musí nadobúdať vo vnútri M. Hľadáme teda lokálne minimum funkcie P, ktoré je *viazané* na vnútro množiny M. Zostavíme príslušnú Lagrangeovu funkciu:

$$L(x_1, \dots, x_n) = x_1^m + \dots + x_n^m + \lambda(x_1 + \dots + x_n - na).$$

Nájdeme všetky stacionárne body funkcie L ležiace vo vnútri M. Je potrebné spočítať prvé parciálne derivácie funkcie L podľa všetkých premenných x_i a položiť ich rovné 0. Pre každé $i = 1, \dots, n$ platí:

$$L'_{x_i} = m x_i^{m-1} + \lambda = 0, \implies x_i = \left(\frac{-\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Dosadením získaných hodnôt do väzbovej podmienky dostaneme vyjadrenie Lagrangeovho multiplikátora λ:

$$\underbrace{\left(\frac{-\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} + \dots + \left(\frac{-\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}_{n \text{ členov}} = na \implies$$

$$n \cdot \left(\frac{-\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} = na \Longrightarrow \left(\frac{-\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} = a.$$

Z poslednej rovnice máme jednak $\lambda = -ma^{m-1}$, a jednak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a$. Nakoľko $a > 0$ podľa predpokladu v zadaní, funkcia L má jediný stacionárny bod vo vnútri M, a to $[a, a, \ldots, a]$. Vyšetríme definitnosť druhého diferenciálu d^2L v tomto bode s ohľadom na predpísanú väzbu. Potrebujeme zistiť druhé parciálne derivácie funkcie L. Vypočtom dostaneme:

$$L''_{x_ix_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ m(m-1)x_i^{m-2}, & i = j. \end{cases}$$

Preto:

$$\mathrm{d}^2L(a, \ldots, a) = m(m-1)a^{m-2} \cdot (\mathrm{d}x_1)^2 + \cdots + m(m-1)a^{m-2} \cdot (\mathrm{d}x_n)^2 =$$
$$= m(m-1)a^{m-2} \cdot \left[(\mathrm{d}x_1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2\right].$$

Keďže $m(m-1)a^{m-2} > 0$, je $\mathrm{d}^2L(a, \ldots, a)$ kladný pre *každú* nenulovú n-ticu $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$, a teda aj vzhľadom na predpísanú väzbu. Nemusíme preto diferencovať väzbovú podmienku a zarátavať ju do druhého diferenciálu (pozri tiež poznámku v závere Príkladu 10). Teda $\mathrm{d}^2L(a, \ldots, a)$ je pozitívne definitný, a preto v bode $[a, \ldots, a]$ má funkcia P viazané lokálne minimum s hodnotou $P(a, \ldots, a) = na^m$. Zároveň je to aj globálne minimum funkcie P na množine M (premyslite si prečo :)).

Uvažujme teraz prípad $0 < m < 1$ (voľba čísla 1 nie je náhodná; všimnite si, čo sa stane, ak $m = 1$). Podobne, ako v predchádzajúcom prípade, zistíme, že funkcia L má jediný stacionárny bod $[a, \ldots, a]$ vo vnútri M a $\mathrm{d}^2L(a, \ldots, a)$ má tvar ako vyššie. V tomto prípade ale číslo $m(m-1)a^{m-2}$ je *záporné*, preto $\mathrm{d}^2L(a, \ldots, a)$ je negatívne definitný. Funkcia P má preto v $[a, \ldots, a]$ viazané lokálne maximum s hodnotou $P(a, \ldots, a) = na^m$ (pozri opäť poznámku v závere Príkladu 10). Potrebujeme sa ešte pozrieť na maximálnu hodnotu funkcie P na hranici ∂M (v tomto prípade je P definované už aj na hranici množiny M). No a práve teraz využijeme fakt, že P i väzba sú symetrické funkcie v premenných $x_1 \ldots, x_n$. Na hranici ∂M je totiž aspoň jedna súradnica nulová. Nás zaujímajú len hodnoty funkcie P a tie na základe vyššie uvedených úvah o symetrii funkcie P *nezávisia* na tom, ktorá súradnica sa nuluje. Preto bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, nech $x_n = 0$. Potom stojíme pred nasledovným problémom – máme určiť *globálne maximum* funkcie $\tilde{P}$ $n-1$ premenných tvaru

$$\tilde{P}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_1^m + \cdots + x_{n-1}^m$$

na množine $\tilde{M} \subseteq \partial M$ tvaru

$$\tilde{M} = \left\{[x_1, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, x_1 + \cdots + x_{n-1} = na,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n-1\right\}.$$

Väzbovú podmienku v definícii $\tilde{M}$ môžeme zavedením $\tilde{a} := \frac{n}{n-1} \cdot a > 0$ prepísať takto:

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = (n-1)\tilde{a}.$$

Ak sa pozrieme na zadanie príkladu, zistíme, že máme riešiť ten istý problém, len v dimenzii $n-1$ a s novou funkciou $\tilde{P}$, novým parametrom $\tilde{a}$ a novou množinou $\tilde{M}$ (nerovnosť $0 < m < 1$ stále platí). Využitím poznatkov, ktoré sme pred chvíľou zistili, dostaneme, že funkcia $\tilde{P}$ má viazané (vzhľadom na vnútro $\tilde{M}$) lokálne maximum v bode $[\,\underbrace{\tilde{a}, \dots, \tilde{a}}_{n-1 \text{ zložiek}}\,]$ s hodnotou (dosadíme za $\tilde{a}$):

$$\tilde{P}(\tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = (n-1)\tilde{a}^m = (n-1) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^m \cdot a^m.$$

Plus je treba ešte preveriť maximum funkcie $\tilde{P}$ na *hranici* $\partial\tilde{M}$ *množiny* $\tilde{M}$. Nuž ale $\partial\tilde{M}$ pozostáva z bodov patriacich do $\tilde{M} \subseteq \partial M$, ktoré majú *nulovú* aspoň jednu súradnicu. Inými slovami, ide o body z ∂M, ktoré majú nulové *aspoň dve* súradnice. To znamená, že stojíme opäť pred rovnakou úlohou ako v zadaní, len tentokrát v dimenzii $n-2$. Takýmto spôsobom postupne znižujeme dimenziu n a postupne preberieme všetky hodnoty funkcie P, ktoré sú lokálnymi maximami vzhľadom na hranicu ∂M. Sú to tieto hodnoty:

$$(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^m a^m, \quad (n-2)\left(\frac{n}{n-2}\right)^m a^m, \quad \cdots, \quad 1 \cdot \left(\frac{n}{1}\right)^m a^m.$$

Tieto čísla je potrebné porovnať so získanou hodnotou lokálneho maxima na^m vzhľadom na vnútro M. Pomocou faktov, že $a > 0$ a $0 < m < 1$ nie je ťažké ukázať, že pre každé $k = 1 \dots, n-1$ platí:

$$(n-k)\left(\frac{n}{n-k}\right)^m a^m < na^m$$

(pokúste sa dokázať samy; uvedomte si, že ak $y > 1$ a m je kladná mocnina menšia ako jedna (napr. $m = 1/2$), potom $y^m < y$). Hodnota na^m je teda globálne maximum funkcie P na množine M. Čo sa týka globálneho minima funkcie P na množine M, to sa zrejme môže nadobúdať iba na hranici ∂M

(pretože vo vnútri M má L iba jeden stacionárny bod, v ktorom je lokálne maximum, ako sme zistili vyššie). Preto sa náš problém zredukuje na nájdenie *globálneho minima* funkcie $\tilde{P}$ na množine $\tilde{M}$, ktoré sme zaviedli vyššie (premyslite si to; globálne minimum funkcie P bude globálnym minimom na hranici ∂M; tam je ale vždy aspoň jedna súradnica nulová, preto hľadané minimum bude globálnym minimom funkcie $\tilde{P}$ na množine $\tilde{M} \subseteq \partial M$). Ale hľadanie globálneho minima funkcie $\tilde{P}$ na množine $\tilde{M}$ je $(n-1)$-rozmerná analógia pôvodnej úlohy (t.j. nájdenie globálneho minima funkcie P na množine M). O tom sme pred chvíľou zistili, že sa nutne nadobúda na hranici, t.j. na $\partial\tilde{M}$. Hranicu $\partial\tilde{M}$ však tvoria body z $\tilde{M}$, ktoré majú aspoň jednu súradnicu nulovú – inými slovami, sú to body z M, ktoré majú nulové aspoň *dve* súradnice. Táto úvaha sa dá predlžovať ďalej. Nakoniec zistíme, že globálne minimu funkcie P na množine M sa musí nadobúdať v bode, ktorý má *nenulovú práve jednu súradnicu.* Keďže vďaka symetrii nezávisí na tom, ktorá súradnica to bude, bez ujmy na všeobecnosti nech $x_1 \neq 0$ a $x_2 = \cdots = x_n = 0$. Potom z väzbovej podmienky platí $x_1 = na$ a $P(x_1, 0, \cdots, 0) = (na)^m$. Hodnota $(na)^m$ je teda globáne minimum funkcie P na množine M (poznamenajme, že súradnice bodu $[x_1, \ldots, x_n]$, v ktorom sa globálne minimum nadobúda, nemôžu byť všetky nulové, nakoľko by nebola splnená väzbová podmienka; väzbová podmienka má $n-1$ stupňov voľnosti, t.j. $n-1$ súradníc sa dá zvoliť ľubovoľne a zvyšná jedna súradnica je už potom určená jednoznačne).

Prípad $m = 1$ prenechávame čitateľovi ;).

Posledný prípad $m > 1$ sa vyrieši úplne analogicky, ako prípad $0 < m < 1$. Keďže číslo $m(m-1)a^{m-2}$ je teraz kladné, v stacionárnom bode $[a, \ldots, a]$ má funkcia P viazané lokálne minimum s hodnotou na^m. Analogickým postupom, ako vyššie, so zreteľom na fakt, že $m > 1$, sa dá ukázať, že hodnota na^m je globálne minimum funkcie P na množine M. Podobne, o hodnote $(na)^m$ sa zas ukáže, že je globálnym maximom funkcie P na množine M.

Zistili sme teda takúto závislosť extremálnych hodnôt funkcie P na parametre m:

$$\text{globálne minimum } P = \begin{cases} na^m, & m < 0, \\ (na)^m, & 0 < m < 1, \\ na, & m = 1, \\ na^m, & m > 1, \end{cases}$$

$$\text{globálne maximum } P = \begin{cases} \text{neexistuje, } \sup P = \infty, & m < 0, \\ na^m, & 0 < m < 1, \\ na, & m = 1, \\ (na)^m, & m > 1. \end{cases}$$

Poznámka k diferencovaniu väzbových podmienok

V tejto poznámke stručne vysvetlíme, čo to znamená *diferencovať väzbu v nejakom bode*. Máme napríklad väzbu tvaru

$$x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x = 2,$$

a máme ju diferencovať v bode $A = [0, -1, \mathrm{e}]$, ktorý danej väzbe vyhovuje (overte :)). To znamená prepísať danú väzbovú podmienku na tvar

$$x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x - 2 = 0,$$

nájsť prvý diferenciál funkcie

$$f(x, y, z) = x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x - 2$$

v bode A, a nakoniec položiť diferenciál $\mathrm{d}f(A)$ rovný nule. Parciálne derivácie funkcie f v bode A sú:

$$f'_x(A) = (2x - y^2 \cos x)_A = 0, \quad f'_y(A) = (\mathrm{e}^y z + 2y \cos x)_A = -1,$$

$$f'_z(A) = (\mathrm{e}^y)_A = \mathrm{e}^{-1}.$$

Preto platí $\mathrm{d}f(A) = 0 \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z$. Tento výraz položíme rovný nule:

$$-\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z = 0.$$

No a tým sme uvedenú väzbu diferencovali v bode A. Čo to však v skutočnosti znamená? Daná väzba viaže premenné x, y, z; v našom prípade to bude zrejme nejaká plocha, konkrétne s rovnicou $z = \mathrm{e}^{-y}(2 - x^2 - y^2 \cos x)$. Keď teda sedíme na nejakom *zafixovanom* bode tejto plochy (v bode A) a chceme sa presunúť do iného bodu na tejto ploche, nemôžeme s prírastkami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ šibrinkovať hocijako, chceme predsa zostať na danej ploche. Preto $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ v danom bode A spolu nejako súvisia, t.j. nie sú všetky nezávislé. Tým, že túto väzbu (plochu) diferencujeme v danom bode A, nájdeme túto súvislosť. Posledná rovnica je toho dôkazom, nakoľko v bode A platí:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z.$$

Ak $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ zvolíme ľubovoľne, $\mathrm{d}z$ je už určené jednoznačne. Je potrebné si uvedomiť, že v inom bode danej plochy je závislosť prírastkov $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ vo všeobecnosti iná (preto je i zvýraznené slovo „zafixovaný“ :)).