Príklady na precvičovanie – lokálne, globálne a viazané extrémy funkcií viac premenných

Riešené príklady – lokálne extrémy

Príklad 1
Určme všetky lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Riešenie:
Funkcia $f(x,y)$ má parciálne derivácie prvého rádu definované vo všetkých bodoch svojho definičného oboru, preto sa hľadané lokálne extrémy môžu nadobúdať iba v jej stacionárnych bodoch. Zistíme teda, kde sa nulujú parciálne derivácie $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$

$$f'_x(x,y) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2},$$

$$f'_y(x,y) = -1 + \frac{1}{y^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 1.$$

Funkcia $f(x,y)$ má teda štyri stacionárne body, a to

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[-\frac{1}{2}, -1\right], \quad \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[\frac{1}{2}, -1\right]$$

(samy overte :)). Ďalej vyšetríme definitnosť Hessovej matice $H_f(x,y)$ funkcie $f(x,y)$ v týchto bodoch. Pripomeňme, že Hessova matica $H_f(x,y)$ (nazývaná tiež hessián :)) je definovaná

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix},$$

a teda v našom prípade

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

(samy overte ;)). Pre jednotlivé stacionárne body postupne máme

$$H_f\left(\frac{1}{2},\,1\right)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\ \text{indefinitná},$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2},\,-1\right)=\begin{pmatrix}-16 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ \text{indefinitná},$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2},\,1\right)=\begin{pmatrix}-16 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}<0,$$

$$H_f\left(\frac{1}{2},\,-1\right)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}>0$$

(i toto samy overte :)). V bodoch $\left[\frac{1}{2},\,1\right]$ a $\left[-\frac{1}{2},\,-1\right]$ teda lokálny extrém nenastáva, kým v bode $\left[-\frac{1}{2},\,1\right]$ má funkcia $f(x,y)$ ostré lokálne maximum s hodnotou $f\left(-\frac{1}{2},\,1\right)=-6$ a v bode $\left[\frac{1}{2},\,-1\right]$ má funkcia $f(x,y)$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f\left(\frac{1}{2},\,-1\right)=6$ (nech čitateľa nepomýli, že lokálne maximum je menšie než lokálne minimum ;)).

Príklad 2

Nájdime všetky lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z},\qquad x,y,z>0.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Stanovíme všetky stacionárne body funkcie $f(x,y,z)$, t.j.,

$$f'_x(x,y,z)=1-\frac{y^2}{4x^2}=0\quad\Longrightarrow\quad 4x^2=y^2,$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0\quad\Longrightarrow\quad y^3=2xz^2,$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^3 = y$$

(samy overte jednotlivé výpočty :)). Riešime teda sústavu rovníc

$$4x^2 = y^2, \quad y^3 = 2xz^2, \quad z^3 = y.$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že za predpokladu $x, y, z > 0$ má táto sústava rovníc jediné riešenie $\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$. Funkcia $f(x,y,z)$ má teda jeden stacionárny bod $\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$. Hessova matica $H_f(x,y,z)$ funkcie $f(x,y,z)$ má tvar

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{x^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

(samy overte ;)). Dosadením daného stacionárneho bodu funkcie $f(x,y,z)$ do výrazu $H_f(x,y,z)$ získame číselnú maticu a napríklad podľa jej hlavných minorov zistíme jej definitnosť, konkrétne

$$H_f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} > 0$$

(i toto samy overte :)). Funkcia $f(x,y,z)$ má preto v bode $\left[\frac{1}{2}, 1, 1\right]$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$:).

Príklad 3

Stanovme všetky lokálne extrémy funkcií

$$\text{a)} \;\; f(x,y) = x^2 + y^3, \quad \text{b)} \;\; g(x,y) = x^2 + y^4.$$

Riešenie:

a) Keďže $f'_x(x,y) = 2x = 0$ a $f'_y(x,y) = 3y^2 = 0$, vidíme, že funkcia $f(x,y)$ má jediný stacionárny bod $[0,0]$. Príslušný hessián $H_f(x,y)$ funkcie $f(x,y)$ má tvar

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

(samy overte :)). V bode $[0,0]$ potom máme

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica $H_f(0,0)$ má zrejme vlastné čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Je preto pozitívne semidefinitná, avšak nie je pozitívne definitná. V tomto prípade bohužiaľ nevieme pomocu hessiánu $H_f(0,0)$ rozhodnúť, či v bode $[0,0]$ má funkcia $f(x,y)$ lokálny extrém :(. Musíme použiť priamo definíciu lokálneho extrému. Platí $f(0,0) = 0$. Dokážeme, že v stacionárnom bode $[0,0]$ nenastáva pre funkciu $f(x,y)$ lokálny extrém. Inými slovami, ukážeme, že v každom okolí bodu $[0,0]$ existuje bod $[x_1,y_1]$ taký, že $f(x_1,y_1) > 0$, a zároveň bod $[x_2,y_2]$ taký, že $f(x_2,y_2) < 0$. Pre $\varepsilon > 0$ uvažujme okolie O_ε bodu $[0,0]$ tvaru $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ (okolie indukované euklidovskou metrikou ϱ_E). Body

$$[x_1,y_1] := \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \text{a} \quad [x_2,y_2] := \left[0, -\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

zrejme patria do okolia O_ε (samy overte :)). Naviac platí

$$f(x_1,y_1) = \frac{\varepsilon^3}{8} > 0 \quad \text{a} \quad f(x_2,y_2) = -\frac{\varepsilon^3}{8} < 0$$

(i toto samy overte ;)). Posledné nerovnosti platia pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, t.j., pre každé okolie O_ε bodu $[0,0]$. Preto v bode $[0,0]$ funkcia $f(x,y)$ nemá lokálny extrém funkcie (bod $[0,0]$ sa v tomto prípade nazýva *sedlový* :)).

b) Analogickou úvahou ako v úlohe a) zistíme, že $g(x,y)$ má jediný stacionárny bod $[0,0]$. Pre odpovedajúcu Hessovu maticu $H_g(x,y)$ platí

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(samy overte detaily ;)). Ihneď vidíme vlastné čísla matice $H_g(0,0)$, konkrétne $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Matica $H_g(0,0)$ je teda opäť pozitívne semidefinitná, ale nie je pozitívne definitná. Charakter bodu $[0,0]$ musíme preto vyšetriť na základe definície lokálneho extrému. Platí $g(0,0) = 0$ a pre $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ je $g(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$. Teda $g(x,y) \geq g(0,0)$ pre každé $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, čo znamená, že funkcia $g(x,y)$ nadobúda v bode $[0,0]$ svoje lokálne minimum s hodnotou $g(0,0) = 0$. Naviac, toto lokálne minimum je ostré (samy si premyslite všetky tieto závery ;)).

Riešené príklady – globálne extrémy

Príklad 4

Určme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x,y) = xy^2(4-x-y)$$

na množine $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničenej priamkami $x=0$, $y=0$ a $x+y=6$.

Riešenie:

Množina M je zrejme zjednotením vnútra a hranice rovinného trojuholníka s vrcholmi v bodoch $A=[0,0]$, $B=[6,0]$ a $C=[0,6]$ (samy nakreslite :)). Nájdeme stacionárne body funkcie $f(x,y)$ ležiace vo vnútri množiny M, t.j.,

$$f'_x(x,y) = y^2(4-x-y) - xy^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2(4-x-y) = xy^2,$$

$$f'_y(x,y) = 2xy(4-x-y) - xy^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2xy(4-x-y) = xy^2,$$

$$x>0, \quad y>0, \quad 6>x+y$$

(samy overte ;)). Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že tento systém rovníc a nerovníc má jediné riešenie $x=1$ a $x=2$:). Funkcia $f(x,y)$ má teda vo vnútri množiny M jediný stacionárny bod $[1,2]$ s hodnotou $f(1,2)=4$. Skúmajme teraz funkčné hodnoty na hranici ∂M množiny M.

- úsečka AB – $y=0$ a $x \in [0,6]$ (symbol $[\ldots]$ teraz znamená uzavretý interval). Na úsečke AB platí $f(x,y)=f(x,0)=0$, t.j., funkcia $f(x,y)$ je konštantná s hodnotou 0.

- úsečka AC – $x=0$ a $y \in [0,6]$. Na úsečke AC platí $f(x,y)=f(0,y)=0$, t.j., funkcia $f(x,y)$ je opäť konštantná s hodnotou 0.

- úsečka CB – $y=6-x$ a $x \in [0,6]$. Na úsečke CB platí $f(x,y)=f(x,6-x)=-2x(x-6)^2$, t.j., funkcia $f(x,y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x. Označíme ju $g(x) := -2x(x-6)^2$. Je potrebné nájsť globálne extrémy funkcie $g(x)$ na uzavretom intervale $[0,6]$. Platí

  $$g'(x) = -2(x-6)(3x-6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x=6, \text{ resp. } x=2.$$

  V otvorenom intervale $(0,6)$ má teda funkcia $g(x)$ len jeden stacionárny bod $x=2$ s hodnotou $g(2)=-64$. Z pohľadu funkcie $f(x,y)$ sa jedná o bod $[2,4]$ a $f(2,4)=-64$. V krajných bodoch intervalu $[0,6]$ platí $g(0)=f(C)=f(0,6)=0$ a $g(6)=f(B)=f(6,0)=0$.

Vidíme teda, že globálne maximum funkcie $f(x, y)$ sa nadobúda v bode $[1, 2]$ s hodnotou $f(1, 2) = 4$, kým globálne minimum funkcie $f(x, y)$ sa nadobúda v bode $[2, 4]$ s hodnotou $f(2, 4) = -64$:).

Príklad 5

Určme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$$

na množine $M \subseteq \mathbb{R}^2$ danej reláciou $x^2 + y^2 \leq 16$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Množina M je zrejme uzavretý kruh so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 4 (samy zakreslite ;)). Nájdeme stacionárne body funkcie $f(x, y)$ ležiace vo vnútri tohto kruhu

$$f'_x(x, y) = -2x = 0, \quad f'_y(x, y) = -2y + 2 = 0, \quad x^2 + y^2 < 16.$$

Uvedeným podmienkam vyhovuje jediný bod $[0, 1]$ (samy overte :)). Funkcie $f(x, y)$ má teda vo vnútri M jediný stacionárny bod $[0, 1]$ s hodnotou $f(0, 1) = 1$. Ďalej sa pozrieme na lokálne extrémy funkcie $f(x, y)$ ležiace na hranici množiny M, t.j. na kružnici $x^2 + y^2 = 16$.

- horná polkružnica – $y \geq 0$, a teda $y = \sqrt{16 - x^2}$. Funkcia $f(x, y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x, konkrétne

  $$g(x) := f(x, \sqrt{16 - x^2}) = -16 + 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

  (samy overte :)). Hľadáme globálne extrémy funkcie $g(x, y)$ na uzavretom intervale $[-4, 4]$. Keďže

  $$g'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$$

  funkcia $g(x)$ má v otvorenom intervale $(-4, 4)$ jeden stacionárny bod $x = 0$ s hodnotou $g(0) = -8$. Z hľadiska funkcie $f(x, y)$ sa jedná o bod $[0, \sqrt{16 - 0^2}] = [0, 4]$ a $f(0, 4) = -8$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ máme $g(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $g(4) = f(4, 0) = -16$.

- dolná polkružnica – $y \le 0$, a teda $y = -\sqrt{16 - x^2}$. Postupujeme podobne. Funkcia $f(x, y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x, t.j.,

$$h(x) := f(x, -\sqrt{16 - x^2}) = -16 - 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

  Hľadáme globálne extrémy funkcie $h(x)$ na intervale $[-4, 4]$. Platí

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

  Hodnota $h(x)$ v stacionárnom bode $x = 0$ je $h(0) = -24$. V reči funkcie $f(x, y)$ sa jedná o bod $[0, -\sqrt{16 - 0^2}] = [0, -4]$ a $f(0, -4) = -24$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ platí $h(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $h(4) = f(4, 0) = -16$.

Záver je teda taký, že globálne maximum funkcie $f(x, y)$ na množine M predstavuje hodnota 1 a nadobúda sa v bode $[0, 1]$, kým globálne minimum funkcie $f(x, y)$ na množine M je hodnota -24 a nadobúda sa v bode $[0, -4]$.

Príklad 6

Pomocou metódy vrstevníc stanovme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x + y$ na množine $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x| \le 1, \; |y| \le 1\}$.

Riešenie:

Zakreslením množiny M zistíme, že sa jedná o štvorec s vrcholmi v bodoch $A = [-1, -1]$, $B = [1, -1]$, $C = [1, 1]$ a $D = [-1, 1]$. Vrstevnice funkcie $f(x, y)$ sú zrejme priamky $x + y = c$, $c \in \mathbb{R}$, t.j., rovnobežné s osou druhého a štvrtého kvadrantu, pričom vrstevnica odpovedajúca danej hodnote c prechádza bodmi $[0, c]$ a $[c, 0]$ (samy si premyslite ;)). Všimnime si, že poloha vrstevnice $x + y = c$ priamo určuje hodnotu funkcie $f(x, y)$ – všade na vrstevnici $x + y = c$ má $f(x, y)$ rovnakú hodnotu rovnú c. Zaujímajú nás iba tie vrstevnice, ktoré pretínajú štvorec M. Nie je ťažké si uvedomiť, že posunom vrstevníc smerom od vrchola C k vrcholu A bude hodnota parametra c *klesať*. Teda maximálne c sa nadobúda na vrstevnici prechádzajúcej vrcholom $C = [1, 1]$, pričom v tomto prípade $c = 1 + 1 = 2$. Na vrstevnici $x + y = 2$ bude preto funkcia $f(x, y)$ nadobúdať svoju najväčšiu hodnotu na M rovnú 2. Podobne, minimálne c je pre vrstevnicu prechádzajúcu vrcholom $A = [-1, -1]$, pričom $c = -1 - 1 = -2$. Preto najmenšia hodnota funkcie $f(x,y)$ na množine M je rovná -2 (samy si dobre premyslite jednotlivé argumenty :)). Metóda vrstevníc je užitočnou pri zisťovaní globálnych extrémov funkcií v prípade, ak vrstevnice sú pomerne jednoduché krivky, napríklad priamky, kružnice apod. Tento postup funguje i pre funkcie troch a viac premenných. Nakoniec poznamenajme, že rovnaké výsledky by sme dostali i pomocou obvyklého aparátu v predchádzajúcich príkladoch :).

Riešené príklady – viazané lokálne extrémy

Príklad 7

Určme lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = \sqrt{3}\,x - y + 2$$

za prítomnosti väzby $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť metódou Lagrangeových multiplikátorov. Zostavíme Lagrangeovu funkciu $L(x,y)$ prislúchajúcu funkcii $f(x,y)$ a danej väzbe

$$L(x,y) = \sqrt{3}\,x - y + 2 + \lambda \cdot (x^2 + 2x + y^2).$$

Stanovíme stacionárne body funkcie $L(x,y)$ a neznámy Lagrangeov multiplikátor λ. Postupne platí

$$L'_x(x,y) = \sqrt{3} + 2\lambda x + 2\lambda = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2\lambda},$$

$$L'_y(x,y) = -1 + 2\lambda y = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{2\lambda}.$$

(samy overte :)). Tieto vyjadrenia neznámych x a y pomocou neznámej λ dosadíme do väzbovej podmienky a dostaneme (väzbovú podmienku kvôli zjednodušeniu výpočtov upravíme na štvorec :))

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

(samy overte detaily výpočtov ;)). Lagrangeova funkcia $L(x, y)$ má teda v závislosti na multiplikátore λ dva stacionárne body, konkrétne

$$\text{pre hodnotu } \lambda_1 = -1 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = \left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right],$$

$$\text{pre hodnotu } \lambda_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A_2 = \left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

(i toto samy overte :)). Vyšetríme teraz definitnosť druhého diferenciálu funkcie $L(x, y)$ v bodoch A_1 a A_2 s ohľadom na väzbovú podmienky. Pre diferenciál $\mathrm{d}^2 L(x, y)$ všeobecne platí

$$L''_{xx}(x, y) = 2\lambda, \quad L''_{xy}(x, y) = L''_{yx}(x, y) = 0, \quad L''_{yy}(x, y) = 2\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}^2 L(x, y) = 2\lambda \cdot (\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda \cdot (\mathrm{d}y)^2$$

(samy overte :)). Diferencujeme teraz väzbovú podmienku

$$\mathrm{d}(x^2 + 2x + y^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x + 1)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$

(pozri poznámku na konci tohto dokumentu :)). Uvažujme stacionárny bod A_1 a k nemu odpovedajúci Lagrangeov multiplikátor λ_1. Tieto vstupné dáta dosadíme jednak do diferenciálu $\mathrm{d}^2 L(x, y)$, a jednak do diferencovanej väzbovej podmienky, t.j.,

$$\mathrm{d}^2 L(A_1) = 2\lambda_1 \cdot (\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda_1 \cdot (\mathrm{d}y)^2 = -2(\mathrm{d}x)^2 - 2(\mathrm{d}y)^2,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x.$$

Posledná rovnosť nám udáva vzťah medzi prírastkami $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ v bode A_1 indukovaný väzbovou podmienkou. Vo vyjadrení $\mathrm{d}^2L(A_1)$ s ohľadom na väzbu nie sú teda veličiny $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ nezávislé, pričom platí

$$\mathrm{d}^2L(A_1) = -2(\mathrm{d}x)^2 - 2 \cdot \underbrace{3(\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}y)^2} = -8(\mathrm{d}x)^2$$

(samy si všetko pozorne premyslite :)). Vidíme, že druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A_1)$ je za prítomnosti väzbovej podmienky negatívne definitný, a preto v bode A_1 má funkcia $f(x, y)$ (viazané) ostré lokálne maximum vzhľadom na väzbovú podmienku v zadaní príkladu s hodnotou $f(A_1) = 4 - \sqrt{3}$. Podobným spôsobom vyšetríme i stacionárny bod A_2 s multiplikátorom λ_2. Máme

$$\mathrm{d}^2L(A_2) = 2\lambda_2 \cdot (\mathrm{d}x)^2 + 2\lambda_2 \cdot (\mathrm{d}y)^2 = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}^2L(A_2) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2 \cdot \underbrace{3(\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}y)^2} = 8(\mathrm{d}x)^2$$

(samy overte ;)). Nakoľko je druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A_2)$ pozitívne definitný, v bode A_2 má funkcia $f(x, y)$ (viazané) ostré lokálne minimum vzhľadom na predpísanú väzbu s hodnotou $f(A_2) = -\sqrt{3}$:).

Príklad 8

Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = \ln(x + y)$ vzhľadom na množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ danú podmienkou $xy = 1$.

Riešenie:

Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade. Zostrojíme príslušnú Lagrangeovu funkciu $L(x, y)$

$$L(x, y) = \ln(x + y) + \lambda \cdot (xy - 1)$$

(väzbovú podmienku sme upravili na tvar $xy-1$:)). Stanovíme stacionárne body funkcie $L(x,y)$, ktoré spĺňajú predpísanú väzbovú podmienku, t.j.,

$$L'_x(x,y) = \frac{1}{x+y} + \lambda y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x+y} = \lambda y,$$

$$L'_y(x,y) = \frac{1}{x+y} + \lambda x = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x+y} = \lambda x.$$

Z týchto dvoch rovníc napríklad máme $\lambda x = \lambda y$, z čoho $x = y$ (keďže $\lambda \neq 0$, samy si premyslite prečo :)). Dosadením do väzbovej podmienky $xy = 1$ dostaneme $x^2 = 1$, a tak $x = \pm 1$ a $y = \pm 1$. Hodnota $x = -1$ nevyhovuje, nakoľko bod $[-1,-1]$ nepatrí do definičného oboru funkcie $L(x,y)$ a ani funkcie $f(x,y)$. Lagrangeova funkcia $L(x,y)$ má teda jediný stacionárny bod $A = [1,1]$ ležiaci v množine M. Tomuto bodu odpovedá Lagrangeov multiplikátor $\lambda = -\frac{1}{2}$ (samy overte ;)). Aby sme sa zistili, či v tomto bode má funkcia $f(x,y)$ viazaný lokálny extrém (vzhľadom na množinu M), je potrebné zostrojiť druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ s ohľadom na väzbovú podmienku $xy = 1$. Postupne dostávame

$$L''_{xx}(A) = -\frac{1}{(x+y)^2}\bigg|_A = -\frac{1}{4}, \qquad L''_{yy}(A) = -\frac{1}{(x+y)^2}\bigg|_A = -\frac{1}{4},$$

$$L''_{xy}(A) = L''_{yx}(A) = -\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda\bigg|_A = -\frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}^2L(A) = -\frac{1}{4}\,(\mathrm{d}x)^2 - \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\,(\mathrm{d}y)^2$$

(samy overte :)). Diferencujeme ešte väzbovú podmienku v bode A. Platí

$$\mathrm{d}(xy-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0 \quad \overset{x=y=1}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$$

(i toto samy overte :)). Diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ má preto vzhľadom na množinu M v zadaní príkladu tvar

$$\mathrm{d}^2L(A) = -\frac{1}{4}\,(\mathrm{d}x)^2 - \frac{3}{2}\,(\mathrm{d}x)\cdot\underbrace{(-\mathrm{d}x)}_{\mathrm{d}y} - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{(-\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}y)^2} = (\mathrm{d}x)^2.$$

Kvadratická forma $\mathrm{d}^2L(A)$ je teda pozitívne definitná, a preto má funkcia $f(x,y)$ v bode A viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(A) = \ln 2$.

Poznamenajme, že úloha sa dala riešiť i tak, že z väzbovej podmienky $xy = 1$ vyjadríme napríklad premenú $y = \frac{1}{x}$ a dosadíme ju do funkcie $f(x,y)$. Získame tak funkciu jednej premennej $g(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ a štandarným spôsobom hľadáme jej lokálne extrémy. Nechávame na čitateľa, aby overil, že dostaneme rovnaký výsledok :).

Príklad 9

Zistime viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

za prítomnosti väzieb $x + y - 3z + 7 = 0$ a $x - y + z + 3 = 0$.

Riešenie:

V tomto prípade máme dve väzbové podmienky, a teda v príslušnej Lagrangeovej funkcii $L(x,y)$ sa objavia dva multiplikátory λ a ω

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x + y - 3z + 7) + \omega \cdot (x - y + z + 3).$$

Určíme stacionárne body funkcie $L(x,y,z)$ vyhovujúce predpísaným väzbám

$$L'_x(x,y,z) = 2x + \lambda + \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\lambda + \omega}{2},$$

$$L'_y(x,y,z) = 2y + \lambda - \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\omega - \lambda}{2},$$

$$L'_z(x,y,z) = 2z - 3\lambda + \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{3\lambda - \omega}{2}.$$

Získané vyjadrenia neznámych x, y, z pomocou λ a ω dosadíme do väzbových podmienok a po úpravách dostaneme

$$-11\lambda + 3\omega + 14 = 0, \qquad \lambda - \omega + 2 = 0$$

(samy overte ;)). Táto sústava má jediné riešenie $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ a $\omega = \frac{9}{2}$, z čoho následne $x = -\frac{7}{2}$, $y = 1$ a $z = \frac{3}{2}$ (i toto samy overte ;)). Funkcia $L(x,y,z)$

teda má jeden stacionárny bod $A = \left[-\frac{7}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right]$ spĺňajúci väzbové podmienky v zadaní príkladu. Zostrojíme na druhý diferenciál funkcie $L(x, y, z)$ v bode A. Postupne máme

$$L''_{xx}(A) = L''_{yy}(A) = L''_{zz}(A) = 2,$$

$$L''_{xy}(A) = L''_{yx}(A) = L''_{xz}(A) = L''_{zx}(A) = L''_{yz}(A) = L''_{zy}(A) = 0$$

(samy overte :)). Platí teda

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}z)^2.$$

Ďalej diferencujeme väzbové podmienky v bode A a nájdeme vzťahy medzi prírastkami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$, konkrétne

$$\mathrm{d}(x + y - 3z + 7) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - 3\mathrm{d}z = 0,$$

$$\mathrm{d}(x - y + z + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

Z tohto napríklad máme $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$. Dosadením do získaného vyjadrenia druhého diferenciálu $\mathrm{d}^2L(A)$ dostaneme kvadratickú formu iba jednej premennej $\mathrm{d}x$, ktorá je pozitívne definitná

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2 \cdot \underbrace{4(\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}y)^2} + 2 \cdot \underbrace{(\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}z)^2} = 12(\mathrm{d}x)^2 > 0 \quad :).$$

Funkcia f v bode A viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(A) = \frac{31}{2}$. Všimnime si, že tento výsledok vyplýva i na základe definitnosti diferenciálu $\mathrm{d}^2L(A)$ bez toho, aby sme uvažovali väzbové podmienky, keďže i kvadratická forma troch premenných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}z)^2$$

je pozitívne definitná (samy si dobre premyslite :)). Toto pozorovanie komentujeme i na konci nasledujúceho príkladu.

Príklad 10

Určme viazané lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

za prítomnosti väzieb $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Riešenie:
Príslušnú Lagrangeova funkcia $L(x, y, z)$ má tvar

$$L(y, x, z) = xy^2z^3 + \lambda \cdot (x + 2y + 3z - 6).$$

Stacionárne body funkcie $L(x, y, z)$ rešpektujúce predpísané väzby určíme z nasledujúcej sústavy rovníc a nerovníc

$$L'_x(x, y, z) = y^2z^3 + \lambda = 0,$$

$$L'_y(x, y, z) = 2xyz^3 + 2\lambda = 0,$$

$$L'_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0,$$

$$x + 2y + 3z = 6, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Nechávame na čitateľa, aby sa presvedčil, že tento systém relácií má jediné riešenie $x = y = z = 1$ a $\lambda = -1$:). Kandidátom na viazaný extrém funkcie $f(x, y, z)$ je teda bod $A = [1, 1, 1]$. Aby sme zistili jeho charakter, vyšetríme druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ funkcie $L(x, y, z)$ v bode A s ohľadom na predpísané väzbové podmienky. Diferenciál $\mathrm{d}^2L(A)$ má tvar

$$\mathrm{d}^2L(A) = L''_{xx}(A) \cdot (\mathrm{d}x)^2 + L''_{yy}(A) \cdot (\mathrm{d}y)^2 + L''_{zz}(A) \cdot (\mathrm{d}z)^2$$

$$+2L''_{xy}(A) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2L''_{xz}(A) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2L''_{yz}(A) \cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Potrebujeme teda vypočítať všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie $L(x, y, z)$ v bode A. Platí

$$L''_{xx}(A) = 0, \quad L''_{yy}(A) = 2, \quad L''_{zz}(A) = 6,$$

$$L''_{xy}(A) = 2, \quad L''_{xz}(A) = 3, \quad L''_{yz}(A) = 6$$

(samy overte ;)). Po dosadení do výrazu pre $\mathrm{d}^2L(A)$ dostaneme

$$\mathrm{d}^2L(A) = 2(\mathrm{d}y)^2 + 6(\mathrm{d}z)^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Jedná sa teda o kvadratickú formu troch premenných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$. Musíme si však uvedomiť, že prírastky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ nie sú vzájomne nezávislé. Môžeme s nimi hýbať iba v súlade s väzbovými podmienkami v zadaní príkladu.

Vzťah medzi $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ získame tak, že diferencujeme predpísanú väzbovú podmienku v bode A, t.j.,

$$\mathrm{d}(x+2y+3z-6)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z=0,$$

z čoho napríklad $\mathrm{d}x=-2\,\mathrm{d}y-3\,\mathrm{d}z$. To má za následok redukciu $\mathrm{d}^2L(A)$ na kvadratickú formu dvoch premenných $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$. Konkrétne, po dosadení a úprave získame vyjadrenie

$$\mathrm{d}^2L(A)=-6(\mathrm{d}y)^2-12(\mathrm{d}z)^2-12\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(samy overte :)). Až teraz skúmame definitnosť formy $\mathrm{d}^2L(A)$:). Jej matica

$$\begin{pmatrix}-6 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}$$

je negatívne definitná (samy overte pomocou hlavných minorov ;)). V bode A má teda funkcia $f(x,y,z)$ vzhľadom na predpísané väzby (viazané) ostré lokálne maximum s hodnotou $f(A)=1$.

Tento príklad ilustuje nutnosť rešpektovania väzbovej podmienky pri skúmaní definitnosti diferenciálu $\mathrm{d}^2L(A)$. Ak by sme totiž o definitnosti $\mathrm{d}^2L(A)$ rozhodovali na základe jeho všeobecného vyjadrenia

$$\mathrm{d}^2L(A)=2(\mathrm{d}y)^2+6(\mathrm{d}z)^2+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}x\mathrm{d}z+12\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

bez ohľadu na prítomnú väzbu $x+2y+3z-6=0$, dospeli by sme k záveru, že $\mathrm{d}^2L(A)$ je *indefinitný*. Vyplýva to z toho, že v tomto prípade je $\mathrm{d}^2L(A)$ kvadratickou formou troch premenných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ a matica tejto formy (pri $(\mathrm{d}x)^2$ je koeficient 0 :))

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ 3 & 6 & 6\end{pmatrix}$$

je indefinitná (samy sa presvedčte ;)). Lagrangeova funkcia $L(x,y,z)$ teda nemá v bode A *lokálny extrém*. To však ale ešte neznamená, že v bode A nemá ani *funkcia* $f(x,y,z)$ *viazaný lokálny extrém* :). Je potrebné si uvedomiť, že ak funkcia $L(x,y,z)$ má v bode A, ktorý vyhovuje väzbovým podmienkam, lokálny extrém, potom je to zároveň i viazaný lokálny extrém funkcie $f(x,y,z)$ (samy si dobre premyslite pomocou vhodného obrázku :)). To nám niekedy uľahčuje život, nakoľko v tomto prípade nemusíme brať do úvahy väzbové podmienky pri zisťovaní charakteru stacionárnych bodov funkcie $L(x, y, z)$ (pozri záver Príkladu 9). Avšak *vo všeobecnosti* ignorovanie väzbových podmienok môže mať za následok *stratu* viazaných lokálnych extrémov, ako sme sa o tom teraz presvedčili :).

Príklad 11
Na parabole $y^2 = 4x$ nájdime bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $x - y + 4 = 0$.

Riešenie:
Tento príklad je zameraný na geometrickú aplikáciu znalostí o viazaných extrémoch funkcií viac premenných. Nech $A = [x, y]$ je ľubovoľný bod na parabole $y^2 = 4x$ a $B = [u, v]$ ľubovoľný bod na priamke $u - v + 4 = 0$. Potom vzdialenosť $\varrho(A, B)$ bodov A a B je rovná

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

(uvažujeme štandardnú euklidovskú vzdialenosť :)). Vidíme, že $\varrho(A, B)$ je funkciou štyroch premenných x, y, u a v spĺňajúcich dve väzbové podmienky

$$y^2 = 4x \quad \text{a} \quad u - v + 4 = 0.$$

Keďže s odmocninami sa pracuje pomerne ťažkopádne, budeme uvažovať druhú mocninu vzdialenosti $\varrho^2(A, B)$. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že body A_0, B_0, v ktorých sa minimalizuje funkcia $\varrho(A, B)$, sú práve tie, v ktorých sa minimalizuje i funkcia $\varrho^2(A, B)$ a naopak :). Preto bez ujmy na všeobecnosti budeme uvažovať funkciu $f(x, y, u, v)$ s predpisom

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2.$$

Našou úlohou je nájsť viazané globálne minimum funkcie f za predpokladu podmienok $y^2 - 4x = 0$ a $u - v + 4 = 0$:). Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich príkladoch. Príslušná Lagrangeova funkcia $L(x, y, u, v)$ je

$$L(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda \cdot (y^2 - 4x) + \omega \cdot (u - v + 4).$$

Stanovíme jej stacionárne body vyhovujúce daným väzbovým podmienkam

$$L'_x(x, y, u, v) = 2(x - u) - 4\lambda = 0, \qquad L'_y(x, y, u, v) = 2(y - v) + 2\lambda \cdot y = 0,$$

$$L'_u(x,y,u,v) = -2(x-u)+\omega = 0, \qquad L'_v(x,y,u,v) = -2(y-v)-\omega = 0,$$

$$y^2-4x=0, \qquad u-v+4=0.$$

Táto sústava piatich rovníc s neznámymi $x, y, u, v, \lambda, \omega$ má jediné riešenie

$$x=1, \quad y=2, \quad u=-\frac{1}{2}, \quad v=\frac{7}{2}, \quad \lambda=\frac{3}{4}, \quad \omega=\frac{3}{2}$$

(samy overte ;)). Funkcia $L(x,y,u,v)$ má preto jediný stacionárny bod $C = \left[1,\, 2,\, -\frac{1}{2},\, \frac{7}{2}\right]$ spĺňajúci dané väzbové podmienky. Vyšetríme teraz definitnosť druhého diferenciálu funkcie $\mathrm{d}^2L(C)$. Postupne máme

$$L''_{xx}(C) = L''_{uu}(C) = L''_{vv}(C) = 2, \qquad L''_{yy}(C) = 2+2\lambda\,|_C = \frac{7}{2},$$

$$L''_{xy}(C) = L''_{xv}(C) = L''_{yu}(C) = L''_{uv}(C) = 0, \quad L''_{xu}(C) = -2, \quad L''_{yv}(C) = -2$$

(samy overte :)). Potom

$$\mathrm{d}^2L(C) = 2(\mathrm{d}x)^2 + \frac{7}{2}\,(\mathrm{d}y)^2 + 2(\mathrm{d}u)^2 + 2(\mathrm{d}v)^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}u - 4\mathrm{d}y\mathrm{d}v.$$

Potrebujeme ešte diferencovať väzbové podmienky v bode C a nájsť vzťah medzi prírastkami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$. Platí

$$\mathrm{d}(y^2-4x)=0 \quad\Longrightarrow\quad 2y\mathrm{d}y-4\mathrm{d}x=0 \quad\overset{x=1,\ y=1}{\Longrightarrow}\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(u-v+4)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}u-\mathrm{d}v=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}v=\mathrm{d}u.$$

Po dosadení do výrazu pre $\mathrm{d}^2L(C)$ získame kvadratickú formu dvoch premenných $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}u$, konkrétne

$$\mathrm{d}^2L(C) = 2(\mathrm{d}x)^2 + \frac{7}{2}\cdot\underbrace{(\mathrm{d}x)^2}_{(\mathrm{d}y)^2} + 2(\mathrm{d}u)^2 + 2\cdot\underbrace{(\mathrm{d}u)^2}_{(\mathrm{d}v)^2} - 4\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}u - 4\cdot\underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}u}_{\mathrm{d}y\mathrm{d}v}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}^2L(C) = \frac{11}{2}\cdot(\mathrm{d}x)^2 + 4(\mathrm{d}u)^2 - 8\mathrm{d}x\mathrm{d}u$$

(samy overte ;)). Posledná kvadratická forma dvoch premenných dx a du je pozitívne definitná, nakoľko jej odpovedajúca matica

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná (samy overte podľa hlavných minorov :)). Preto funkcia $f(x, y, u, v)$ má v bode C viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(C) = \frac{9}{2}$. Zároveň sa jedná i o viazané globálne minimum funkcie $f(x, y, u, v)$ (samy si premyslite prečo ;)).

Vrátiac sa k nášmu pôvodnému problému, dospeli sme k nasledujúcemu záveru. Bod $A_0 = [1, 2]$ na danej parabole a bod $B_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ na danej priamke majú najmenšiu vzájomnú vzdialenosť s hodnotou

$$\varrho(A_0, B_0) = \sqrt{f(C)} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bod A_0 má teda najmenšiu možnú vzdialenosť od priamky v zadaní príkladu (samy si dobre premyslite :)).

Poznámka k diferencovaniu väzbových podmienok

V tejto poznámke stručne vysvetlíme, čo to znamená *diferencovať väzbovú podmienku* v nejakom bode. Uvažujme napríklad väzbu v tvare

$$x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x = 2,$$

a ktorú chceme diferencovať v bode $A = [0, -1, \mathrm{e}]$ vyhovujúcom danej väzbe (samy overte :)). To znamená prepísať danú väzbovú podmienku na tvar

$$x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x - 2 = 0,$$

nájsť prvý diferenciál funkcie $f(x, y, z) = x^2 + \mathrm{e}^y z + y^2 \cos x - 2$ v bode A a položiť ho rovný nule :). Postupne platí

$$f'_x(A) = 2x - y^2 \sin x\,\big|_A = 0, \quad f'_y(A) = \mathrm{e}^y z + 2y \cos x\,|_A = -1, \quad f'_z(A) = \mathrm{e}^y\,|_A = \mathrm{e}^{-1}$$

(samy overte :)). Pre prvý diferenciál d$f(A)$ potom máme

$$\mathrm{d}f(A) = 0 \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z = -\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z.$$

Posledný výraz položíme rovný nule, t.j.,

$$-\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}z = \mathrm{e}\,\mathrm{d}y.$$

Nuž a takto sme uvedenú väzbu diferencovali v bode A :). Čo to však v skutočnosti znamená? Daná väzba istým spôsobom viaže premenné x, y, z. V našom prípade to bude zrejme nejaká plocha v $\mathbb{R}^3$, konkrétne s rovnicou $z = \mathrm{e}^{-y}(2 - x^2 - y^2 \cos x)$. Keď sedíme na nejakom *zafixovanom* bode A tejto plochy a chceme sa presunúť do iného bodu na tejto ploche, nemôžeme s prírastkami $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ šibrinkovať ľubovoľne, chceme predsa stále zostať na danej ploche. Preto $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ v danom bode A nie sú nezávislé, a teda spolu nejako súvisia. Tým, že danú väzbu (plochu) diferencujeme v bode A, nájdeme túto súvislosť, konkrétne máme $\mathrm{d}z = \mathrm{e}\,\mathrm{d}y$:). Ak $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ zvolíme ľubovoľne, prírastok $\mathrm{d}z$ je už určený jednoznačne. V inom bode danej plochy je závislosť prírastkov $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ pochopiteľne iná (preto je i zvýraznené slovo „zafixovaný“ ;)).