Fyzikálne aplikácie lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu s konštantnými koeficientami

Diferenciálne rovnice sú úzko späté s fyzikou. Samotný vznik a štúdium pojmu diferenciálna rovnica bol podnietený práve fyzikálnymi dôvodmi. Prakticky každý fyzikálny zákon klasickej (i relativistickej) fyziky je svojim spôsobom vyjadrený pomocou nejakej diferenciálnej rovnice. Obzvlášť v mechanike (ale i v iných častiach fyziky) majú fundamentálny význam práve lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, a to najmä s konštantnými koeficientami. Linearita rovníc je podmienená princípom superpozície – v prírode vypozorované vzájomné skladanie rôznych pohybov a síl. Druhý rád rovníc je dôsledkom toho, že pôsobiace sily sú úmerné zrýchleniam, ktoré sú práve druhými časovými deriváciami polohového vektora.

Významnou aplikáciou LDR 2. rádu s konštantnými koeficienatmi je pohyb harmonického oscilátora – vo svojej podstate a najjednoduchšej forme ide o kmitajúcu pružinku, na ktorej je zavesené závažie. Ak y označuje výchylku pružinky z rovnovážnej polohy, tak pri malých výchylkách y je pružná sila pôsobiaca na závažie určená Hookeovym zákonom:

$$F_p = -ky,$$

kde $k > 0$ je materiálová konštanta, nazýva sa tuhosť pružiny. Znamienko mínus symbolizuje, že sila je namierená proti výchylke y – sila sa teda snaží vrátiť závažie späť do rovnovážnej polohy (ako je nám známe z praxe). Celková sila F pôsobiaca na závažie je podľa Newtonovho zákona rovná:

$$F = ma,$$

kde m je hmotnosť závažia a a je zrýchlenie závažia. Zrýchlenie a je určené druhou deriváciou y'' výchylky y podľa času t, kým rýchlosť závažia v je zas prvá derivácia y'. Pre silu F teda platí:

$$F = my''.$$

Pri harmonickom kmitaní rozlišujeme viaceré prípady:

1. **netlmené kmitanie** – na závažie pôsobí iba sila pružnosti F_p:

$$F = F_p,$$

teda:

$$my'' = -ky.$$

Máme diferenciálnu popisujúcu pohyb závažia v čase (nezávislou premennou je čas t). Táto rovnica sa zvykne prepísať do takéhoto tvaru:

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

kde $\omega^2 = k/m$. Veličina ω sa nazýva uhlová frekvencia pohybu. Ďalšie veličiny súvisiace s harmonickým kmitaním sú:

- T – perióda pohybu, čas jedného kmitu, $T = 2\pi/\omega$
- f – frekvencia pohybu, počet kmitov za jednotku času, $f = 1/T$

2. **tlmené kmitanie** – na závažie okrem sily pružnosti F_p pôsobí aj odporová prostredia F_O, ktorá je zhruba úmerná rýchlosti v závažia:

$$F_O = -bv = -by',$$

kde $b \geq 0$ je konštanta, nazýva sa koeficient odporu. Záporne znamienko znamená, že odpor prostredia je namierený proti pohybu závažia (brzdí jeho pohyb). Celková sila F pôsobiaca na závažie je:

$$F = F_p + F_O,$$

teda:

$$my'' = -ky - by'.$$

Máme diferenciálnu popisujúcu pohyb závažia v čase. Táto rovnica sa zvykne prepísať do takéhoto tvaru:

$$y'' + 2\delta y' + \omega y = 0,$$

kde $2\delta = b/m$ sa nazýva konštanta tlmenia. Poznamenajme, že pokiaľ je tlmenie veľké, t.j. $\delta \geq \omega$, tak pohyb nie je periodický. Ak je tlmenie malé, t.j. $\delta < \omega$, tak sa jedná o tlmené kmitanie (amplitúda, t.j. maximálna hodnota výchylky $y_{\max}$ sa postupne zmenšuje).

3. **vynútené kmitanie** – na závažie okrem sily pružnosti F_p a odporovej sily prostredia F_O pôsobí aj vonkajšia periodicky sa meniaca sila F_V, ktorá sa väčšinou uvažuje v tvare:

$$F_V = A \sin \Omega t,$$

kde A, Ω sú kladné konštanty. Môžeme si to predstaviť tak, že závažiu periodicky dodávame energiu, ktorú pri pohybe stráca v dôsledku odporu prostredia. Platí:

$$F = F_p + F_O + F_V,$$

teda:

$$my'' = -ky - by' + A \sin \Omega t.$$

Máme diferenciálnu popisujúcu pohyb závažia v čase. Táto rovnica sa zvykne prepísať do takéhoto tvaru:

$$y'' + 2\delta y' + \omega y = (A/m) \sin \Omega t.$$

Poznamenajme, že pohyb závažia závisí na vzájomnom vzťahu veličín ω, Ω, t.j., napr. či vonkajšia sila F_V kmitá „vo fáze“ s pohybom závažia alebo nie a pod. (Pekne to ilustruje napr. druhý neriešený príklad; závažie bude postupom času čoraz šialenejšie kmitať, čo v konečnom dôsledku povedie ku katastrofe. Všimnite si, v akom vzťahu sú v tomto prípade uhlové frekvencie ω a Ω.)

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami. Pri riešení pohybových rovníc vychádzame vždy z nejakých začiatočných podmienok – závažie v čase $t = 0$ má nejakú výchylku y_0 a nejakú rýchlosť v_0:

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = v_0.$$

Riešené príklady

Príklad 1

Závažie s $m = 0.1$ kg kmitá na pružine s $k = 20$ kg/s^2. Z rovnovážnej polohy je vypustené s rýchlosťou 0.1 m/s. Určte závislosť výchylky y na čase a čas, za ktorý sa vráti naspäť do rovnovážnej polohy. Odpor prostredia zanedbajte.

Riešenie:
Ide o netlmené kmitanie, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{200}$ s^{-2}. Riešime preto začiatočnú úlohu:

$$y'' + 200y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1.$$

Všeobecné riešenie je:

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{200}t) + C_2 \cos(\sqrt{200}t).$$

Hľadáme partikulárne riešenie spĺňajúce uvedené začiatočné podmienky. Nájdeme: $C_1 = 1/\sqrt{2}$, $C_2 = 0$. Rovnica pohybu závažia teda je:

$$y(t) = (1/\sqrt{2})\sin(\sqrt{200}t).$$

Čas t_0, za ktorý sa závažie vráti späť do rovnovážnej polohy, nájdeme z podmienky:

$$y(t_0) = 0 \implies (1/\sqrt{2})\sin(\sqrt{200}t_0) = 0,$$

pričom hľadáme najmenšie kladné t_0. Zistíme: $t_0 = \pi/\sqrt{200}$.

Príklad 2

Závažie s $m = 2$ kg kmitá na pružine s $k = 128$ kg/s^2. Z rovnovážnej polohy závažie vychýlime o 0.5 m a pustíme rýchlosťou 0.6 m/s. Nájdite závislosť výchylky y na čase t. Uvažujte odpor prostredia s konštantou tlmenia $\delta = 10$ s^{-1}.

Riešenie:

Ide o tlmené kmitanie, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{64} = 8$ s^{-2}. Začiatočná výchylka (v čase $t = 0$) $y_0 = 0.5$ m a začiatočná rýchlosť $v_0 = 0.6$ m/s. Riešime preto začiatočnú úlohu:

$$y'' + 20y' + 64y = 0, \qquad y(0) = 0.5, \quad y'(0) = 0.6.$$

Všeobecné riešenie je:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-4t} + C_2 \mathrm{e}^{-16t}.$$

Pre hľadané partikulárne riešenie zistíme: $C_1 = 43/60$, $C_2 = -13/60$. Preto:

$$y(t) = \frac{1}{60}(43\mathrm{e}^{-4t} - 13\mathrm{e}^{-16t}).$$

Vidíme, že nejde o periodický pohyb. Začiatočná výchylka bude exponenciálne klesať, pričom nulová bude pre veľmi veľký čas (presne pre $t = \infty$; samozrejme z praxe vieme, že závažie sa zastaví v nejakom reálnom čase; náš model neodpovedá úplnej realite, nakoľko sme neuvažovali všetky vplyvy prostredia na pohyb závažia; odpor prostredia v skutočnosti závisí na rýchlosti (a nielen na nej) omnoho zložitejšie, než sme predpokladali).

Príklad 3

Závažie s $m = 3$ kg je zavesené na pružine s $k = 75$ kg/s^2. Z rovnovážnej polohy závažie stiahneme o 0.2 m a pustíme rýchlosťou 0.1 m/s. Nájdite závislosť výchylky y na čase t. Uvažujte odpor prostredia s konštantou tlmenia $\delta = 15$ s^{-1}. Na závažie pôsobí periodicky sa meniaca sila $F(t) = 10\cos 5t$.

Riešenie:
Ide o vynútené kmitanie, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{25} = 5$ s^{-2}. Začiatočná výchylka (v čase $t = 0$) $y_0 = -0.2$ m a začiatočná rýchlosť $v_0 = 0.1$ m/s (nakoľko je závažie zavesené, tak smer „hore“ bude kladný a smer „dole“ bude záporný; závažie je stiahnuté smerom dole o 0.2 m, preto záporné znamienko; naproti tomu rýchlosť 0.1 m/s bude namierená smerom „hore“, k rovnovážnej polohe, preto má kladné znamienko). Riešime začiatočnú úlohu:

$$y'' + 30y' + 25y = 10\cos 5t, \qquad y(0) = -0.2, \quad y'(0) = 0.1.$$

Všeobecné riešenie je:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{(-15+10\sqrt{2})t} + C_2 \mathrm{e}^{(-15-10\sqrt{2})t} + \frac{1}{45}\sin 5t.$$

Pre hľadané partikulárne riešenie máme: $C_1 \approx -0.20654$, $C_2 = 0.00646$, teda:

$$y(t) = -0.20654\mathrm{e}^{(-15+10\sqrt{2})t} + 0.00646\mathrm{e}^{(-15-10\sqrt{2})t} + \frac{1}{45}\sin 5t.$$

V tomto prípade zo začiatku (t.j. pre nie veľký čas) pôjde o neharmonické kmitanie, v dôsledku exponenciálnych členov. Avšak pre veľké časy exponenciálne členy budú veľmi malé (čísla $-15 \pm 10\sqrt{2}$ sú obe záporné) a dominantná bude harmonická časť $\frac{1}{45}\sin 5t$; po dostatočne dlhej dobe bude teda závažie kmitať takmer harmonicky s priebehom $\frac{1}{45}\sin 5t$.

Neriešené príklady

1. Zavesené závažie s $m = 0.5$ kg natiahne pružinu o 0.05 m. Z rovnovážnej polohy závažie stlačíme o 0.02 m nahor a pustíme rýchlosťou 0.6 m/s. Nájdite závislosť výchylky y na čase t. Odpor prostredia neuvažujte.

   $[y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{100}\sin(10\sqrt{2}t) + \frac{2}{100}\cos(10\sqrt{2}t)]$

2. Zavesené závažie s $m = 3$ kg natiahne pružinu o 0.4 m. Z rovnovážnej polohy závažie stiahneme o 0.2 m nadol a pustíme rýchlosťou 0.1 m/s. Nájdite závislosť výchylky y na čase t, ak na závažie pôsobí periodicky sa meniaca sila $F(t) = 10\cos 5t$. Odpor prostredia neuvažujte.

   ($y(t) = \frac{1}{50}\sin(5t) - \frac{1}{5}\cos(5t) + \frac{1}{3}t\sin(5t)$, nastáva rezonancia, výchylka bude neobmedzene rásť pre $t \to \infty$)

3. Zavesené závažie s $m = 3.6$ kg natiahne pružinu o $5/32$ cm. Z rovnovážnej polohy závažie stlačíme o $1/128$ m nahor a voľne pustíme. Nájdite závislosť výchylky y na čase t, ak na závažie pôsobí periodicky sa meniaca sila $F(t) = 3.6\sin 8t$. Odpor prostredia neuvažujte. Určte prvé štyri kladné časy, kedy má závažie nulovú rýchlosť.

   [$y(t) = \frac{1}{128}\left(\sin(8t) + \cos(8t) - 8t\cos(8t)\right)$, $\quad t_1 = 1/8, \quad t_2 = \pi/8, \quad t_3 = \pi/4, \quad t_4 = 3\pi/8$]

Poznámka

- Tuhosť pružiny k zistíme pomocou Hookeovho zákona:

$$\text{(veľkosť pružnej sily)} = -k \cdot \text{(predĺženie pružiny)}.$$

  Zavesené závažie natiahne pružinu a zostane v pokoji. V tomto okamihu na závažie pôsobia dve sily. Prvá z nich je tiažová sila F_g spôsobená príťažlivosťou a pohybom Zeme; namierená smerom dole a platí pre ňu $F_g = mg$, kde m je hmotnosť závažia a konštanta $g \approx 10$ m/s^2 sa nazýva tiažové zrýchlenie. Druhá sila pôsobiaca na závažie je pružná sila strunky F_p. Tá je namierená smerom hore (proti výchylke). Keďže závažie je po ustálení v pokoji, musia byť tieto dve sily v rovnováhe, teda $F_G + F_p = 0$. Pre tuhosť k potom platí:

$$k = \frac{+F_g}{\text{(predĺženie pružiny)}} = \frac{mg}{\text{(predĺženie pružiny)}}.$$