Príklady na precvičovanie – metrické priestory

Riešené príklady

Príklad 1

Určte vzdialenosť bodov $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ v súčtovej, euklidovskej a maximálnej metrike.

Riešenie:

Podľa definície jednotlivých metrík postupne dostaneme pre body $A = [a_1, a_2] = [0, 1]$ a $B = [b_1, b_2] = [1, 2]$:

$$\rho_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = 2,$$

$$\rho_2(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{2},$$

$$\rho_\infty(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = \max\{1, 1\} = 1.$$

Príklad 2

Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = [5, 6]$ od priamky $p : y = -x - 1$ v a) súčtovej metrike ρ_1, b) euklidovskej metrike ρ_2.

Riešenie:

a) Z definície vzdialenosti bodu od množiny máme:

$$\rho_1(A, p) = \inf\{\rho_1(A, P), P \text{ je bod na priamke } p\}.$$

Ľubovoľný bod P na priamke p má súradnice $P = [x, y] = [x, -x-1]$, nakoľko $y = -x - 1$ podľa zadania. Preto:

$$\rho_1(A, P) = |5 - x| + |6 - y| = |5 - x| + |7 + x|.$$

Hľadaná vzdialenosť $\rho_1(A, p)$ bude teda minimálna (infimálna) hodnota výrazu $|5-x|+|7+x|$ pre $x \in \mathbb{R}$. Nakreslením grafu funkcie $f(x) = |5-x|+|7+x|$ ľahko zistíme, že $\min f(x) = 12$, a teda $\rho_1(A, p)$=12.

b) V prípade euklidovskej metriky ρ_2 postupujeme podobne. Vzdialenosť bodu A od ľubovoľného bodu P na priamke p bude:

$$\rho_2(A, P) = \sqrt{(5 - x)^2 + (6 - y)^2} = \sqrt{(5 - x)^2 + (7 + x)^2}.$$

Hľadáme teraz globálne minimum funkcie $g(x) = \sqrt{(5-x)^2 + (7+x)^2}$ na celom $\mathbb{R}$; to bude hľadaná vzdialenosť bodu A od priamky p. Keďže pre $x \to \pm\infty$ ide $g(x)$ do plus nekonečna, globálne minimum $g(x)$ sa musí nadobúdať jedine v jej stacionárnom bode. Vypočítame preto deriváciu $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{(5-x)^2 + (7+x)^2}}.$$

Máme len jeden stacionárny bod $x = -1$, pričom $g(-1) = 6\sqrt{2}$. Preto $\rho_2(A, p) = 6\sqrt{2}$.

Príklad 3
Popíšte jednotkovú kružnicu v $\mathbb{R}^2$ a jednotkovú sféru v $\mathbb{R}^3$ v metrikách ρ_1, ρ_2 a ρ_∞.

Riešenie:
Pripomeňme, že vo všeobecnom metrickom priestore s metrikou ρ je „jednotková sféra“ so stredom v bode a definovaná ako množina bodov x metrického priestoru s vlastnosťou $\rho(a, x) = 1$. Aplikujúc toto na našu úlohu s $a = [0, 0]$ postupne dostávame:

1. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ – $\rho_1([0,0],[x,y]) = 1 \Longrightarrow |x| + |y| = 1$.
2. $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ – $\rho_2([0,0],[x,y]) = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
3. $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ – $\rho_\infty([0,0],[x,y]) = 1 \Longrightarrow \max\{|x|, |y|\} = 1$.

Jednotlivé množiny bodov $[x, y]$ sú vykreslené v zbierke Hasil–Zemánek. Ďalej v priestore $\mathbb{R}^3$ dostaneme:

1. $(\mathbb{R}^3, \rho_1)$ – $\rho_1([0,0,0],[x,y,z]) = 1 \Longrightarrow |x| + |y| + |y| = 1$.
2. $(\mathbb{R}^3, \rho_2)$ – $\rho_2([0,0,0],[x,y,z]) = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. $(\mathbb{R}^3, \rho_\infty)$ – $\rho_\infty([0,0,0],[x,y,z]) = 1 \Longrightarrow \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1$.

Jednotlivé množiny bodov $[x, y]$ sú opäť popísané v zbierke Hasil–Zemánek (skúste si ich načrtnúť a tým overiť správnosť výsledku).

Príklad 4
Určte vzdialenosť funkcií $f(x), g(x) \in \mathcal{C}[1, \mathrm{e}]$, kde $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$, v

metrikách ρ_c, ρ_I.

Riešenie:
Jednotlivé vzdialenosti sú definované nasledovne:

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[1,\mathrm{e}]} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in[1,\mathrm{e}]} |x - \ln x|,$$

$$\rho_I(f,g) = \int_1^{\mathrm{e}} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} |x - \ln x|\,\mathrm{d}x.$$

Potrebujeme vo výraze $|x - \ln x|$ odstrániť absolútnu hodnotu, t.j. zistiť znamienko výrazu $x - \ln x$ na intervale $[1,\mathrm{e}]$. Inými slovami, chceme zistiť, ktorá z daných dvoch funkcií je na tomto intervale väčšia. Nakreslením vhodného obrázku zistíme, že $x > \ln x$ na $[1,\mathrm{e}]$. Preto $|x - \ln x| = x - \ln x$. Pre vzdialenosť $\rho_c(f,g)$ potom platí:

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[1,\mathrm{e}]} (x - \ln x).$$

Hľadáme teda globálne maximum funkcie $x - \ln x$ na uzavretom intervale $[1,\mathrm{e}]$. Postupujeme štandardným spôsobom. Daný výraz nemá stacionáry bod v $(1,\mathrm{e})$, nakoľko derivácia $(x - \ln x)' = 1 - 1/x$ je kladná na $(1,\mathrm{e})$. Preto funkcia $x - \ln x$ je rastúca na $[1,\mathrm{e}]$, a teda svoju maximálnu hodnotu nadobúda v krajnom bode $x = \mathrm{e}$. Takže $\rho_c(f,g) = \mathrm{e} - \ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - 1$.

Pre vzdialenosť $\rho_I(f,g)$ platí:

$$\rho_I(f,g) = \int_1^{\mathrm{e}} (x - \ln x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárnou integráciou per-partes dostaneme $\rho_I(f,g) = (\mathrm{e}^2 - 3)/2$.

Príklad 5
Pre $x \in [0,1]$ určte hodnotu $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcia $f(x) = ax$ mala najmenšiu vzdialenosť od funkcie $g(x) = x^2$ v metrike ρ_c.

Riešenie:
Postup je nasledovný. Zistíme všeobecnú závislosť vzdialenosti $\rho_c(f,g)$ na parametre $a \in \mathbb{R}$ a potom určíme to a, pre ktoré je $\rho_c(f,g)$ najmenšie. Platí:

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in[0,1]} |ax - x^2|.$$

Máme nájsť maximánu hodnotu výrazu $|ax - x^2|$ na intervale $[0, 1]$. Potiaže nám robí absolútna hodnota. Pomôže nám jeden trik. Nie je ťažké si uvedomiť, že v bode $x_0 \in [0, 1]$ výraz $|ax - x^2|$ nadobúda svoje maximum na $[0, 1]$ práve vtedy, keď v x_0 má maximum i výraz $|ax - x^2|^2 = (ax - x^2)^2$ (premyslite si to; druhá mocnina je pre kladný argument rastúcou funkciou). Úlohu maximalizovať výraz $|ax - x^2|$ na intervale $[0, 1]$ môžeme teda previesť na maximalizáciu funkcie $h(x) = (ax - x^2)^2$, kde už nijakú absolútnu hodnotu nemáme. Naviac platí:

$$\max_{x\in[0,1]} h(x) = \max_{x\in[0,1]} (ax - x^2)^2 = \left(\max_{x\in[0,1]} |ax - x^2| \right)^2 = \rho_c^2(f, g),$$

teda:

$$\rho_c(f, g) = \sqrt{\max_{x\in[0,1]} h(x)}.$$

Tento trik je v matematickej analýze častý a veľmi uľahčuje výpočty. Globálne maximum funkcie $h(x)$ na $[0, 1]$ počítame klasickým spôsobom. Zistíme stacionárne body $h(x)$ v $(0, 1)$:

$$h'(x) = \big((ax - x^2)^2\big)' = 2(ax - x^2)(a - 2x) = 2x(a - x)(a - 2x) = 0.$$

Odtiaľ $x = 0$ alebo $x = a$, alebo $x = a/2$. Do úvahy pripadajú len body a, $a/2$, nakoľko $0 \notin (0, 1)$. Hodnoty funkcie $h(x)$ v stacionárnych bodoch a v krajných bodoch 0, 1 sú:

$$h(a) = 0, \quad h(a/2) = a^4/16 \geq 0, \quad h(0) = 0, \quad h(1) = (a - 1)^2 \geq 0.$$

Z toho vidíme, že kandidátmi na maximum môžu byť len body $x = a/2$ a $x = 1$. Máme niekoľko možných prípadov:

- $a/2 \notin (0, 1)$, resp. $a \notin (0, 2)$ – v tomto prípade nemáme v $(0, 1)$ žiadny stacionárny bod. Funkcia $h(x)$ je rýdzo monotónna na $[0, 1]$, a to rastúca. Maximálna hodnota h je $h(1) = (a - 1)^2$. Preto $\rho_c(f, g) = \sqrt{(a - 1)^2} = |a - 1|$.

- $a/2 \in (0, 1)$, resp. $a \in (0, 2)$ – v tomto prípade máme v $(0, 1)$ práve jeden stacionárny bod. Maximum h bude preto väčšia z hodnôt $h(a/2) = a^4/16$ a $h(1) = (a - 1)^2$. Nie je ťažké ukázať, že:

$$\text{pre } a \in (0,\ 2\sqrt{2} - 2] \text{ je } a^4/16 \leq (a - 1)^2,$$

$$\text{pre } a \in [2\sqrt{2} - 2,\, 2) \text{ je } a^4/16 \geq (a-1)^2.$$

(overte; nájdite nulové body výrazu $a^4/16 - (a-1)^2$ ležiace v $(0, 2)$ a potom rozhodnite o jeho znamienku). Preto dostávame:

$$\text{pre } a \in (0,\, 2\sqrt{2} - 2] \text{ má } h \text{ maximum } (a-1)^2 \text{ a } \rho_c(f, g) = |a-1|,$$

$$\text{pre } a \in [2\sqrt{2} - 2,\, 2) \text{ má } h \text{ maximum } a^4/16 \text{ a } \rho_c(f, g) = a^2/4.$$

Odvodili sme teda kompletnú závislosť vzdialenosti $\rho_c(f, g)$ na parametre a:

$$\rho_c(f, g) = \begin{cases} |a-1|, & a \in (-\infty,\, 2\sqrt{2} - 2], \\ a^2/4, & a \in [2\sqrt{2} - 2,\, 2), \\ |a-1|, & a \in [2, \infty). \end{cases}$$

Zakreslením tejto závislosti zistíme, že minimálna hodnota $\rho_c(f, g)$ sa nadobúda pre $a = 2\sqrt{2} - 2$.

Príklad 6

Pre $x \in [0, 1]$ určte hodnotu $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcia $f(x) = ax$ mala najmenšiu vzdialenosť od funkcie $g(x) = x^2$ a) v metrike ρ_I, b) v metrike ρ definovanej:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Riešenie:

Stratégia je podobná ako v predchádzajúcom príklade. V oboch prípadoch odvodíme závislosť vzájomnej vzdialenosti funkcií f, g na parametre a a následne stanovíme, pre aké a je táto vzdialenosť najmenšia.

a) Platí:

$$\rho_I(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 |ax - x^2| \, \mathrm{d}x.$$

Chceme odstrániť absolútnu hodnotu v danom integrále. Na to potrebujeme poznať znamienko výrazu $ax - x^2 = (a - x)x$. Úloha sa nám rozpadne na tri prípady:

- $a \in (-\infty, 0)$ – v tomto prípade je výraz $ax - x^2$ záporný pre každé $x \in [0, 1]$; preto integráciou dostaneme:

$$\rho_I(f, g) = \int_0^1 (x^2 - ax) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}.$$

- $a \in [0,1]$ – v tomto prípade je výraz $ax - x^2$ kladný pre $x \in [0,a]$ a záporný pre $x \in [a,1]$; preto daný integrál musíme rozdeliť na dva integrály a až potom odstraňovať absolútnu hodnotu. Dostaneme:

$$\rho_I(f,g) = \int_0^a |ax - x^2|\,\mathrm{d}x + \int_a^1 |ax - x^2|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^a (ax - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 (x^2 - ax)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

- $a \in (1,\infty)$ – v tomto prípade je výraz $ax - x^2$ kladný pre každé $x \in [0,1]$; preto integráciou dostaneme:

$$\rho_I(f,g) = \int_0^1 (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

Odvodili sme teda závislosť vzdialenosti $\rho_I(f,g)$ na parametre a:

$$\rho_I(f,g) = \begin{cases} 1/3 - a/2, & a \in (-\infty,0), \\ a^3/3 - a/2 + 1/3, & a \in [0,1], \\ a/2 - 1/3, & a \in (1,\infty), \end{cases}$$

Zakreslením tejto závislosti zistíme, že minimálna hodnota sa bude nadobúdať v intervale $a \in [0,1]$ (overte). Hľadáme teda globálne minimum výrazu $a^3/3 - a/2 + 1/3$ na intervale $[0,1]$. Štandardnou metódou dostaneme, že toto minimum sa nadobúda pre stacionárny bod $a = 1/\sqrt{2}$ (samy overte). Teda vzdialenosť $\rho_I(f,g)$ je minimálna pre hodnotu $a = 1/\sqrt{2}$.

b) Postupujeme úplne rovnako. Výhodou je, že v tomto prípade nemusíme odstraňovať absolútnu hodnotu, nakoľko:

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 (ax - x^2)^2\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}}.$$

Hľadáme minimálnu hodnotu výrazu $\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}}$, kde $a \in \mathbb{R}$. Nadobúdať sa bude práve v stacionárnom bode tohto výrazu (prečo? :)). Výpočtom zistíme $a = 3/4$. Teda vzdialenosť $\rho(f,g)$ je minimálna pre hodnotu $a = 3/4$.

Poznamenajme, že minimum výrazu $\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}}$ sa bude nadobúdať v rovnakom bode a, ako minimum výrazu $\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}$. Vyplýva to z toho, že druhá odmocnina $\sqrt{\ }$ je rastúca funkcia svojho argumentu. Preto stačí hľadať minimum paraboly $\frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{5}$, o ktorom zo strednej školy vieme, že ak existuje, nadobúda sa práve v jej vrchole, teda presne v bode $a = 3/4$.

Príklad 7

Rozhodnite, či funkcia $\rho(x,y) = \ln(1 + |x - y|)$, $x, y \in \mathbb{R}$, je metrikou na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

Toto je typický príklad na metriku. Je potrebné overiť, či daná funkcia ρ spĺňa definičné axiómy metriky:

(i) nezápornosť a axióm totožnosti – $\rho(x,y)$ je nezáporná pre každú dvojicu $x, y \in \mathbb{R}$, nakoľko $\ln(1 + |x - y|) \geq 0$ (spomeňme si na vlastnosti logaritmu, kde je kladný a kde záporný). Ďalej $\rho(x,x) = \ln(1+|x-x|) = \ln 1 = 0$. Na druhej strane, ak $\rho(x,y) = 0$, potom $\ln(1 + |x - y|) = 0$. Teda:

$$e^{\ln(1+|x-y|)} = e^0,$$

$$1 + |x - y| = 1,$$

$$|x - y| = 0 \implies x = y.$$

(ii) axióm symetrie – je zrejmé, že $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ pre každé $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) trojuholníková nerovnosť – toto obvykle býva najťažšia časť. Chceme ukázať, že pre každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) \geq \rho(x,y).$$

Postupnými úpravami, využijúc vlastnosti logaritmu, dostaneme:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \ln(1 + |x - z|) + \ln(1 + |z - y|) =$$

$$= \ln\left[(1 + |x - z|) \cdot (1 + |z - y|)\right] =$$

$$= \ln\left[1 + |x - z| + |z - y| + |x - z| \cdot |z - y|\right] \geq$$

$$\geq \ln[1 + |x - z| + |z - y|] \geq \ln[1 + |x - y|] = \rho(x,y).$$

Pri prechode z 1. na 2. riadok sme využili vlastnosť logaritmu $\ln a + \ln b = \ln ab$. Pri prechode z 3. na 4. riadok sme využili fakt, že logaritmus je rastúca funkcia svojho argumentu a skutočnosť $1 + |x - z| + |z - y| + |x - z| \cdot |z - y| \geq 1 + |x - z| + |z - y|$. Monotónnosť logaritmu sme aplikovali i na 4. riadku, využijúc trojuholníkovú nerovnosť $|x - z| + |z - y| \geq |x - y|$.

Overili sme teda platnosť všetkých troch axióm metriky. Preto funkcia ρ je metrikou na množine $\mathbb{R}$.

Príklad 8

Rozhodnite, či funkcia $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$, $x, y \in \mathbb{R}$, je metrikou na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

Nie je splnený axióm totožnosti; totiž voľbou $x \neq 0$ a $y = -x$ máme $\rho(x, y) = 0$, ale $x \neq y$. Preto daná funkcia ρ neudáva na $\mathbb{R}$ metriku.

Príklad 9

Rozhodnite, či funkcia

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \min\{|x| + |y|,\ |x - 1| + |y - 1|\}, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

je metrikou na množine $\mathbb{C}$.

Riešenie:

Postupujeme ako v predchádzajúcich príkladoch. Overenie prvých dvoch axióm metriky nechávame na čitateľa :). Overíme trojuholníkovú nerovnosť, t.j., ukážeme, že pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y).$$

V prípade, ak $x = y$ alebo $x = z$, alebo $y = z$, je overenie jednoduché:

- $x = y$:

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, x) = 2\rho(x, z) \geq 0 = \rho(x, x) = \rho(x, y).$$

- $x = z$ (platí dokonca rovnosť):

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, x) + \rho(x, y) = 0 + \rho(x, y) = \rho(x, y).$$

- $y = z$ (platí dokonca rovnosť):

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,y) + \rho(y,y) = \rho(x,y) + 0 = \rho(x,y).$$

Pre dôkaz všeobecného prípadu, t.j. $x \neq y \neq z$, využijeme pomocné trojuholníkové nerovnosti platiace pre každé $a \in \mathbb{C}$:

$$|a| + |a-1| \geq 1, \quad |a| + 1 \geq |a-1|, \quad |a-1| + 1 \geq |a|.$$

(overte samy; zakreslite do komplexnej roviny čísla 0, a, $a-1$ a na vzniknutý rovinný trojuholník aplikujte „skutočnú“ trojuholníkovú nerovnosť známu zo základnej školy :)). V tomto príde sa vzdialenosti $\rho(x,y)$, resp. $\rho(x,z)$, resp. $\rho(z,y)$ budú určovať ako minimum z hodnôt $|x|+|y|$ a $|x-1|+|y-1|$, resp. $|x|+|z|$ a $|x-1|+|z-1|$, resp. $|z|+|y|$ a $|z-1|+|y-1|$. Neostáva nám nič iné, ako prebrať všetky prípady :-/. Tak s chuťou do toho:

- $\rho(x,z) = |x| + |z|$ a $\rho(z,y) = |z| + |y|$:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = |x| + |y| + 2|z| \geq |x| + |y| \geq \rho(x,y).$$

- $\rho(x,z) = |x| + |z|$ a $\rho(z,y) = |z-1| + |y-1|$:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = |x| + |y-1| + |z| + |z-1| \geq |x| + |y-1| + 1 \geq$$
$$\geq |x| + |y| \geq \rho(x,y).$$

  (aplikovali sme dvakrát pomocné trojuholníkové nerovnosti, a to $|z| + |z-1| \geq 1$ a $|y-1| + 1 \geq |y|$)

- $\rho(x,z) = |x-1| + |z-1|$ a $\rho(z,y) = |z| + |y|$:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = |x-1| + |y| + |z-1| + |z| \geq |x-1| + |y| + 1 \geq$$
$$\geq |x-1| + |y-1| \geq \rho(x,y).$$

  (aplikovali sme dvakrát pomocné trojuholníkové nerovnosti, a to $|z-1| + |z| \geq 1$ a $|y| + 1 \geq |y-1|$)

- $\rho(x,z) = |x-1| + |z-1|$ a $\rho(z,y) = |z-1| + |y-1|$:

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = |x-1| + |y-1| + 2|z-1| \geq |x-1| + |y-1| \geq \rho(x,y).$$

Vo všetkých možných prípadoch platí trojuholníková nerovnosť, a teda funkcia ρ je metrikou na $\mathbb{C}$.

Príklad 10
Na množine $\mathcal{C}[-1,1]$ uvažujme metriku ρ_I a metriku σ definovanú takto:

$$\forall\, f, g \in \mathcal{C}[-1,1] \,:\, \sigma(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Ďalej pre pevné $k \in \mathbb{R}$ uvažujme zbrazenie $F \,:\, (\mathcal{C}[-1,1], \rho_I) \longrightarrow (\mathcal{C}[-1,1], \sigma)$ definované $F(f)(x) = kf(x^3)$, $f \in \mathcal{C}[-1,1]$. Pre aké k je F izometrické zobrazenie metrických priestorov?

Riešenie:
Ak F je izometria, potom pre každé $f, g \in \mathcal{C}[-1,1]$ musí platiť:

$$\sigma(F(f), F(g)) = \rho_I(f,g),$$

t.j. zobrazenie F zachováva vzdialenosti ($F(f)$ je označenie novej funkcie, obrazu funkcie f v zobrazení F; symbol $F(f)(x)$ je potom hodnota funkcie $F(f)$ v bode x) Podľa definície metriky σ a zobrazenia F platí:

$$\sigma(F(f), F(g)) = \int_{-1}^{1} x^2 |F(f)(x) - F(g)(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 |kf(x^3) - kg(x^3)| \,\mathrm{d}x.$$

V poslednom integrále vykonáme substitúciu $t = x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^3 \mathrm{d}x$. Dostaneme:

$$\int_{-1}^{1} x^2 |kf(x^3) - kg(x^3)| \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} |kf(t) - kg(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|k|}{3} \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Teda:

$$\sigma(F(f), F(g)) = \frac{|k|}{3} \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|k|}{3} \rho_I(f,g).$$

Preto podmienka izometrickosti zobrazenia F je $|k| = 3$, teda $k = \pm 3$.

Príklad 11
Uvažujme množinu matíc

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1,\, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

s metrikou ρ definovanou takto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M \, : \, \rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Ďalej pre pevné $\varphi \in \mathbb{R}$ uvažujme zobrazenie $T_\varphi \, : \, (M, \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \rho_2)$ definované:

$$T_\varphi(A) = [a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, \, a_2 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi], \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in M.$$

Dokážte, že T_φ je pre každé $\varphi \in \mathbb{R}$ izometrické zobrazenie.

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Pre ľubovoľné $A, B \in M$ chceme ukázať, že platí:

$$\rho_2(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) = \rho(A, B).$$

Podľa definície T_φ máme (po úprave):

$$\rho_2(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) =$$

$$\rho_2([a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, a_2 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi], \, [b_1 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi, b_2 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi]) =$$

$$\sqrt{((a_1 - b_1)\cos\varphi + (a_2 - b_2)\sin\varphi)^2 + ((a_2 - b_2)\cos\varphi - (a_1 - b_1)\sin\varphi)^2} =$$

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \rho(A, B).$$

Príklad 12
Nech $A = (0, 1) \cap \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ je množina všetkých iracionálnych čísiel. Určte A^o, A', $\bar{A}$, $h(A)$ a adherenciu množiny A (množinu izolovaných bodov množiny A). Je množina A otvorená, resp. uzavretá? Je množina A hustá v metrickom priestore $([0, 1], \rho_1)$?

Riešenie:
Pri tejto úlohe je nutné jednak poznať definície jednotlivých objektov zmienených v zadaní (otvorená, uzavretá množina, vnútro množiny, uzáver množiny, hranica množiny, hromadný, izolovaný bod množiny) a dôsledne s nimi

pracovať, jednak vedieť základné vlastnosti reálnych čísiel, a nakoniec, čo je najdôležitejšie, mať *snahu* o tom aspoň trochu rozmýšľať (bohužiaľ :-/).

Množina A je teda množina všetkých iracionálnych čísiel v intervale $(0, 1)$ a je chápaná ako podmnožina metrického priestoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Potom:

1. A^o – množina všetkých vnútorných bodov množiny A (vnútro množiny A). V našom prípade $A^o = \emptyset$. Totiž v každom okolí ľubovoľného bodu množiny A sa nachádza aspoň jedno *racionálne* číslo, ktoré však nepatrí do A (pozrite si definíciu vnútra množiny a dobre si to premyslite! :)).

2. A' – množina všetkých hromadných bodov množiny A (derivácia množiny A). V našom prípade $A' = [0, 1]$. Totiž v každom okolí ľubovoľného bodu z intervalu $[0, 1]$ sa nachádza aspoň jedno *iracionálne* číslo, ktoré patrí do A. Na druhej strane, pre každý bod mimo $[0, 1]$ vieme nájsť jeho dostatočne malé okolie, ktoré *neobsahuje žiadny* bod z A. (pozrite si definíciu hromadného bodu množiny a dobre si to premyslite! :)).

3. $\bar{A}$ – uzáver množiny A, t.j. $\bar{A} = A \cup A'$. V našom prípade $\bar{A} = [0, 1]$, podľa predchádzajúceho výsledku.

4. $h(A)$ – množina všetkých hraničných bodov množiny A (hranica množiny A). V našom prípade $h(A) = [0, 1]$. Totiž v každom okolí ľubovoľného bodu z intervalu $[0, 1]$ sa nachádza aspoň jedno *iracionálne* číslo, ktoré patrí do A a aspoň jedno *racionálne* číslo, t.j. číslo mimo A. Na druhej strane, pre každý bod mimo $[0, 1]$ vieme nájsť jeho dostatočne malé okolie, ktoré síce obsahuje nejaký bod mimo A, ale *neobsahuje žiadny* bod z A. (možno intuitívne by hranicou mali byť len body 0 a 1; uvedomte si však definíciu hraničného bodu množiny a dobre si to premyslite! :)).

5. adherencia množiny A – množina všetkých izolovaných bodov množiny A. V našom prípade adherencia A je $\emptyset$, nakoľko podľa 2. každý bod z A je hromadným bodom množiny A.

Nakoľko $A \neq A^o$ podľa 1., množina A iste nie je otvorená. Nie je však ani uzavretá, pretože $A \neq \bar{A}$ podľa 3. Nakoniec A je hustá v metrickom priestore $([0, 1], \rho_1)$, pretože $\bar{A} = [0, 1]$ podľa 3.

Príklad 13

Nech $A = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$. Určte A^o, A', $\bar{A}$, $h(A)$ a adherenciu množiny A.

Je množina A otvorená, resp. uzavretá? Určte podpriestor metrického priestoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$, v ktorom je A hustá.

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Dostaneme:

$$A^o = (0,1) \cup (2,3), \quad A' = [0,1] \cup [2,3], \quad \bar{A} = [0,1] \cup [2,3] \cup \{4\},$$

$$h(A) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}, \quad \text{adherencia } A = \{4\}.$$

Množina A nie je ani otvorená, ani uzavretá. Je hustá v podpriestore (M, ρ_1), kde $M = \bar{A} = [0,1] \cup [2,3] \cup \{4\}$.

Príklad 14
Zistite limitu postupnosti

$$x_n = \left(\frac{n-2}{2n^2},\ \sqrt[n]{n},\ 2 \right)$$

v metrickom priestore $(\mathbb{R}^3, \rho_1)$.

Riešenie:
Intuitívne očakávame, že je treba limitovať jednotlivé zložky danej postupnosti, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{2n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Ukážeme, že skutočne bod $x_0 = (0,\ 1,\ 2)$ je limitou postupnosti x_n v súčtovej metrike. Platí totiž:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{n-2}{2n^2} - 0 \right| + \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| + |2-2| \right) = 0.$$

Preto podľa definície limity postupnosti v danej metrike máme $\lim_{n\to\infty} x_n = (0,\ 1,\ 2)$.

Príklad 15
Nájdite limitu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ definovanú $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ v metrikách ρ_I, ρ_c.

Riešenie:
Dokážeme, že:

$$f_n \xrightarrow{\rho_I} f \equiv 0 \quad \text{a} \quad f_n \xrightarrow{\rho_c} \text{neexistuje.}$$

Prvá konvergencia vyplýva z toho, že platí:

$$\rho_I(f_n, f) = \int_0^1 |x^n - 0| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

a následne $\lim_{n\to\infty} \rho_I(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Predpokladajme teraz, že by $f_n \xrightarrow{\rho_c} g$, kde g je nejaká spojitá funkcia na intervale $[0,1]$. Potom by nutne platilo:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_c(f_n, g) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in[0,1]} |x^n - g(x)| \right) = 0.$$

Teda maximálna hodnota výrazu $|x^n - g(x)|$ na intervale $[0,1]$ ide pre $n \to \infty$ do nuly. Tým skôr hodnota výrazu $|x^n - g(x)|$ ide pre $n \to \infty$ do nuly pre každé $x \in [0,1]$ (premyslite si to). Máme teda podmienku na hypotetickú funkciu g:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

To však znamená, že $g(x)$ nemôže byť spojitá zľava v bode 1, a preto $g \notin \mathcal{C}[0,1]$, čo je spor s predpokladom na spojitosť funkcie g. Preto postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu v priestore $\mathcal{C}[0,1]$ v metrike ρ_c.

Príklad 16
Vyšetrite úplnosť metrického priestoru $(\mathbb{Q}, \rho_1)$ ($\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých racionálnych čísiel).

Riešenie:
Priestor $(\mathbb{Q}, \rho_1)$ je neúplný. Aby sme to dokázali, je potrebné nájsť aspoň jednu postupnosť racionálnych čisiel, ktorá je cauchyovská (v metrike ρ_1), avšak nie je konvergentná v $\mathbb{Q}$ (v metrike ρ_1). Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ takto:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0{,}1, \quad a_3 = 0{,}101, \quad a_4 = 0{,}101001, \quad a_5 = 0{,}1010010001,$$

$$a_6 = 0{,}101001000100001, \quad a_7 = 0{,}101001000100001000001, \quad \text{atď.}$$

Dá sa pomerne ľahko odvodiť matematickou indukciou rekurentný vzťah:

$$a_{n+1} = a_n + 10^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zrejme $a_{n+1} > a_n$, a teda táto postupnosť je rastúca. Ukážeme teraz, že je cauchyovská. Nech $n, m \in \mathbb{N}$ sú ľubovoľné také, že $m > n$. Platí:

$$\rho_1(a_m, a_n) = |a_m - a_n| = a_m - a_n = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) +$$

$$+ (a_{m-2} - a_{m-3}) + (a_{m-3} - a_{m-4}) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

(medzi členy a_m a a_n sme vsunuli nulový výraz $-a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - a_{m-3} + a_{m-3} + \cdots - a_{n+1} + a_{n+1}$ a vhodne sme členy uzátvorkovali). Pomocou rekuretného vzťahu potom dostávame:

$$\rho_1(a_m, a_n) = 10^{-\frac{(m-1)((m-1)+1)}{2}} + 10^{-\frac{(m-2)((m-2)+1)}{2}} + 10^{-\frac{(m-3)((m-3)+1)}{2}} + \cdots +$$

$$+ 10^{-\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}} + 10^{-\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Poslednú sumu sa pokúsime odhadnúť zhora nejakým geometrickým súčtom. Pomocou nerovnosti (overte samy)

$$\frac{k(k+1)}{2} \geq k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

a pomocou faktu, že funkcia 10^{-x} je klesajúca, pre každý člen poslednej sumy platí $10^{-\frac{k(k+1)}{2}} \leq 10^{-k}$. Preto:

$$\rho_1(a_m, a_n) = \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-\frac{k(k+1)}{2}} \leq \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-k}.$$

Posledná suma je už súčet geometrickej postupnosti s kvocientom $q = 1/10$. Takže nekonečný geometrický rad $\sum_{k=n}^{\infty} 10^{-k}$ má súčet a môžeme ním zhora odhadnúť vzdialenosť $\rho_1(a_m, a_n)$:

$$\rho_1(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 10^{-k} = 10^{-n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-n} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10^{-n+1}}{9}.$$

Podarilo sa nám teda zhora ohraničiť vzdialenosť $\rho_1(a_m, a_n)$ *nezávisle* na indexe $m > n$. Nakoľko pre $n \to \infty$ číslo $10^{-n+1} \to 0$, odtiaľto vyplýva, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (pre dostatočne veľké n je vzdialenosť $\rho_1(a_m, a_n)$ ľubovoľne malá pre každé $m > n$). Na druhej strane, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je isto konvergetná v *priestore* $(\mathbb{R}, \rho_1)$ (z prvého semestra vieme, že každá rastúca, zhora ohraničená postupnosť reálnych čísiel má konečnú limitu v $\mathbb{R}$). Avšak jej limita, ako môžeme vidieť, nie je racionálne číslo. Jej desatinný rozvoj máme takrečeno pre očami; je nekonečný a neperiodický. Preto priestor $(\mathbb{Q}, \rho_1)$ nie je úplný.

Príklad 17

Vyšetrite úplnosť metrického priestoru $(\mathbb{R}^2, \rho)$, kde metrika ρ je pre $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ definovaná takto:

$$\rho(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, & A, B \text{ ležia na jednej polpriamke} \\ & \text{vedenej z bodu } [0,0], \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{inak.} \end{cases}$$

Riešenie:

Úvahou ukážeme, že priestor $(\mathbb{R}^2, \rho)$ je úplný. Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ je nejaká cauchyovská postupnosť. Teda $\rho(A_m, A_n)$ musí byť malinké pre každé dostatočne veľké indexy m, n. Z charakteru vzdialenosti ρ môžu nastať dve možnosti. Prvá možnosť je tá, že od istého indexu sú všetky členy postupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uložené na *jednej polpriamke* vedenej z bodu $[0,0]$. Avšak polpriamka je úplný metrický priestor, takže $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, ako cauchyovská, má limitu (na danej polpriamke). Druhá možnosť je, že od žiadneho indexu nie sú všetky členy postupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uložené na jednej polpriamke vedenej z bodu $[0,0]$. To znamená, že členy s veľkými indexami sú všeobecne nekolineárne rozhodené v rovine. Aby však bola splnená cauchyovskosť postupnosti, musia sa grupovať okolo bodu $[0,0]$ (dobre si to premyslite so zreteľom na charakter vzdialenosti $\rho(A_m, A_n)$ v tomto prípade; výrazne pomôže nakresliť si obrázok). To znamená, že $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergetná s limitou $[0,0]$. Takže každá postupnosť v $\mathbb{R}^2$, ktorá je cauchyovská vzhľadom na metriku ρ, je i konvergetná v tejto metrike. Teda priestor $(\mathbb{R}^2, \rho)$ je úplný.

Príklad 18

Vyšetrite úplnosť metrického priestoru $(\mathbb{R}, \rho)$, kde metrika ρ je definovaná takto ($\mathbb{I}$ označuje množinu všetkých iracionálnych čísiel):

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & |x-y| \in \mathbb{I}, \\ 1/2, & |x-y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Riešenie:
Metrický priestor $(\mathbb{R}, \rho)$ je úplný. Ak totiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je cauchyovská postupnosť, potom vieme, že existuje dostatočne veľký index N tak, že všetky členy x_n s $n \geq N$ majú vzájomnú vzdialenosť menšiu ako $\varepsilon = 1/4$. Avšak nakoľko vzdialenosti meriame v metrike ρ, podľa jej definície v zadaní každé dve rôzne reálne čísla môžu mať vzájomnú vzdialenosť *minimálne* $1/2$. Preto nutne $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ musí byť od indexu N *konštantná* (premyslite si to :)). To ale znamená, že potom existuje jej limita, rovná tejto konštante. Teda každá cauchyovská postupnosť je konvergetná a $(\mathbb{R}, \rho)$ je úplný priestor.

Príklad 19
Uvažujme metrický priestor (M, ρ), kde

$$M = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\},$$

a metrika ρ je definovaná

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}, \quad x, y \in M.$$

(označenie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ znamená, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ má konečný súčet). Vyšetrite, či v tomto priestore platí tvrdenie:

„kompaktná podmnožina = ohraničená a uzavretá podmnožina“

Riešenie:
Dokážeme, že dané tvrdenie neplatí, t.j. udáme príklad podmnožiny, ktorá je vzhľadom na danú metriku ohraničená i uzavretá, ale nie je kompaktná. Uvažujme postupnosti $x^{[n]} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ také, že člen $x_n^{[n]} = 1$ a všetky jej ostané členy sú 0, t.j.

$$x^{[n]} : \underbrace{0,\, 0,\, 0,\, \cdots,\, 0,}_{(\text{prvých } n-1 \text{ členov})} \ \underbrace{1,}_{(n-\text{tý člen})} \ \underbrace{0,\, 0,\, 0,\, \cdots}_{(\text{zvyšné členy})}.$$

Označme A množinu všetkých takýchto postupností. Iste $A \subseteq M$ (zdôvodnite si). Ďalej platí:

$$\rho(x^{[n]}, x^{[m]}) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ \sqrt{2}, & n \neq m. \end{cases}$$

(overte pomocou definície metriky ρ). Teda vzdialenosť dvoch rôznych prvkov podmnožiny A *je pevne daná.* Z toho vyplýva, že A je ohraničená (nemôže sa rozpínať v M) a zároveň je uzavretá (nemá žiadne hromadné body, resp. každý prvok v A je izolovaný vzhľadom na danú metriku). Na druhej strane z postupnosti $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, t.j. z postupnosti

$$
\begin{aligned}
x^{[1]} &: 1, 0, 0, 0, 0, \cdots, 0, \\
x^{[2]} &: 0, 1, 0, 0, 0, \cdots, 0, \\
x^{[3]} &: 0, 0, 1, 0, 0, \cdots, 0, \\
x^{[4]} &: 0, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

sa nedá vybrať konvergentná podpostupnosť (práve z toho dôvodu, že členy tejto postupnosti si nemôžu byť tak blízko, ako vyžaduje konvergencia). Preto podmnožina A nie je kompaktná.

Príklad 20

Rozhodnite, či zobrazenie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definované

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je spojitým zobrazením medzi metrickými priestormi $(\mathbb{R}, \rho)$ a $(\mathbb{R}, \rho_1)$, kde metrika ρ je definovaná takto:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Riešenie:

Funkcia f nie je spojitá napríklad v bode $x = 0$. Uvažujme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ definovanú predpisom $x_n = 1/n$. Nakoľko $x_n \neq x = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, platí podľa definície metriky ρ:

$$\rho(x_n, x) = |x_n| + |x| = |1/n| + |0| = 1/n,$$

a ďalej $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Teda postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x = 0$. Naproti tomu príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ (podľa definície zobrazenia f) konverguje v metrike ρ_1

k bodu $y = 1 \neq f(x) = f(0) = 0$. Preto f nie je spojité v bode $x = 0$.

Príklad 21

Dokážte, že zobrazenie $F : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, definované

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{C}[a, b],$$

je lipschitzovské zobrazenie medzi metrickými priestormi $(\mathcal{C}[a, b], \rho_c)$ a $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Určte aj jeho Lipschitzovu konštantu.

Riešenie:

Potrebujeme ukázať, že existuje $L \geq 0$ tak, že pre každé $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ platí:

$$|F(f) - F(g)| \leq L \cdot \rho_c(f, g).$$

Nech teda $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Označme $M := \rho_c(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Zrejme pre každé $x \in [a, b]$ platí (premyslite si to):

$$|f(x) - g(x)| \leq M.$$

Ďalej dostávame odhady:

$$|F(f) - F(g)| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M \cdot \int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)\cdot M = (b-a)\cdot \rho_c(f, g).$$

Máme teda:

$$|F(f) - F(g)| \leq (b - a) \cdot \rho_c(f, g).$$

Zobrazenie F je skutočne lipschitzovské, pričom Lipschitzova konštanta je napríklad $L = b - a$. Poznamenajme, že F je potom i spojité zobrazenie na celom $\mathcal{C}[a, b]$.

Príklad 22

Nájdite pevné body zobrazenia $f : [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, kde $f(x) = 1/x$ a $c > 0$, a zistite, pre ktoré hodnoty c sú splnené predpoklady Banachovej vety o pevnom bode.

Riešenie:
Pevné body zobrazenia f určíme riešením rovnice:

$$f(x) = x \iff \frac{1}{x} = x.$$

Korene tejto rovnice sú -1, 1, z nich pevným bodom funkcie f môže byť jedine $x = 1$ (definičný obor funkcie f obsahuje iba kladné reálne čísla). Preto ak $c \in (0, 1]$, zobrazenie f má *práve jeden* pevný bod, ak $c \in (1, \infty)$, zobrazenie f *nemá žiadny* pevný bod.

Overme predpoklady Banachovej vety o pevnom bode, t.j., treba overiť nasledujúce veci:

1. definičný obor funkcie f je úplný metrický priestor
2. funkcia f zobrazuje svoj definičný obor do seba
3. funkcia f je kontrakcia na celom svojom definičnom obore

Prvý predpoklad je splnený, pretože množina $[c, \infty)$ je pre každé $c > 0$ *uzavretá* množina, a nakoľko je podmnožinou *úplného* metrického priestoru $\mathbb{E}^1$, sama je úplný metrický podpriestor. Pozrime sa na druhý predpoklad. Ľahko sa presvedčíme (napr. pomocou vhodného obrázka), že obor hodnôt funkcie f je množina $(0, 1/c)$. Aby funkcia f zobrazovala svoj definičný obor do seba, musí platiť $(0, 1/c) \subseteq [c, \infty)$. To však *neplatí* pre žiadne $c > 0$. Stačí si uvedomiť, že akékoľvek kladné číslo $\varepsilon < \min\{c, 1/c\}$ patrí do $(0, 1/c)$, ale nepatrí do $[c, \infty)$. Preskúmajme tretiu podmienku. Pokúsme sa vhodne ohraničiť výraz $|f(x) - f(y)|$, $x, y \in [c, \infty)$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|.$$

Keďže $x \geq c$, $y \geq c$, platí $1/xy \leq 1/c^2$, preto:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{c^2} \cdot |x - y|.$$

Dá sa ukázať (skúste sa zamyslieť ako, za príkladom je malý návod), že posledná nerovnosť je v istom zmysle "kritická", t.j. pre každé $0 < L < 1/c^2$ existuje taká dvojica $x_0, y_0 \in [c, \infty)$, pre ktorú platí:

$$|f(x_0) - f(y_0)| > L|x_0 - y_0|.$$

Preto funkcia f je kontraktívna na $[c, \infty)$ *práve vtedy, keď* číslo $1/c^2 \in [0, 1)$. Inak povedané $c^2 > 1$, teda $c > 1$. Preto ak $c \in (1, \infty)$, zobrazenie f *je kontrakcia* na svojom definičnom obore. Naopak, ak $c \in (0, 1]$, funkcia f *nie je kontrakcia* na svojom definičnom obore.

Vidíme teda, že pre *žiadne* $c > 0$ nie sú všetky tri predpoklady Banachovej vety splnené súčasne; prvý predpoklad platí vždy, druhý predpoklad nie je splnený nikdy a tretí platí iba pre $c \in (1, \infty)$. Napriek tomu funkcia f má pre $c \in (0, 1]$ *práve jeden pevný bod* $x = 1$, hoci v tomto prípade neplatí dokonca ani posledný predpoklad :). To ukazuje, že podmienky Banachovej vety sú *postačujúce, nie však nutné* pre existenciu pevného bodu zobrazenia f.

Malý návod k dôkazu kritickosti nerovnosti

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{c^2} \cdot |x - y|, \quad \forall\, x, y \in [c, \infty).$$

- predpokladajte, že existuje ešte lepšia kladná konštanta L – to znamená, že existuje $L < 1/c^2$ tak, že pre každú dvojicu $x, y \in [c, \infty)$ platí:

  $$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

- uvažujte kladné číslo δ s vlastnosťou

  $$\delta < \frac{(1/L) - c^2}{c},$$

  (také zrejme existuje!) a ukážte, že pre dvojicu $x_0 = c$, $y_0 = c + \delta$ platí:

  $$|f(x_0) - f(y_0)| > L \cdot |x_0 - y_0|.$$

- uvážte, že posledná nerovnosť je v rozpore s definícou čísla L.

Príklad 23

Uvažujme funkciu $f : [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, kde $f(x) = \ln x$ a $c > 0$. Zistite, pre ktoré hodnoty c je f lipschitzovská, resp. kontraktívna na celom svojom definičnom obore.

Riešenie:

Ukážeme, že pre každé $c > 0$ je zobrazenie f lipschitzovské. Využijeme pri tom Langrangeovu vetu o strednej hodnote a fakt, že derivácia funkcie f je na intervale $[c, \infty)$ ohraničená, nakoľko platí:

$$|f'(x)| = |(\ln x)'| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c}, \quad \forall\, x \in [c, \infty).$$

(v krajnom bode $x = c$ uvažujeme deriváciu sprava $f'_+(c)$). Nech $x_1, x_2 \in [c, \infty)$, $x_1 < x_2$. Potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje bod $x_1 < \eta < x_2$ tak, že $f(x_1) - f(x_2) = f'(\eta)(x_1 - x_2)$. Využijúc predchádzajúci odhad derivácie dostaneme:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\eta)| \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{c} \cdot |x_1 - x_2|.$$

Teda f je skutočne lipschitzovská s hodnotou Lipschitzovej konštanty $L = 1/c$. Naviac ukážeme, že táto hodnota L je optimálna, resp. kritická (pozri predchádzajúci príklad). Inými slovami, ukážeme, že $L = 1/c$ je najmenšia možná hodnota Lipschitzovej konštanty. Budeme to dokazovať sporom. Nech teda existuje kladné $L_* < 1/c$ s vlastnosťou:

$$\forall\, x_1, x_2 \in [c, \infty) \; : \; |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_* \cdot |x_1 - x_2|.$$

Vieme, že $f'_+(c) = 1/c$, t.j. podľa definície derivácie funkcie platí:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{c}, \quad \text{a aj} \quad \lim_{x \to c^+} \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| = \left|\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c},$$

pretože absolútna hodnota je spojitá funkcia svojho argumentu a $c > 0$. Nech $x > c$ a položme $x_1 = c$ a $x_2 = x$. Potom podľa vlastnosti čísla L_* musí platiť:

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| = \frac{|f(x) - f(c)|}{|x - c|} \leq L_* < \frac{1}{c}.$$

Limitovaním poslednej nerovnosti $x \to c^+$ a využitím predchádzajúcej limity dostaneme:

$$\frac{1}{c} = \lim_{x \to c^+} \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| \leq \lim_{x \to c^+} L_* = L_* < \frac{1}{c}.$$

Dospeli sme k sporu, nakoľko nerovnosti $1/c \leq L_* < 1/c$ neplatia. Preto $L = 1/c$ je najmenšia hodnota Lipschitzovej konštanty pre funkciu f na intervale $[c, \infty)$. Táto skutočnosť nám teraz poslúži pri zisťovaní kontraktívnosti funkcie f. Platí, že f je kontraktívna na $[c, \infty)$ práve vtedy, keď $1/c < 1$, teda $c > 1$ (samy si to premyslite :)).

Poznámka: Ako sme videli na tomto príklade, derivácia funkcie hrá významnú úlohu pri zisťovaní lipschitzovskosti funkcie. Platí takéto tvrdenie (pozri skripta manželov Došlých alebo Hasilovu–Zemánkovu zbierku): Diferencovateľná funkcia $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{E}$, kde $\mathcal{I}$ je netriviálny interval, je *lipschitzovská* na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď $f'(x)$ je *ohraničená* na $\mathcal{I}$, t.j.:

$$\sup_{x\in\mathcal{I}} |f'(x)| < \infty.$$

Naviac, f je *kontraktívna* na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď:

$$\sup_{x\in\mathcal{I}} |f'(x)| < 1.$$

Príklad 24

Rozhodnite, pre ktoré $c > 0$ je funkcia $f(x) = \sqrt{x}$ lipschitzovská na intervale $[0, c]$. V kladnom prípade určte aj Lipschiztovu konštantu.

Riešenie:

Ukážeme, že f nie je lipschitzovská na $[0, c]$ pre *žiadne* $c > 0$. Podľa poznámky k predchádzajúcemu príkladu funkcia f je lipschitzovská na $[0, c]$ práve vtedy, keď jej derivácia f' je ohraničená na $[0, c]$. Avšak funkcia $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ má v bode $x = 0$ singularitu:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty.$$

Preto f' je neohraničená na $[0, c]$ pre každé $c > 0$, a teda f nemôže byť lipschitzovská na $[0, c]$.

Príklad 25

Určte interval typu $[-a, a]$, $a > 0$, na ktorom sú pre funkciu $f(x) = \frac{x^2-1}{3}$ splnené predpoklady Banachovej vety o pevnom bode a metódou postupných aproximácií nájdite tento pevný bod.

Riešenie:

Podmienka úplnosti je splnená, nakoľko každý uzavretý interval $[-a, a]$ je úplný metrický priestor vzhľadom na metriku ρ_1. Ďalej chceme, aby f zobrazovala interval $[-a, a]$ do seba. Pomocou vhodného obrázku ľahko zistíme, že obraz intervalu $[-a,a]$ v zobrazení f je interval $\left[-\frac{1}{3}, \frac{a^2-1}{3}\right]$. Požadujeme teda:

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{a^2-1}{3}\right] \subseteq [-a,a].$$

Rozmenené na drobné to znamená:

$$\left(-a \le -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad \frac{a^2-1}{3} \le a\right) \iff (a \ge 1/3 \quad \wedge \quad a^2 - 3a - 1 \le 0).$$

Rozriešením poslednej dvojice nerovností dostaneme:

$$a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right].$$

Nakoniec zabezpečíme kontraktívnosť funkcie f. Podľa poznámky za príkladom 23 je f kontraktívna všade tam, kde $|f'(x)| < 1$, t.j.:

$$|f'(x)| = \left|\left(\frac{x^2-1}{3}\right)'\right| = \left|\frac{2x}{3}\right| = \frac{2}{3}|x| < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{3}{2}.$$

Preto je nutné, aby $a < 3/2$. Kombináciou s predchádzajúcim výsledkom o čísle a dostaneme ohraničenie (platí $3/2 < (3+\sqrt{13})/2$):

$$a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

Pre každé a z tohto intervalu sú na intervale $[-a,a]$ splnené predpoklady Banachovej vety o pevnom bode. Preto existuje práve jeden pevný bod funkcie f, ktorý leží v každom z týchto intervalov. Ilustrujeme teraz metódu postupných aproximácií na jeho nájdenie. Zvoľme $x_1 = 0$ (iste $0 \in [-a,a]$ pre každé kladné a). Potom:

$$x_2 = f(x_1) = \frac{x_1^2-1}{3} = -\frac{1}{3} \approx -0.333333333,$$

$$x_3 = f(x_2) = \frac{x_2^2-1}{3} = -\frac{8}{27} \approx -0.2962962963,$$

$$x_4 = f(x_3) = \frac{x_3^2-1}{3} = -\frac{665}{2\,187} \approx -0.3040695016,$$

$$x_5 = f(x_4) = \frac{x_4^2 - 1}{3} = -\frac{4\,340\,744}{14\,348\,907} \approx -0.3025139127,$$

$$x_6 = f(x_5) = \frac{x_5^2 - 1}{3} = -\frac{187\,049\,073\,621\,113}{617\,673\,396\,283\,947} \approx -0.3028284442,$$

$$\vdots$$

Presnú hodnotu hľadaného pevného bodu samozrejme zistíme riešením kvadratickej rovnice $f(x) = \frac{x^2-1}{3} = x$. Jeden z jej koreňov je $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0.3027756377$. Vidíme, že už pri šiestej aproximácii x_6 je chyba rádovo jedna desaťtisícina, čo je z praktického hľadiska zanedbateľné.

Funkcia $f(x)$ má však i ďalší pevný bod, a to $x_* = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.3027756377$. Existencia tohto pevného bodu však nevyplýva z Banachovej vety, nakoľko na okolí x_* nie je f kontraktívna, nakoľko $x_* > 3/2$.

Príklad 26

Pomocou Banachovej vety o pevnom bode nájdite riešenie rovnice:

$$\mathrm{e}^x - 2x - 1 = 0.$$

Riešenie:

Rovnicu si prepíšeme na tvar:

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{2} = x.$$

Tým sme previedli úlohu nájsť koreň rovnice na úlohe nájsť pevný bod funkcie $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{2}$. Poďme teraz skúmať, pre aké $x \in \mathbb{R}$ sú splnené podmienky Banachovej vety o pevnom bode (definičný obor funkcie f je zrejme celé $\mathbb{R}$). Ukážeme, že pre vhodné $a > 0$ sú na uzavretom intervale $[-a, a]$ splnené všetky.

- úplný metrický priestor – $[-a, a]$ je uzavretá podmnožina úplného metrického priestoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$, preto i $([-a, a], \rho_1)$ je úplný metrický podpriestor pre každé $a > 0$.

- f zobrazuje $[-a, a]$ do seba – keďže f je rastúca funkcia, platí:

$$f\left([-a, a]\right) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-a} - 1}{2}, \frac{\mathrm{e}^a - 1}{2}\right].$$

Chceme, aby platilo

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{-a}-1}{2}, \frac{\mathrm{e}^{a}-1}{2}\right] \subseteq [-a, a],$$

teda:

$$-a \leq \frac{\mathrm{e}^{-a}-1}{2}, \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{e}^{a}-1}{2} \leq a,$$

čo je nakoniec ekvivaletné s nerovnosťami:

$$\frac{\mathrm{e}^{-a}-1}{-a} \leq 2, \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{e}^{a}-1}{a} \leq 2.$$

Spomeňme si na známu limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1.$$

Ak ju rozmeníme na drobné, tak dostaneme, že ak sme s x dostatočne *blízko k* 0 (i sprava, i zľava), potom hodnota výrazu $\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$ je isto menšia ako 2 (lebo tento výraz konverguje k hodnote $1 < 2$). Preto pre dostatočne malé $a > 0$ bude splnená požiadavka, aby f zobrazovalo $[-a, a]$ do seba.

- f je kontrakcia – využijeme poznámku za príkladom 23; f bude kontrakcia práve tam, kde $|f'(x)| < 1$, t.j.

$$|f'(x)| = \left|\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{2}\right)'\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}\right| = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2} < 1 \Longrightarrow x < \ln 2.$$

Preto stačí vziať $a < \ln 2$.

Zistili sme teda, že pre *každé dostatočne malé* $a > 0$ budú na $[-a, a]$ splnené všetky predpoklady Banachovej vety o pevnom bode, a teda f bude mať v $[-a, a]$ *práve jeden* pevný bod. Vo zvýraznených slovách poslednej vety je zároveň skrytá i hodnota tohto pevného bodu :). Hľadaný jediný pevný bod musí totiž ležať v každom z intervalov $[-a, a]$. Nie je ťažké sa dovtípiť, že sa jedná o bod $x = 0$. Skutočne, platí $f(0) = 0$. Zároveň $x = 0$ je teda riešenie rovnice v zadaní úlohy.

Na druhej strane, funkcia f má aj *ďalší* pevný bod, a to $x_* \approx 1.256431209$. Je niekde chyba? :) Vôbec nie, len sa tu ukazuje, (podobne ako v príklade vyššie), že podmienky Banachovej vety sú *postačujúce* na existenciu pevného bodu zobrazenia, nie však *nutné* (napr. f nie je kontraktívna na okolí bodu x_*, nakoľko $x_* > \ln 2 \approx 0.693147180$).

Neriešený dodatok k príkladu 26:
Prepíšme si rovnicu $\mathrm{e}^x - 2x - 1 = 0$ iným spôsobom, než sme to urobili v príklade 26; konkrétne:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 2x - 1 &= 0, \\ \mathrm{e}^x &= 2x + 1, \\ x &= \ln(2x + 1). \end{aligned}$$

Tým sme previedli úlohu nájsť koreň rovnice na úlohu nájsť pevný bod funkcie $g(x) = \ln(2x+1)$. Dokážte, že pre funkciu g sú na intervale $[1, 2]$ splnené všetky predpoklady Banachovej vety o pevnom bode (analogicky, ako sme to robili v príklade 26). Z toho potom usúďte, že v $[1, 2]$ má g práve jeden pevný bod, t.j. v $[1, 2]$ existuje práve jeden koreň rovnice $\mathrm{e}^x - 2x - 1 = 0$ (je to práve „záhadný“ koreň x_* uvedený vyššie :)).

Príklad 27
Pomocou Banachovej vety o pevnom bode a metódou postupných aproximácií nájdite riešenie začiatočnej úlohy:

$$y' = \frac{1}{2}\, y, \quad y(0) = 1.$$

Riešenie:
Aby sme mohli aplikovať princíp pevného bodu, rovnicu prepíšeme do tzv. *integrálneho tvaru* – integrujeme obe strany rovnice a využijeme začiatočnú podmienku:

$$\begin{aligned} \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{2}\, y(t)\,\mathrm{d}t, \\ y(x) - y(0) &= \int_0^x \frac{1}{2}\, y(t)\,\mathrm{d}t, \\ y(x) - 1 &= \int_0^x \frac{1}{2}\, y(t)\,\mathrm{d}t, \\ y(x) &= 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, y(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posledná integrálna rovnica je ekvivalentná so začiatočnou úlohou v zadaní. Poďme teraz prebrať podmienky Banachovej vety. Potrebujeme mať nejaký úplný metrický priestor a na ňom nejaké kontraktívne zobrazenie. Keďže riešenie našej začiatočnej úlohy je spojitá funkcia definovaná na istom okolí bodu $x = 0$, ako kandidát na metrický priestor sa nám prirodzene ponúka priestor $(\mathcal{C}[-\delta, \delta], \rho_c)$, kde $\delta > 0$, t.j. priestor spojitých funkcií na uzavretom intervale $[-\delta, \delta]$ s metrikou ρ_c. Vieme, že $(\mathcal{C}[-\delta, \delta], \rho_c)$ je úplný priestor pre každé $\delta > 0$. Vhodné zobrazenie F nám vyplynie priamo z vyššie uvedenej integrálneho rovnice:

$$\forall\, f \in \mathcal{C}[-\delta, \delta] \,:\, F(f)(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Zobrazenie F funguje tak, že každej funkcii f, ktorá je spojitá na $[-\delta, \delta]$, priradí novú funkciu $F(f)$, ktorej hodnota v bode x je $1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, f(t)\, \mathrm{d}t$ (všimnime si, že funkcia y je riešením začiatočnej úlohy v zadaní práve vtedy, keď $F(y) = y$, teda keď y je pevný bod zobrazenia F; odtiaľto pramení motivácia uvažovať F v takomto tvare). Zrejme $F(f)$ je opäť spojitá funkcia na $[-\delta, \delta]$ (integrál ako funkcia hornej medze je spojitou funkciou). Teda zobrazenie F definované vyššie zobrazuje priestor $(\mathcal{C}[-\delta, \delta], \rho_c)$ do seba. Nakoniec je treba overiť, či F je kontrakcia. Nech $f, g \in \mathcal{C}[-\delta, \delta]$. Pokúsime sa zhora odhadnúť vzdialenosť $\rho_c(F(f), F(g))$ pomocou vzdialenosti $\rho_c(f, g)$:

$$\rho_c(F(f), F(g)) = \max_{x \in [-\delta, \delta]} |F(f)(x) - F(g)(x)| =$$

$$= \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left| \left(1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, f(t)\, \mathrm{d}t\right) - \left(1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, g(t)\, \mathrm{d}t\right) \right| =$$

$$= \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left| \int_0^x \frac{1}{2}\, f(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{2}\, g(t)\, \mathrm{d}t \right| = \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left| \int_0^x \frac{1}{2}\, (f(t) - g(t))\, \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \max_{x \in [-\delta, \delta]} \int_0^x \frac{1}{2}\, |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Ďalej integrál $\int_0^x$ je ako funkcia premennej x neklesajúci, a tak svoju maximálnu hodnotu bude nadobúdať pre $x = \delta$, teda:

$$\rho_c(F(f), F(g)) \le \max_{x \in [-\delta, \delta]} \int_0^x \frac{1}{2}\, |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\delta \frac{1}{2}\, |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Posledný integrál odhadneme zhora pomocou nerovnosti:

$$\forall\, t \in [0,\delta] \; : \; |f(t) - g(t)| \leq \max_{t\in[-\delta,\delta]} |f(t) - g(t)| = \rho_c(f,g).$$

Preto platí:

$$\int_0^\delta \frac{1}{2}\,|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\delta \frac{1}{2}\,\rho_c(f,g)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\rho_c(f,g)\int_0^\delta \mathrm{d}t = \frac{\delta}{2}\,\rho_c(f,g).$$

Dostali sme teda odhad:

$$\rho_c(F(f),F(g)) \leq \frac{\delta}{2}\,\rho_c(f,g).$$

Voľbou $0 < \delta < 2$ bude zobrazenie F kontraktívne. Ukázali sme, že v prípade metrického priestoru $(\mathcal{C}[-\delta,\delta],\rho_c)$ s $0 < \delta < 2$ a zobrazenia F definovaného vyššie sú splnené podmienky Banachovej vety o pevnom bode. Preto F má práve jeden pevný bod y, t.j. $F(y) = y$. Inými slovami, existuje práve jedna funkcia y, ktorá je spojitá na uzavretom intervale $[-\delta,\delta]$ a pre ktorú platí:

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\,y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ak túto rovnosť derivujeme podľa x, dostaneme:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\,y(x).$$

Teda y je spojito diferencovateľná na $[-\delta,\delta]$ a je riešením rovnice v zadaní úlohy. Nakoniec $y(0) = 1$. Ukázali sme teda existenciu a jednoznačnosť riešenia y našej začiatočnej úlohy. Stále však konkrétne nepoznáme toto riešenie. Na jeho konštrukciu využijeme metódu postupných aproximácií. Z Banachovej vety vieme, že $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, kde postupnosť $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}[-\delta,\delta]$ je definovaná rekurentne – y_0 je ľubovoľná spojitá funkcia na $[-\delta,\delta]$ a $y_{n+1} = F(y_n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$. Položme $y_0 \equiv 1$. Potom platí:

$$y_1(x) = F(y_0)(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\,y_0(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x}{2},$$

$$y_2(x) = F(y_1)(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\,y_1(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{(x/2)^2}{2},$$

$$y_3(x) = F(y_2)(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\, y_2(t)\, \mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{(t/2)^2}{2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{(x/2)^2}{2} + \frac{(x/2)^3}{6},$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = 1 + \frac{(x/2)}{1!} + \frac{(x/2)^2}{2!} + \frac{(x/2)^3}{3!} + \frac{(x/2)^4}{4!} + \cdots + \frac{(x/2)^n}{n!}.$$

Vidíme, že n-tá aproximácia y_n je n-tý Maclaurinov polynóm funkcie $\mathrm{e}^{x/2}$. Dá sa ukázať, že $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \mathrm{e}^{x/2}$ (teda presne to, čo už vieme z riešenia diferenciálnych rovníc; rovnica v zadaní je totiž LDR I. rádu bez pravej strany, pričom separáciou premenných, následnou integráciou a aplikovaním začiatočnej podmienky dostaneme práve riešenie $y = \mathrm{e}^{x/2}$).