Problém – integračný faktor Bernoulliho rovnice

Metóda integračného faktora je univerzálna a hlboká metóda riešenia diferenciálnych rovníc prvého rádu, v ktorých je vyjadrená derivácia y', t.j. rovníc tvaru

$$y' = f(x, y).$$

(pozri napr. skripta M. Rába, str. 36–38; sú tam uvedené príklady integračných faktorov niekoľkých typov rovníc spolu s významnou Kamkeho vetou, ktorá zaručuje existenciu integračného faktora). Napríklad pre LDR I. rádu

$$y' + f(x)y = g(x)$$

sme zistili, že za jej integračný faktor je možné vziať funkciu

$$R(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

V tomto prípade to funguje tak, že celá rovnica sa vynásobí funkciou $R(x)$

$$y' \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)y \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x},$$

pričom ľava strana poslednej rovnice je *úplná derivácia* podľa premennej x

$$y' \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)y \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = \left(y \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\right)'.$$

Toto pozorovanie nám umožnilo danú rovnicu vyriešiť. Niečo podobné platí i v prípade Bernoulliho rovnice

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Jej integračným faktorom budeme rozumieť nenulovú funkciu $R(x, y)$ s nasledovnou vlastnosťou. Vynásobíme Bernoulliho rovnicu funkciou $R(x, y)$

$$y' \cdot R(x, y) + f(x)y \cdot R(x, y) = g(x)y^{\alpha} \cdot R(x, y)$$

a požadujeme:

P1 pravá strana $g(x)y^{\alpha} \cdot R(x, y)$ je funkciou iba premennej x,

P2 ľavá strana $y' \cdot R(x, y) + f(x)y \cdot R(x, y)$ sa dá napísať ako úplná derivácia podľa premennej x výrazu $A(x)B(y)$ pre nejaké diferencovateľné funkcie $A(x)$ a $B(y)$, t.j. platí

$$y' \cdot R(x, y) + f(x)y \cdot R(x, y) = (A(x)B(y))'. \tag{1}$$

Podmienka P2 sa myslí v tomto zmysle. Ak do rovnosti (1) dosadíme *akúkoľvek prípustnú* funkciu $y = y(x)$ premennej x, musíme dostať identickú rovnosť. Pod pojmom prípustná sa myslí, že hodnoty $y = y(x)$ patria do definičného oboru funkcie $R(x, y)$ a existuje vlastná derivácia $y'(x)$ podľa premennej x. Napríklad

$$y' \cdot x^2 + y \cdot 2x = (y \cdot x^2)'.$$

Do tejto rovnice môžeme dosadiť akúkoľvek diferencovateľnú funkciu $y = y(x)$ a dostaneme identickú rovnosť; ďalej platí $A(x) = x^2$ a $B(y) = y$.

V nasledujúcom sa zameriame na preskúmanie množiny všetkých integračných faktorov $R(x, y)$ Bernoulliho rovnice.

Problém 1

Ukážte, že funkcia $R(x, y)$ tvaru:

$$R(x, y) = \frac{1}{y^\alpha} \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

je integračný faktor Bernoulliho rovnice.

Návod:
Overte, že funkcia $R(x, y)$ daného tvaru spĺňa vyššie uvedené podmienky P1 a P2 integračného faktora Bernoulliho rovnice. Určte i funkcie $A(x)$ a $B(y)$ v podmienke P2.

Problém 2

Dokážte, že *každý* integračný faktor $R(x, y)$ (v zmysle vyššie uvedenej definície) má tvar:

$$R(x, y) = C \cdot \frac{1}{y^\alpha} \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x},$$

kde C je ľubovoľná nenulová reálna konštanta. Ďalej ukážte, že potom pre funkcie $A(x)$ a $B(y)$ platí:

$$A(x) = K \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad B(y) = L \cdot y^{1-\alpha},$$

kde K, L sú konštanty spĺňajúce pre dané C:

$$KL = \frac{C}{1-\alpha}.$$

Návod:

1. Ukážte, že z podmienky P1 vyplýva $R(x,y) = y^{-\alpha} \cdot h(x)$, kde $h(x)$ je nenulová funkcia iba premennej x.

2. Pomocou podmienky P2 ukážte, že funkcia $h(x)$ spĺňa rovnosť:
$$(y^{1-\alpha})' \cdot \frac{h(x)}{1-\alpha} + y^{1-\alpha} \cdot f(x)h(x) = (A(x)B(y))' . \tag{2}$$

3. Nech y_0 je ľubovoľné reálne číslo také, že mocnina $y_0^{1-\alpha}$ je definovaná. Voľbou konštantnej funkcie $y = y_0$ v rovnosti (2) ukážte, že pre každé prípustné x platí:
$$y_0^{1-\alpha} \cdot f(x)h(x) = B(y_0) \cdot A'(x).$$
Z tohto usúďte, že pre funkcie $B(y)$ a $A'(x)$ musí platiť
$$B(y) = L \cdot y^{1-\alpha}, \quad A'(x) = \frac{1}{L} \cdot f(x)h(x), \tag{3}$$
kde L je nenulová konštanta.

4. Dosadením výrazov v (3) do rovnosti (2), následným rozderivovaním a úpravou odvoďte, že platí rovnosť
$$(y^{1-\alpha})' \left[A(x) \cdot L - \frac{h(x)}{1-\alpha} \right] = 0$$
pre každú prípustnú funkciu $y = y(x)$. Z toho potom voľbou funkcie $y = x^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ukážte rovnosť:
$$A(x) \cdot L = \frac{h(x)}{1-\alpha}. \tag{4}$$

5. Kombináciou druhej rovnice v (3) a rovnice v (4) odvoďte, že platí:
$$h'(x) = (1-\alpha) \cdot f(x)h(x). \tag{5}$$
Vyriešte túto diferenciálnu rovnicu a ukážte, že $h(x) = C \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}$, kde C je nenulová reálna konštanta.

6. Ukážte tvar integračného faktora $R(x,y)$ v zadaní problému a pomocou vyjadrenia v (4), tvaru funkcie $h(x)$ získaného v kroku 5. a voľbou $K := \frac{C}{L(1-\alpha)}$ overte i tvar funkcie $A(x)$.