V tomto prípade je kľúčová trojuholníková nerovnosť

$$\Big||z| - |z^*|\Big| \le |z - z^*| \quad \text{pre každé } z, z^* \in \mathbb{C}.$$

Táto nerovnosť sa najjednoduchšie dokáže geometricky pomocou „skutočnej“ trojuholníkovej nerovnosti aplikovanej na rovinný trojuholník s vrcholmi v bodoch 0, z a z^*. Nech $\{z_n\}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$ s limitou $z_0 \in \mathbb{C}$. To je ekvivalentné s tým, že $|z_n - z_0| \to 0$ pre $n \to \infty$. Pre funkciu $F(z) = |z|$ potom s využitím uvedenej trojuholníkovej nerovnosti platí

$$0 \le |F(z_n) - F(z_0)| = \Big||z_n| - |z_0|\Big| \le |z_n - z_0| \to 0 \quad \text{pre } n \to \infty.$$

Ekvivalentne, $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0)$, a teda funkcia $F(z)$ je spojitá v bode z_0 :).

Alternatívny, ale prakticky podobný prístup je založený na vyjadrení

$$z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, \quad z_0 = a_0 + \mathrm{i}b_0, \quad a_n, b_n, a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ak uvažujeme vektory $\bar{v}_n := (a_n, b_n)^T$ a $\bar{v}_0 := (a_0, b_0)^T$ a euklidovskú normu $\|v_n\| := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ a $\|v_0\| := \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, potom zase na základe trojuholníkovej nerovnosti

$$0 \le \Big|\|v_n\| - \|v_0\|\Big| \le \|v_n - v_0\|$$

(vyplývajúcej opäť z geometrických argumentov) máme

$$0 \le \left|\sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \sqrt{a_0^2 + b_0^2}\right| \le \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2}.$$

Z nej následne vyplýva, že ak $a_n \to a_0$ a $b_n \to b_0$ pre $n \to \infty$, potom

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \to \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \quad :).$$

Najelementárnejší mi príde takýto postup:

$$0 \le \left|\sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \sqrt{a_0^2 + b_0^2}\right| = \left|\left(\sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \sqrt{a_0^2 + b_0^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}\right|$$

$$= \frac{\left|(a_n^2 + b_n^2) - (a_0^2 + b_0^2)\right|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}} = \frac{\left|(a_n^2 - a_0^2) + (b_n^2 - b_0^2)\right|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|(a_n - a_0)(a_n + a_0) + (b_n - b_0)(b_n + b_0)|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \\
&\leq \frac{|a_n - a_0| \cdot |a_n + a_0| + |b_n - b_0| \cdot |b_n + b_0|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \\
&\leq |a_n - a_0| \cdot \underbrace{\frac{|a_n| + |a_0|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}}_{\leq 1} + |b_n - b_0| \cdot \underbrace{\frac{|b_n| + |b_0|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}}}_{\leq 1} \\
&\leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0|.
\end{aligned}
$$

Platí teda nerovnosť

$$
0 \leq \left| \sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \right| \leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| \quad :).
$$