Príklady na precvičovanie – systémy lineárnych DR prvého rádu

Pod pojmom *(homogénny) systém n lineárnych DR prvého rádu* rozumieme n lineárnych DR rovníc prvého rádu tvaru

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(t)\cdot y_1 + a_{12}(t)\cdot y_2 + a_{13}(t)\cdot y_3 + \cdots + a_{1n}(t)\cdot y_n,\\
y_2' &= a_{21}(t)\cdot y_1 + a_{22}(t)\cdot y_2 + a_{23}(t)\cdot y_3 + \cdots + a_{2n}(t)\cdot y_n,\\
y_3' &= a_{31}(t)\cdot y_1 + a_{32}(t)\cdot y_2 + a_{33}(t)\cdot y_3 + \cdots + a_{3n}(t)\cdot y_n,\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(t)\cdot y_1 + a_{n2}(t)\cdot y_2 + a_{n3}(t)\cdot y_3 + \cdots + a_{nn}(t)\cdot y_n,
\end{aligned}
$$

kde $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, sú dané spojité funkcie nezávislej premennej t a $y_1, \ldots, y_n$ sú neznáme funkcie premennej t (nezávislú premennú budeme teraz značiť písmenom t namiesto doterajšieho x). Našou úlohou je nájsť všetky n-tice funkcií $y_1, \ldots, y_n$, ktoré riešia danú sústavu rovníc.

Uvedená sústava lineárnych DR úzko súvisí s homogénnou lineárnou DR n-tého rádu. Platí totiž, že každá lineárna DR n-tého rádu sa dá prepísať na systém n lineárnych DR prvého rádu. V prípade, ak funkcie $a_{ij}(t)$ sú konštanty, t.j. ak máme *systém n lineárnych DR s konštantnými koeficientami*, uvedené pozorovanie platí aj naopak – daný systém sa dá previesť na lineárnu DR rovnicu n-tého rádu s konštantnými koeficientami. To je základom tzv. *eliminačnej metódy* riešenia uvedeného systému. Systém sa prevedie na LDR n-tého rádu, nájde sa jej všeobecné riešenie, a z neho sa potom spätne skonštruujú riešenia $y_1, \ldots, y_n$ systému.

V tomto dokumente sa budeme zaoberať iba systémami s konštantnými koeficientami, a to iba prípadom $n = 2$. Neznáme funkcie budeme pre jednoduchosť označovať $x = x(t)$ a $y = y(t)$. Skúmame teda systém tvaru

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + by,\\
y' &= cx + dy,
\end{aligned}
$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Na jeho riešenie sa efektívne využívajú dve metódy – eliminačná metóda, spočívajúca v prevode systému na LDR rovnicu druhého rádu (ilustrujeme na nasledujúcom príklade), a metóda vlastných čísiel a vlastných vektorov.

Príklad 1

Nájdite všeobecné riešenie systému

$$x' = 7x + 6y,$$

$$y' = 2x + 6y.$$

Riešenie:

Eliminačná metóda spočíva v tom, že z tejto sústavy eliminujeme jednu neznámu funkciu, napríklad funkciu y. To vykonáme tak, že derivujeme prvú rovnicu podľa premennej t:

$$x'' = 7x' + 6y'.$$

Následne dosadíme za x' a y' ich vyjadrenia pomocou systému v zadaní. Dostaneme:

$$x'' = 7x' + 6y' = 7 \cdot (7x + 6y) + 6 \cdot (2x + 6y) = 61x + 78y.$$

Pomocou rovníc

$$x'' = 61x + 78y, \quad x' = 7x + 6y$$

eliminujeme funkciu y. Napríklad z druhej rovnice máme $y = \frac{1}{6}(x' - 7x)$. Dosadením do prvej dostaneme:

$$x'' = 61x + 78 \cdot \frac{1}{6}(x' - 7x) = 61x + 13(x' - 7x) \quad \Longrightarrow x'' - 13x' + 30x = 0.$$

Dostali sme homogénnu LDR rovnicu druhého rádu s konštanými koeficientami pre neznámu funkciu x. Štandardnou metódou nájdeme jej všeobecné riešenie:

$$x = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{10t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Z neho dopočítame neznámu funkciu y (detailné výpočty vynechávame):

$$y = \frac{1}{6}(x' - 7x) = -\frac{2}{3} C_1 \mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2} C_2 \mathrm{e}^{10t}.$$

Všeobecné riešenie systému v zadaní má teda tvar:

$$x = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{10t}, \quad y = -\frac{2}{3} C_1 \mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2} C_2 \mathrm{e}^{10t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pripomeňme, že pod pojmom všeobecné riešenie systému budeme rozumieť riešenie, z ktorého vieme vhodnou voľbou konštánt zostrojiť akékoľvek iné riešenie daného systému.

Druhá metóda riešenia systému LDR rovníc s konštantnými koeficientami je založená na prepise daného systému na vektorový tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Riešenie $x(t)$, $y(t)$ pôvodného systému teda vytvára vektorové riešenie $\binom{x(t)}{y(t)}$ tohto vektorového systému. Naopak, pre každú dvojrozmernú vektorovú funkciu $\bar{\eta}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ (dvojrozmerný vektor, ktorého zložky sú funkcie premennej t), spĺňajúcu

$$\bar{\eta}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \bar{\eta}$$

platí, že dvojica funkcií $x(t)$, $y(t)$ je riešením pôvodného systému. Stačí nám teda nájsť všeobecné riešenie daného vektorového systému. Podobne ako pri LDR n-tého rádu toto všeobecné riešenie má tvar

$$C_1\,\bar{\eta}_1 + C_2\,\bar{\eta}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kde $\bar{\eta}_1$ a $\bar{\eta}_2$ sú ľubovoľné dve lineárne nezávislé riešenia vektorového systému. No a pri určovaní riešení $\bar{\eta}_1$ a $\bar{\eta}_2$ sa využívajú práve vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Metóda je založená na tomto pozorovaní. Ak λ je vlastné číslo matice A a $\bar{v}$ je príslušný nenulový vlastný vektor, t.j. $A\,\bar{v} = \lambda\,\bar{v}$, potom vektorová funkcia

$$\bar{\eta}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{v}$$

je lineárne nezávislé riešenie nášho vektorového systému (overenie nie je ťažké, presvedčte sa o tom dosadením funkcie $\mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{v}$ do vektorového systému). Ďalej platí, že pre rôzne vlastné čísla λ_1 a λ_2 matice A sú príslušné vektorové riešenia $\bar{\eta}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot \bar{v}_1$ a $\bar{\eta}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot \bar{v}_2$ lineárne nezávislé. Podobne, ak $\bar{v}$ a $\bar{w}$ sú dva lineárne nezávislé vlastné vektory matice A odpovedajúce rovnakému vlastnému číslu λ, potom funkcie $\bar{\eta} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{v}$ a $\bar{\zeta} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{w}$ sú opäť lineárne nezávislé vektorové riešenia.

Celá hra teda spočíva v hľadaní vlastných čísiel a príslušných lineárne nezávislých vlastných vektoroch matice A. Nakoľko matica A je typu 2×2, môžu nastať celkovo 4 prípady:

- A má dve rôzne reálne vlastné čísla. Každému vlastnému číslu odpovedá jeden nenulový vlastný vektor, a teda vieme zostrojiť dve lineárne nezávislé vektorové riešenia $\bar{\eta}_1(t)$ a $\bar{\eta}_2(t)$.
- A má jedno dvojnásobné vlastné číslo, ktorému odpovedajú dva lineárne nezávislé nenulové vlastné vektory. Opäť vieme zostrojiť dve lineárne nezávislé vektorové riešenia $\bar{\eta}_1(t)$ a $\bar{\eta}_2(t)$.
- A má jedno dvojnásobné vlastné číslo, ktorému však odpovedá len jeden lineárne nezávislý nenulový vlastný vektor. V tomto prípade vieme pomocou vlastného vektora zostrojiť iba jedno lineárne nezávislé vektorové riešenie $\bar{\eta}_1(t)$. Druhé lineárne nezávislé vektorové riešenie $\bar{\eta}_2(t)$ sa nájde pomocou tzv. *zovšeobecneného* vlastného vektora matice A.
- A má dvojicu nereálnych komplexne združených vlastných čísiel. Odpovedajúce vlastné vektory majú komplexné súradnice. Pomocou ich reálnych a imaginárnych častí sa zostroja dve lineárne nezávislé vektorové riešenia $\bar{\eta}_1(t)$ a $\bar{\eta}_2(t)$. Kľúčová je pri tom *Eulerova indetita*:

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi.$$

Každý prípad teraz preberieme na konkrétnych príkladoch.

Príklad 2

Nájdite všeobecné riešenie systému

$$x' = x + y,$$

$$y' = 8x - y.$$

Riešenie:

Systém prepíšeme do vektorového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Príslušná matica A systému má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme vlastné čísla matica A. Platí (po úprave):

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - 9 = 0.$$

Charakteristický polynóm matice A má teda dva rôzne reálne korene $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -3$. Ku každému vlastnému číslu nájdeme príslušný nenulový vlastný vektor. Pripomeňme, že k vlastnému číslo λ matice A sa príslušný vlastný vektor $\bar{v}$ nájde ako riešenie homogénnej lineárnej sústavy:

$$A\,\bar{v} = \lambda\bar{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda \cdot I)\bar{v} = 0.$$

V našom prípade postupne dostávame:

- vlastné číslo $\lambda_1 = 3$ – vlastný vektor $\bar{v} = (v_1, v_2)^T$ nájdeme riešením sústavy:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 8 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

  Sústava má len jedno lineárne nezávislé riešenie, napríklad $\bar{v} = (1, 2)^T$. Príslušné lineárne nezávislé vektorové riešenie $\bar{\eta}_1$ má potom tvar:

$$\bar{\eta}_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot \bar{v} = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- vlastné číslo $\lambda_1 = -3$ – vlastný vektor $\bar{w} = (w_1, w_2)^T$ nájdeme riešením sústavy:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 8 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0.$$

  Sústava má opäť len jedno lineárne nezávislé riešenie, napríklad $\bar{w} = (1, -4)^T$. Príslušné lineárne nezávislé vektorové riešenie $\bar{\eta}_2$ má potom tvar:

$$\bar{\eta}_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot \bar{w} = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Všeobecné vektorové riešenie systému v zadaní má teda tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\,\bar{\eta}_1 + C_2\,\bar{\eta}_2 = C_1\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t} \\ 2C_1\,\mathrm{e}^{3t} - 4C_2\,\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Odtiaľto pre neznáme funkcie x, y potom máme:

$$x = C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad y = 2C_1\,\mathrm{e}^{3t} - 4C_2\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3

Nájdite všeobecné riešenie systému

$$x' = 2x,$$

$$y' = 2y.$$

Riešenie:

Prepíšeme systém do vektorového tvaru:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matica systému je:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ihneď vidíme, že matica A má dvojnásobné vlastné číslo $\lambda = 2$. K nemu odpovedajúce vlastné vektory nájdeme ako riešenia homogénnej sústavy

$$(A - \lambda \cdot I)\bar{v} = 0 \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{v} = 0.$$

Táto sústava má dve lineárne nezávislé riešenia, napríklad $\bar{v} = (1, 0)^T$ a $\bar{w} = (0, 1)^T$. Vieme teda zostrojiť dve lineárne nezávislé vektorové riešenia $\bar{\eta}$ a $\bar{\zeta}$ daného systému:

$$\bar{\eta} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{v} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\zeta} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{w} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Preto všeobecné riešenie vektorového systému môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\,\bar{\eta} + C_2\,\bar{\zeta} = C_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Z tohto vyjadrenia dostávame všeobecné riešenie systému v zadaní:

$$x = C_1\,\mathrm{e}^{2t}, \quad y = C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 4

Nájdite všeobecné riešenie systému

$$x' = -4x - y,$$

$$y' = x - 2y.$$

Riešenie:

Matica daného systému má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pozrieme sa na jej vlastné čísla. Platí:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda+3)^2 = 0.$$

Matica A má teda opäť jedno dvojnásobné vlastné číslo $\lambda = -3$. V tomto prípade však k nemu existuje len jeden lineárne nezávislý vlastný vektor. Vyplýva to z toho, že matica

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

má hodnosť 1, a teda jej jadro má dimenziu rovnú $2 - 1 = 1$ (vlastné vektory matice A prislúchajúce vlastnému číslu λ sú prvky jadra matice $(A - \lambda\, I)$). Onen jeden lineárne nezávislý vlastný vektor je napríklad $\bar{v} = (1, -1)^T$. Pomocou $\bar{v}$ vieme skonštruovať jedno lineárne nezávislé vektorové riešenie $\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \bar{v} = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Potrebujeme nájsť ešte jedno vektorové riešenie $\bar{\zeta}$ systému v zadaní tak, aby $\bar{\eta}$ a $\bar{\zeta}$ boli lineárne nezávislé. Riešenie $\bar{\zeta}$ môžeme uvažovať v tvare

$$\bar{\zeta} = \mathrm{e}^{\lambda t}\,(t \cdot \bar{v} + \bar{w}) = \mathrm{e}^{-3t}\left(t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \bar{w}\right),$$

kde vektor $\bar{w}$ je ľubovoľné riešenie nehomogénnej sústavy

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \bar{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Vektor $\bar{w}$ sa nazýva *zovšeobecnený vlastný vektor matice* A. Riešením tejto sústavy dostaneme napríklad $\bar{w} = (0, -1)^T$. Vektorové riešenie $\bar{\zeta}$ má potom tvar:

$$\bar{\zeta} = \mathrm{e}^{-3t}\left(t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}t\\-t-1\end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie vektorového systému má teda tvar:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = C_1\,\bar{\eta} + C_2\,\bar{\zeta} = C_1\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}t\\-t-1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-3t}[C_1 + C_2 t]\\ -\mathrm{e}^{-3t}[C_1 + C_2(t+1)]\end{pmatrix}.$$

Pre všeobecné riešenie systému v zadaní potom platí:

$$x = \mathrm{e}^{-3t}[C_1 + C_2 t], \quad y = -\mathrm{e}^{-3t}[C_1 + C_2(t+1)], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 5

Nájdite všeobecné riešenie systému

$$x' = x + 3y,$$

$$y' = -3x + y.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich príkladoch. Príslušná matica systému je:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Stanovíme vlastné čísla matice A. Platí:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda-1)^2+9=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \pm 3\mathrm{i}.$$

Jedná sa teda o prípad, keď matica A má za vlastné čísla dvojicu nereálnych komplexne združených čísiel, konkrétne $\lambda = 1+3\mathrm{i}$ a $\bar{\lambda} = 1-3\mathrm{i}$. Vlastnému číslu $\lambda = 1+3\mathrm{i}$ odpovedá jeden lineárne nezávislý komplexný vlastný vektor $\bar{v}$, ktorý dostaneme riešením homogénnej sústavy:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \bar{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 3 \\ -3 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \bar{v} = 0.$$

Máme napríklad $\bar{v} = (1, \mathrm{i})^T$. Pomocou vektora $\bar{v}$ vieme zostaviť *komplexné* vektorové riešenie daného systému v tvare:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\bar{v} = \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t} \\ \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t} \cdot \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Posledný vektor má komplexné súradnice. Určíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Pomocou Eulerovej identity máme:

$$\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{t+3t\mathrm{i}} = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3t} = \mathrm{e}^t(\cos 3t + \mathrm{i}\cdot \sin 3t).$$

Dosadením do vyjadrenia pre získané komplexné vektorové riešenie, následným roznásobením a rozdelením na reálnu a imaginárnu časť dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t} \\ \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})t} \cdot \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\cos 3t + \mathrm{i}\cdot \sin 3t) \\ \mathrm{e}^t(\cos 3t + \mathrm{i}\cdot \sin 3t)\cdot \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos 3t + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^t \sin 3t \\ -\mathrm{e}^t \sin 3t + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^t \cos 3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos 3t \\ -\mathrm{e}^t \sin 3t \end{pmatrix} + \mathrm{i}\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin 3t \\ \mathrm{e}^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Reálna aj imaginárna časť posledného výrazu sú dve *reálne* lineárne nezávislé vektorové riešenia systému v zadaní, t.j.

$$\bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos 3t \\ -\mathrm{e}^t \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin 3t \\ \mathrm{e}^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Preto všeobecné vektorové riešenie daného systému má tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\,\bar{\eta}_1 + C_2\,\bar{\eta}_2 = C_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos 3t \\ -\mathrm{e}^t \sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin 3t \\ \mathrm{e}^t \cos 3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t \\ -C_1 e^t \sin 3t + C_2 e^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Pre neznáme funkcie x, y potom dostaneme:

$$x = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t, \quad y = -C_1 e^t \sin 3t + C_2 e^t \cos 3t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Neriešené príklady

1. Systém z Príkladu 1 vyriešte metódou vlastných čísiel a vlastných vektorov.

2. $x' = 4x - 3y, \quad y' = 5x - 4y.$

   [$x = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t + 5C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$]

3. $x' = x + y, \quad y' = -5x - y.$

   [$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad y = -C_1(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2(2\cos 2t - \sin 2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$]

4. $x' = -5x - 2y, \quad y' = x - 7y.$

   [$x = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t), \quad y = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$]

5. $x' = -3x - y, \quad y' = x - y.$

   [$x = e^{-2t}(C_1 + C_2 t), \quad y = -e^{-2t}(C_1 + C_2 + C_2 t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$]

6. $x' = -4x, \quad y' = -4y.$

   [$x = C_1 e^{-4t}, \quad y = C_2 e^{-4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$]