

## Kvadraticke formy

Bilineární forma:  $U$  vektorový prostor nad  $K$

$$f: U \times U \rightarrow K$$

$$f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$$

$$f(u, av_1 + bv_2) = \dots$$

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

Symetrická bilinéární forma

$$f(u, v) = f(v, u)$$

Podleže  $A$  je matice formy  $f: U \times U \rightarrow K$  v bázi  $\alpha$   
 a  $B$  je matice jiné formy v bázi  $\beta$ , pak platí

$$B = P^T A P$$

kte  $P = (\text{id})_{\alpha, \beta}$ .

Zajímají nás klamé symetrické bilin. formy.

Nové

Kvadratická forma je zobrazení  $g: U \rightarrow K$  takové, že  
 existuje symetrická bilin. forma  $f: U \times U \rightarrow K$  a platí  
 $g(u) = f(u, u)$ .

Je riepe, se kaida' nym bilin forma m'uje p'duanacine kvadratican formu. Pokud ipme nad  $\mathbb{R}$  nebz  $\mathbb{C}$ , plake i shazeme luseme: Kaida' kvadr forma p'duanacine m'uje svom nym bilin. formu.

Podi  $g: U \rightarrow K$  je kvadr forma definovana' pomocu nym bilin formy

$$\text{Pak } g(u) = f(u, u)$$

$$f(u, v) = \frac{1}{4} (g(u+v) - g(u-v))$$

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &= \\ &= a(a+b) - b(a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b \end{aligned}$$

Dokaz:  $\frac{1}{4} (g(u+v) - g(u-v)) = \frac{1}{4} (f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v)) =$

$$= \frac{1}{4} (f(u, u+v) + f(v, u+v) - f(u, u-v) + f(v, u-v))$$

Věta. Ke každé symetrické bilinéární formě  $f: U \times U \rightarrow K$  existuje báze  $B$  taková, že matice  $f$  v této bázi je diagonální.

Pro  $u, v$  :

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i y_i$$

kde  $(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  a  $(v)_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

Důkaz: Necht  $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  je nějaká báze v prostoru  $U$

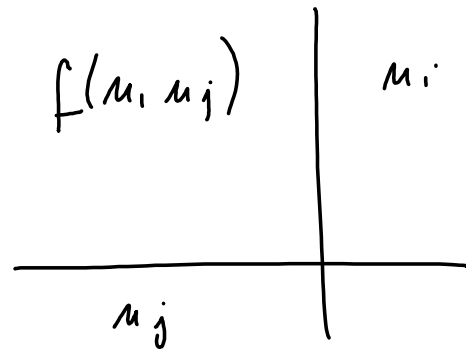
Ukažme následující schéma

Skupné iádlové i skupové i pravy praxidime tak, abychem na miške matice detale diagonaitni matici

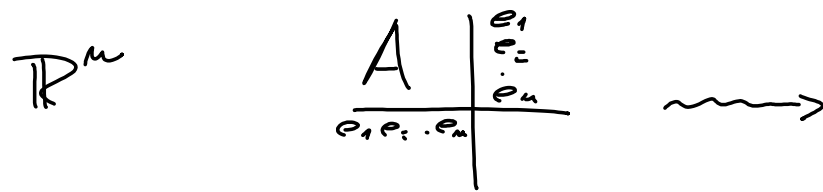
$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 & \nu_1 = \sum c_{1i} \mu_i \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & 0 & \nu_2 = \sum c_{2i} \mu_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{nn} & \nu_n = \sum c_{ni} \mu_i \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} f(\nu_1, \nu_1) &= \lambda_{11} \\ f(\nu_1, \nu_j) &= 0 \quad j \neq 1 \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Tedy hledaná báze  $B$  je  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$   
a matice  $f$  v bázi  $B$  je  $\begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ & \lambda_{22} & \\ \cup & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$



$$\sum c_{ij} u_j$$



$$B \mid \sum c_{ij} e_j = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$$



Diagonalizace kvadr. formy pomocí tzv. úpravy na čtverce

Mějme kvadr. formu  $q: V \rightarrow K$  a množinu jejího základu

v standardních bázi  $\alpha$

$$q(u) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(1) Předpoklad  $a_{11} \neq 0$ .

$$\begin{aligned} q(u) &= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + \sum_{2 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n \right)^2 - \text{něco bez } x_1 + \sum_{2 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11} \left[ x_1^2 + \left( \frac{a_{12}}{2a_{11}} \right)^2 x_2^2 + \dots + 2x_1 \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_3 + 2 \frac{a_{12}}{2a_{11}} \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_2 x_3 \right] \end{aligned}$$

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ij} (x_i' + x_j') x_j' = a_{ij} x_i' x_j' + a_{ij} x_j'^2$$

a v nových súradniciach dostaneme koeficient u  $x_j'^2$  rovný od nuly, pokiaľ musíme pokračovať podľa (2)

Takto postupne dostaneme, že súradnice  $x_1, x_2, \dots, x_n$  súradnice

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

$$y_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n$$

$$y_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \dots + q_{2n}x_n$$

...

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou souřadnice

n bázi  $\alpha$

$y_1, y_2, \dots, y_m$  jsou souřadnice

n množině bázi  $\beta$ .



Hodnot krads. formy = hodnot její matice v nějaké bázi

$$B = P^T A P$$

$A$  matice v  $\alpha$ ,  $B$  matice v  $\beta$ ,  $P = (\text{id})_{\alpha\beta}$  je regulární

Peda  $h(B) = h(A)$

Nyní se budeme zabývat pouze reálnými krads. formami

### SILVESTRŮV ZÁKON SETRVAČNOSTI

Mějme  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  je krads. forma. Pak existují báze  $B$ , v níž souřadnicích má  $g$  vyjádření

$$g(u) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2$$

$$a_{ii} y_i^2 = (-1) (-a_{ii} y_i^2) = (-1) x_i^2$$

Nezávislost počtu 1, -1 a 0 na sobě káse (setrvačnost)

$$\text{Nechť } g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots \quad \text{v kázi } \alpha$$

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots \quad \text{v kázi } \beta$$

a nechť  $p > q$

$A \subseteq U$  je podmnožina s vlastností  $K = \{u \in U, g(u) = 0\}$

$$A = [u_1, u_2, \dots, u_p], \text{ kde } \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_n)$$

$$B = [v_{q+1}, \dots, v_n], \text{ kde } \beta = (u_1, \dots, u_{q+1}, \dots, u_n)$$

