Ko Ko

Kolmá projekce

U vekt. prostor, $V \subseteq U$ jeho podprostor

$$V^{\perp} = \{ u \in U ; \ (\forall v \in V) \ \langle u, v \rangle = 0 \}$$

$u \perp v$

$\boxed{V^{\perp} \text{ je vekt. podprostor. Důkaz je jednoduchý.}}$

Věta: $U = V \oplus V^{\perp}$

každý vektor z U můžeme psát právě jedním způsobem ve tvaru $u = v + w$

kde $v \in V$, $w \in V^{\perp}$.

2

Důkaz jednoznačnosti:

$$u = v_1 + w_1 \qquad v_1, v_2 \in V$$
$$u = v_2 + w_2 \qquad w_1, w_2 \in V^\perp$$

Odečtením dostaneme

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2$$
$$V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V^\perp$$
$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap V^\perp = \{\vec{o}\} \implies v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = \vec{o}$$
$$\implies v_1 = v_2 \text{ a } w_1 = w_2 .$$

Definice kolmé projekce Nechť $V \subseteq U$ je vekt. podprostor. Potom každý vektor $u \in U$ lze psát jednoznačně ve tvaru

$$u = v + w, \text{ kde } v \in V \text{ a } w \in V^\perp .$$

3

Vektor $v \in V$ nazýváme kolmou projekcí vektoru u do prostoru V.

Označení: $v = P_V u$

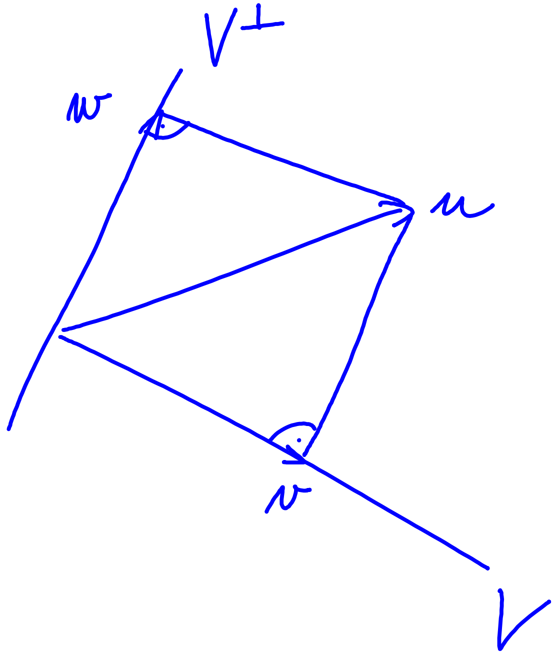
Zobrazení $P: U \to V$ je lineární.

Důkaz linearity

Nechť
$$u = v + w \qquad v, \bar{v} \in V, \; w, \bar{w} \in V^\perp$$
$$\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$$

Pak $au + b\bar{u} = av + aw + b\bar{v} + b\bar{w} = \underbrace{av + b\bar{v}}_{\in V} + \underbrace{aw + b\bar{w}}_{\in V^\perp}$

Proto $P_V(au + b\bar{u}) = av + b\bar{v} = a P_V u + b P_V \bar{u}$



4

$v = P_V u$

$w = P_{V^\perp} u$

5

Vyjádření kolmé projekce se provádí z těchto dvou vlastností

(1) $P_V u \in V$

(2) $u = \underbrace{P_V u}_{\in V} + \underbrace{(u - P_V u)}_{\in V^{\perp}}$ $\qquad u - P_V u \perp V$

Obvykle je podprostor V zadán jako lineární obal několika vektorů, např. $V = [v_1, v_2, v_3]$

(1) znamená, že $P_V u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$

(2) říká, že $u - P_V u = u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 \perp v_1, v_2, v_3$

6

(2) máme dánu soustavu rovnic pro neznámé a_1, a_2, a_3

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_2 \rangle = 0$$

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_3 \rangle = 0$$

Po roznásobení a úpravě dostaneme:

$$a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + a_2 \langle v_2, v_1 \rangle + a_3 \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_2 \rangle + a_2 \langle v_2, v_2 \rangle + a_3 \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_3 \rangle + a_2 \langle v_2, v_3 \rangle + a_3 \langle v_3, v_3 \rangle = \langle u, v_3 \rangle$$

Soustava má matici

Gramova matice vektorů v_1, v_2, v_3.

$$\left(\left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^{3} \;\middle|\; \begin{matrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle \\ \langle u, v_3 \rangle \end{matrix} \right)$$

(7)

Věta (2 důležité vlastnosti kolmé projekce)

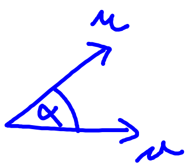
Nechť $V \subseteq U$ je netriviální podprostor a $P_V : U \to V$ kolmá projekce.

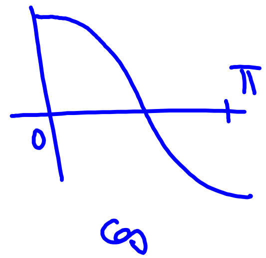
(a) Pro $u \in U$ je $P_V u$ jediný vektor z podprostoru V s vlastností

$$\|u - P_V u\| = \min \{ \|u - v\| ,\ v \in V \}$$

(b) $P_V u$ je až na (kladný) násobek jediný vektor z podprostoru V pro který platí

$$\frac{\|P_V u\|}{\|u\|} = \max \Bigg\{ \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}}_{\cos \alpha} ,\ v \in V \Bigg\}$$





8

Důkaz: K důkazu potřebujeme toto: $v \in V$, $w \in V^{\perp}$, pak

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v\rangle + \underset{0}{\langle v, w\rangle} + \underset{0}{\langle w, v\rangle} + \langle w, w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2$$

(a) Nechť $u \in U$ pevný a $v \in V$ libovolný

$$\|u-v\|^2 = \|P_V u + P_{V^\perp} u - v\|^2 = \|\underbrace{(P_V u - v)}_{\in V} + \underbrace{P_{V^\perp} u}_{\in V^\perp}\|^2$$

podle předchozího

$$= \|P_V u - v\|^2 + \|P_{V^\perp} u\|^2 \geq \|P_{V^\perp} u\|^2$$

Rovnost nastane právě když $P_V u = v$

(b)
$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle P_V u + P_{V^\perp} u,\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle P_V u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} + \underbrace{\frac{\langle P_{V^\perp} u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}}_{=0}$$

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle P_V u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \underset{\text{Cauchyova nerovnost}}{\leq} \frac{\|P_V u\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|}$$

Když nastane rovnost nám říká Cauchyova nerovnost. Nastane, když v je násobkem $P_V u$. Tím je dokázána (b).

10

Euklidovská geometrie

Jde v ní o počítání vzdáleností mezi afinními podprostory
a o počítání úhlů mezi některými podprostory

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$.

$\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ $\qquad$ $Z(\mathcal{N})$ je vekt. podprostor v $\mathcal{U}$

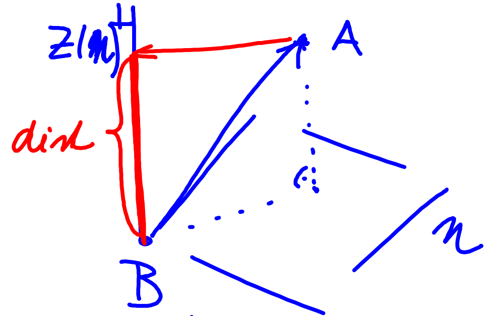
Definice

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \underset{\inf}{\min} \{ \|A - X\|,\ X \in \mathcal{N} \}$$

(11)

Věta (výpočet vzdálenosti bodu od afinního podprostoru)

(a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do podprostoru $Z(\mathcal{N})^{\perp}$



(b) Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) $N \in \mathcal{N}$ je taký, že $\|A-N\| = dist(A, \mathcal{N})$

(2) $N \in \mathcal{N}$ je taký, že $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

12

(3) $N \in \mathcal{N}$ je taková, že
$$N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$$

<u>Důkaz:</u>

(a) $N \in \mathcal{N}$ $N = B + v$, $v \in Z(\mathcal{N})$

$$\|A-N\|^2 = \|A-B-v\|^2 = \|\underbrace{P_{Z(\mathcal{N})}(A-B) - v}_{\in Z(\mathcal{N})}\|^2 + \|\underbrace{P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B)}_{\in Z(\mathcal{N})^\perp}\|^2$$

$$\leq \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B)\|^2$$

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B)\|$$

(13)

$N = B + v \Rightarrow v = N - B$

(b) Máme normál

$$\|A - N\|^2 = \|P_{Z(n)}(A-B) - v\|^2 + \|P_{Z(n)^\perp}(A-B)\|$$

jestliže $\|A-N\| = dist(A, n)$, pak

$$P_{Z(n)}(A-B) - v = 0$$

$$P_{Z(n)}(A-B) - N + B = 0$$

$$N = B + P_{Z(n)}(A-B)$$

$(1) \Rightarrow (3)$

$(3) \Rightarrow (2)$ $\quad N = B + P_{Z(n)}(A-B)$ $\quad A - N = A - B - P_{Z(n)}(A-B)$

$$= P_{Z(n)^\perp}(A-B)$$

(14)

$$\Rightarrow A - N \perp Z(\mathfrak{n})$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\|A - N\|^2 = \|P_{Z(\mathfrak{n})^\perp}(A - N)\|^2 + \|P_{Z(\mathfrak{n})}(A - N)\|^2$$

$$= \|P_{Z(\mathfrak{n})^\perp}(A - N)\| = \|P_{Z(\mathfrak{n})^\perp}(A - B) - \underbrace{P_{Z(\mathfrak{n})^\perp} v}_{=0}\|^2$$

$$= \|P_{Z(\mathfrak{n})^\perp}(A - B)\|^2 = |\mathrm{dist}(A, \mathfrak{n})|^2$$

15

Příklad Spočítejte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 + b = 0$ v $\mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{N} = \{ (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : \ a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 + b = 0 \}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0,0,0,0)$$

Předp. že $a_4 \neq 0$

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp} (A - B) \|$$

kde $B \in \mathcal{N}$.

16

$$Z(\mathcal{N}) = \{ (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4, \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 = 0 \}$$

$$Z(\mathcal{N})^\perp = \{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4; \quad \forall y \in Z(\mathcal{N}), \ \langle z, y \rangle = 0$$

$$z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 + z_4 y_4 = 0 \}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \subset Z(\mathcal{N})^\perp$$

$Z(\mathcal{N})^\perp = [(a_1, a_2, a_3, a_4)]$ neboť $\dim Z(\mathcal{N})^\perp = 1$

Hledejme nějaký bod B z $\mathcal{N}$ ve tvaru

$B = (0, 0, 0, x_4)$ $\qquad a_4 x_4 + b = 0$

$$x_4 = -\frac{b}{a_4}$$

$$B = \left(0, 0, 0, -\frac{b}{a_4}\right)$$

(17)

$$\mathrm{dist}(A, \pi) = \| P_{Z(\pi)^\perp}(A - B) \|$$

$$A - B = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{b}{a_4}\right)$$

$$P_{Z(\pi)^\perp}(A - B) = c \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$A - B - P_{Z(\pi)^\perp}(A - B) \perp (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\left\langle \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{b}{a_4}\right) - c\,(a_1, a_2, a_3, a_4),\ (a_1, a_2, a_3, a_4) \right\rangle = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b = c\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

$$c = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

18

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \left\| c \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4) \right\| =$$

$$= |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} =$$

$$= \frac{|a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b|}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} =$$

$$= \frac{|a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

(19)

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

$$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$$

$$\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$$

Definice

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \inf\{\, \|X-Y\| \in \mathbb{R}\ ;\ X \in \mathcal{M},\ Y \in \mathcal{N} \,\}$$

Vypočíst podle následující věty

VĚTA (o vzdálenosti afinních podprostorů)

(a) Vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je velikost kolmé projekce vektoru $A-B$ do podprostoru $\big(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})\big)^{\perp}$.

20

(b) Následující podmínky pro body $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ jsou ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

(Říkáme, že body M a N realizují vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.)

v bodech M a N se realizuje vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}}(A - B)$

(21)

Důkaz převedeme na důkaz předchozí věty takto.

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf\{\|X-Y\|,\ X \in \mathcal{M},\ Y \in \mathcal{N}\} =$$

$$= \inf\{\|A + \underset{\substack{\cap \\ Z(\mathcal{M})}}{v} - B - \underset{\substack{\cap \\ Z(\mathcal{N})}}{u}\|,\ v \in Z(\mathcal{M}),\ u \in Z(\mathcal{N})\}$$

$$= \inf\{\|A - (B + u - v)\|,\ u, v \in Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})\}$$

$$= \operatorname{dist}(A,\ B + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))$$