Důkaz Jord. věty

$\varphi: U \to U$, char. polynom má $n = \dim U$ kořenů včetně alg. násobnosti, λ je vl. číslo

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ (\varphi - \lambda\, id)^k (u) = 0 \text{ pro nějaké } k \}$$

Vlastnosti R_λ

1. vekt. podprostor
2. $\exists k_0$ tak, že $\forall u \in R_\lambda$ $(\varphi - \lambda\, id)^{k_0}(u) = 0$
3. R_λ je invariantní vůči φ i $\varphi - \mu\, id$

   $\varphi \circ (\varphi - \lambda\, id) = (\varphi - \lambda\, id) \circ \varphi$

4. jestliže $\mu \neq \lambda$ pak $\varphi - \mu\, id /_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je izomorfismus

   Ukážeme, že $Ker(\varphi - \mu\, id)/_{R_\lambda}$ je nulové

   $u \in Ker(\varphi - \mu\, id)/_{R_\lambda}$ $\quad (\varphi - \mu\, id)(u) = 0 \quad u \in R_\lambda$

(2)

Předp. že $u \neq \vec{0}$ a k je nejmenší číslo takové, že $(\varphi - \lambda id)^k(u) = 0$.

Počítáme

$$0 = (\varphi - \lambda id)^k(u) = (\varphi - \lambda id)^{k-1}(\varphi - \lambda id)(u) = (\varphi - \lambda id)^{k-1}(\varphi(u) - \lambda u) =$$

$$= (\varphi - \lambda id)^{k-1}(\mu u - \lambda u) = \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0}(\varphi - \lambda id)^{k-1}(u) = 0$$

Dokázáme $(\varphi - \lambda id)^{k-1}(u) = 0$, což je spor s výběrem k.

(5) $\varphi - \lambda id|_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je podle (2) nilpotentní operátor, neboť pro nějaké k_0 je $(\varphi - \lambda id)^{k_0}|_{R_\lambda} = 0$.

Směřujeme k důkazu, že

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r}$$

K tomu budeme potřebovat pojem kvocientu vekt. prostoru.

U vekt. prostor a V jeho podprostor.

Uvažujme množiny pro každé $u \in U$

$$u + V = \{ u + v \in U ,\ v \in V \}$$

Kdy $u_1 + V = u_2 + V$ $\quad u_1 - u_2 \in V \quad u_2 - u_3 \in V$

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

$$u_1 - u_3 = u_1 - u_2 + u_2 - u_3 \in V$$

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in V$$

Platí $u_1 + V = u_2 + V \iff u_1 - u_2 \in V$.

(4)

Definujeme množinu

$$U/V = \{ u + V, u \in U \}$$

Je to množina tříd ekvivalence ($u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in V$
$\Leftrightarrow u_1 + V = u_2 + V$)

Na této množině můžeme definovat sčítání

$$(u_1 + V) + (u_2 + V) = (u_1 + u_2) + V$$

a násobení skalárem

$$a(u + V) = au + V$$

Je jednoduché ověřit, že tyto definice jsou korektní.

$(U/V, +, \cdot)$ je vektorový prostor

kvocient vekt. prostoru

5

Nechť α je báze prostoru U $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n)$

která vznikla z báze $(u_1, u_2, \dots u_k)$ podprostoru V.

Lemma: V tomto případě je

$$\tilde{\alpha} = (u_{k+1} + V, u_{k+2} + V, \dots, u_n + V)$$

báze kvocientu U/V.

Důkaz lze přednést.

Mějme $\varphi : U \longrightarrow U$ s invariantním podprostorem V.

$\varphi(V) \subseteq V$. Pak můžeme definovat

$$\tilde{\varphi} : U/V \longrightarrow U/V$$ $\tilde{\varphi}$ je lineární

předpisem

$$\tilde{\varphi}(u + V) = \varphi(u) + V$$

Korektnost: $u_1 + V = u_2 + V \iff u_1 - u_2 \in V$

Chceme ukázat, že $\varphi(u_1) + V = \varphi(u_2) + V \iff \varphi(u_1) - \varphi(u_2) \in V$

$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \varphi(u_1 - u_2) \in V$, neboť $u_1 - u_2 \in V$.

Lemma: Nechť $\varphi : U \to U$, $V \subset U$ je invariantní podprostor. Nechť $(u_1, \dots u_k)$ je báze podprostoru V a $\alpha = (u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n)$ je báze celého prostoru U.

Potom matice φ v bázi α má tvar

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

kde $B = (\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}}$.

Důkaz:

$$\tilde{\varphi}(u_{k+1}+V) = \varphi(u_{k+1}) + V = \overbrace{c_{1\,k+1}u_1 + \dots c_{k\,k+1}u_k}^{\in V} + b_{k+1\,k+1}u_{k+1} + \dots + b_{n\,k+1}u_n + V$$

$$= b_{k+1\,k+1}u_{k+1} + \dots + b_{n\,k+1}u_n + V$$

$$= \underline{b_{k+1\,k+1}}(u_{k+1}+V) + \dots \underline{b_{n\,k+1}}(u_n+V)$$

Tohle jsou koeficienty matice $\tilde{\varphi}$ v bázi $\tilde{\alpha}$.

Věta: Nechť $\dim U = n$, $\varphi: U \to U$ má součet alg. násobností vlastních čísel rovno n. Potom existuje v U báze B taková, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou vl. čísla, každé tolikrát jaká je alg. násobnost.

Důkaz indukcí podle $n = \dim U$.

$n = 1$ zřejmé

Nechť věta platí pro prostory dimenze $n-1 \geq 1$.

Nechť $\dim U = n$, $\varphi : U \to U$ má požadované vlastnosti.

Nechť λ_1 je vl. číslo s vl. vektorem u_1. Položme

$$V = [u_1]$$

V je invariantní podprostor. Vezmeme bázi $\alpha = (u_1, u_2 \dots u_n)$ v U

Definujeme $\tilde{\varphi} : U/V \longrightarrow U/V$ $\quad \tilde{\varphi}(u+V) = \varphi(u) + V$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & C \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \qquad B = (\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}}$$

char. polynom $\varphi = (\lambda_1 - \lambda)$.

$\det(B - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)$.

char. polynom $\tilde{\varphi}$.

$\tilde{\varphi}: U/V \to U/V$ má součet alg. násobností vl. čísel $n-1$, vl. čísla má $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, $\dim U/V = n-1$. Můžeme tedy na $\tilde{\varphi}$ aplikovat indukční předpoklad.

Existuje tedy báze $\tilde{B} = (v_2+V, v_3+V, \ldots, v_n+V)$ tak, že

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & * \\ & \lambda_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Potom na U vezmeme bázi $B = (u_1, v_2, \ldots, v_n)$ a platí, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & (\tilde{\varphi})_{\tilde{B},\tilde{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vrátíme se ke kořenovým podprostorům

$\varphi: U \to U$ má vlastní čísla

λ_1 alg. nás. k_1

λ_2 alg. nás. k_2 $\qquad k_1+k_2+\dots+k_r = n = \dim U$

$\vdots$

λ_r alg. nás. k_r

Chceme dok., že $\dim R_{\lambda_i} \geq k_i$

Z předchozí věty víme, že v U existuje báze B tak, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Tvrzení $v_1, v_2 \dots v_{k_1} \in R_{\lambda_1}$.

$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}) v_1 = 0$

$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^2 v_2 = (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}) v_2$

$= (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(a v_1 + \underline{\lambda_1 v_2} - \underline{\lambda_1 v_2}) = 0$

Analogicky $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^i v_i = 0$ pro $i \leq k_1$.

$\dim R_{\lambda_1} \geq k_1$

Věta 1 $\quad U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r}$

Důkaz: Součet $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_r}$ je direktní.

Indukcí podle r.

$r = 1 \qquad R_{\lambda_1}$ direktní

Nechť $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots R_{\lambda_{r-1}}$ je direktní.

$\forall u \in R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_{r-1}}$ můžeme psát jednoznačně jako

$$u = u_1 + u_2 + \dots u_{r-1} \qquad u_i \in R_{\lambda_i}$$

$\Longleftrightarrow$ jestliže $0 = u_1 + u_2 + \dots + u_{r-1}$ $\quad u_i \in R_{\lambda_i} \Longrightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_{r-1} = \vec{0}$.

Dokážeme, že $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_r}$ je direktní.

(12)

Nechť $u_1+u_2+\dots+u_n=\vec{o}$, kde $u_i\in R_{\lambda_i}$.

Aplikujeme $(\varphi-\lambda_n id)^{k_n}$

$$\underbrace{(\varphi-\lambda_n id)^{k_n}u_1}_{v_1\in R_{\lambda_1}}+\dots+\underbrace{(\varphi-\lambda_n id)^{k_n}u_{n-1}}_{v_{n-1}\in R_{\lambda_{n-1}}}+o$$

Máme nyní

$$v_1+v_2+\dots+v_{n-1}=\vec{o}\qquad v_i\in R_{\lambda_i}$$

Podle ind. předpokladu $v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=\vec{o}$.

$\varphi-\lambda_n id$ je izomorfismus na R_{λ_i}, $\lambda_i\neq\lambda_n$.

Proto $(\varphi-\lambda_n id)^{k_n}$ je izomorfismus na R_{λ_i}, a proto

$(\varphi-\lambda_n id)^{k_n}(u_i)=v_i=\vec{o}\Rightarrow u_i=\vec{o}$.

$u_1=u_2=\dots=u_{n-1}=\vec{o}$, dosazením do původní rovnice, dostaneme, že také $u_n=\vec{o}$.

Pro dimenzi součtu platí

$$\dim\left(R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus R_{\lambda_r}\right)=\dim R_{\lambda_1}+\dim R_{\lambda_2}+\ldots+\dim R_{\lambda_r}$$

$$\geq k_1+k_2+\ldots+k_r=n$$

Tedy $R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus R_{\lambda_r}$ je podprostor v U dimenze $\geq n=\dim U$. Proto

$$R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus R_{\lambda_r}=U.$$

Víme, že $(\varphi-\lambda_i\,\mathrm{id})|_{R_{\lambda_i}}: R_{\lambda_i}\to R_{\lambda_i}$ je nilpotentní operátor.

Nilpotentní operátor $\psi: V\to V$ $\exists k\ \psi^k=0$

Cyklický operátor $\psi: V\to V$ takový, že existují báze ve V daná vektory $v_1, v_2, \ldots v_k$, že

$$\psi(v_1)=0,\ \psi(v_2)=v_1\ \ldots\ \psi(v_k)=v_{k-1}.$$

$$v_k\xrightarrow{\psi}v_{k-1}\xrightarrow{\psi}\ldots\xrightarrow{\psi}v_2\xrightarrow{\psi}v_1\xrightarrow{\psi}0\qquad \psi^k(v_k)=0.$$

Věta 2 Nechť $\varphi: V \to V$ je nilpotentní. Pak existuje rozklad prostoru V

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$$

na invariantní podprostory takové, že

$$\varphi / W_i : W_i \to W_i$$

jsou cyklické.

Důkaz: Nechť k je nejmenší číslo, že $\varphi^k = 0$.

$$V = \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{id}}}{\mathrm{im}\,\varphi^0} \underset{\neq}{\supsetneq} \mathrm{im}\,\varphi^1 \underset{\neq}{\supsetneq} \mathrm{im}\,\varphi^2 \underset{\neq}{\supsetneq} \dots \mathrm{im}\,\varphi^{k-1} \underset{\neq}{\supset} \mathrm{im}\,\varphi^k = \vec{0}$$

ostré inkluze.

Označíme $P^{k-1} = \operatorname{im} \psi^{k-1}$, $P^{k-2} = \operatorname{im} \psi^{k-2}$, ...

$$P^{k-1} \subsetneq P^{k-2} \subsetneq P^{k-3} \quad \dots\dots \quad P^{0}$$

Vybereme bázi P^{k-1} : $u_1^{k-1}, u_2^{k-1}, \dots u_m^{k-1}$

$$\psi(u_i^{k-1}) = 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & 0 \\
P^{k-1} & u_1^{k-1} \arrow[u] & u_2^{k-1} \arrow[u] & \dots & u_m^{k-1} \arrow[u] \\
P^{k-2} & u_1^{k-2} \arrow[u] & u_2^{k-2} \arrow[u] & & u_m^{k-2} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Vektory $u_1^{k-1}, \dots u_m^{k-1}, u_1^{k-2}, \dots u_m^{k-2}$ jsou LN.

$$a_1 u_1^{k-1} + \dots + b_1 u_1^{k-2} + \dots$$

a aplikuje ψ.

Doplníme na bázi celého P^{k-2} :

16

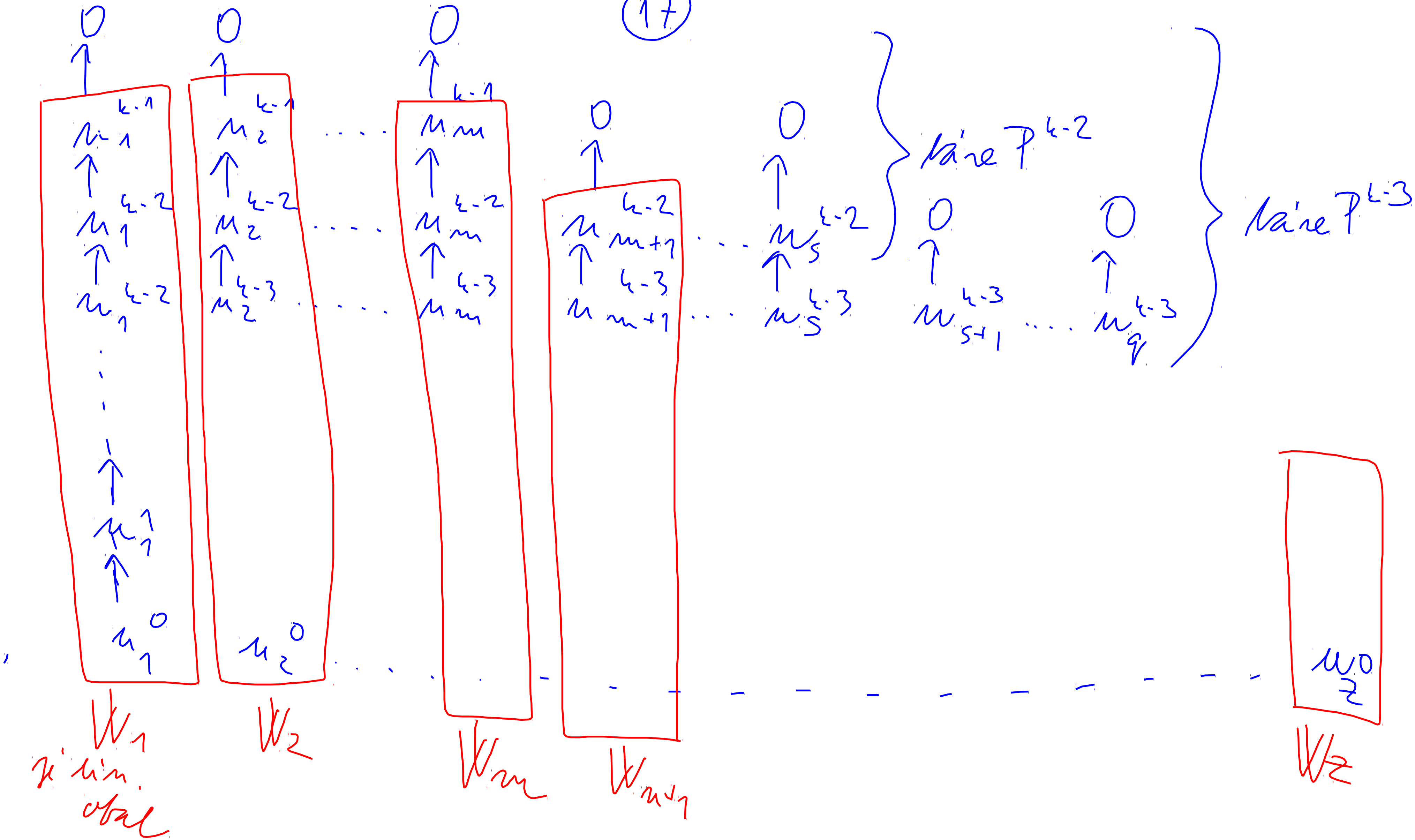
$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & & 0 \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
u_1^{k-1} & u_2^{k-1} & \cdots & u_m^{k-1} \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
u_1^{k-2} & u_2^{k-2} & & u_m^{k-2} \quad \tilde{u}_{m+1}^{k-2} \ \cdots \ \tilde{u}_s^{k-2}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \uparrow\\ u\\ \uparrow\\ u\end{array}}\right\} \text{báze } P^{k-2}$$

$$\psi\left(\tilde{u}_{m+1}^{k-2}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{k-1}$$

$\tilde{u}_{m+1}^{k-2}$ změníme na $u_{m+1}^{k-2} = \tilde{u}_{m+1}^{k-2} - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^{k-2}$

$$\psi\left(u_{m+1}^{k-2}\right) = \psi\left(\tilde{u}_{m+1}^{k-1}\right) - \sum a_i \psi\left(u_i^{k-2}\right)$$

$$= \sum a_i u_i^{k-1} - \sum a_i u_i^{k-1} = 0$$


0
u_1^{k-1}
u_1^{k-2}
u_1^{k-2}
u_1^{1}
u_1^{0}
u_2^{k-1}
u_2^{k-2}
u_2^{k-3}
u_2^{0}
u_m^{k-1}
u_m^{k-2}
u_m^{k-3}
u_{m+1}^{k-2}
u_{m+1}^{k-3}
u_s^{k-2}
u_s^{k-3}
u_{s+1}^{k-3}
u_q^{k-3}
u_z^{0}
P^{k-2}
P^{k-3}
W_1
W_2
W_m
W_{m+1}
W_z

Vezmeme bázi prostoru V složenou z bází prostorů $W_1, W_2, \ldots, W_z$. Potom matice φ v této bázi je

$$\begin{array}{c} W_1 \\ \\ \\ \\ W_2 \\ \\ \\ \vdots \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & \cdot & \vdots & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

Matice je v Jord. kan. tvaru s buňkami pro vl. čísla 0.

Každému W_i odpovídá jedna buňka.

Aplikujeme na $(\varphi - \lambda_i id)/R_{\lambda_i} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$
Existuje báze, že

$(\varphi - \lambda_i \, id)_{\alpha,\alpha}$ je matice v JKT s buňkami pro vl. číslo 0.

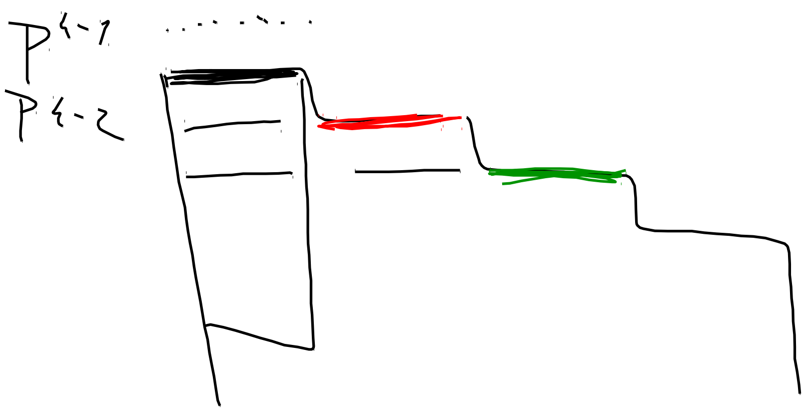
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi - \lambda_i \, id)_{\alpha,\alpha} + \lambda_i (id)_{\alpha\alpha} = (\varphi - \lambda_i \, id)_{\alpha,\alpha} + \lambda_i E$$

Tedy je matice v JKT s buňkami pro vl. číslo λ_i.
Jestliže báze jednotlivých R_{λ_i} poskládáme dohromady, dostaneme bázi celého U a v této bázi bude matice φ v JKT.

Rekapitulace :

$$U = \overbrace{R_{\lambda_1}}^{\underbrace{W_1^{\lambda_1} \oplus W_2^{\lambda_1} \oplus \dots W_{k_1}^{\lambda_1}}_{(\varphi - \lambda_1 id) \text{ je cyklický na } W_i^{\lambda_1}}} \oplus \overbrace{R_{\lambda_2}}^{\underbrace{W_1^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus W_{k_2}^{\lambda_2}}_{(\varphi - \lambda_2 id) \text{ je cyklický na } W_i^{\lambda_2}}} \oplus \dots \oplus \overbrace{R_{\lambda_r}}^{W_1^{\lambda_r} \oplus \dots \oplus W_{k_r}^{\lambda_r}}$$

. . . . .



rozdíl největších čísel dává dim P_φ^{k-1}

rozdíl o 1 menších čísel dává dim P^{k-1} a P^{k-2}

Počet buněk velikosti $k \quad = \quad \dim P^{k-1}$

Počet buněk velikosti $k-1 \quad = \quad \dim P^{k-2} - 2\dim P^{k-1}$

$k-2 \quad = \quad \dim P^{k-3} - 2\dim P^{k-2} + \dim P^{k-1}$

dále stejně