Interaktivní osnova – poslední kapitola

Požadavky ke zkoušce – tam je vše.

AFINNÍ GEOMETRIE

Definice: Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Podmnožina $M \subseteq U$ se nazývá afinní podprostor, je-li neprázdná a tvaru

$$M = P + V, = \{P + v \in U;\ v \in V\}$$

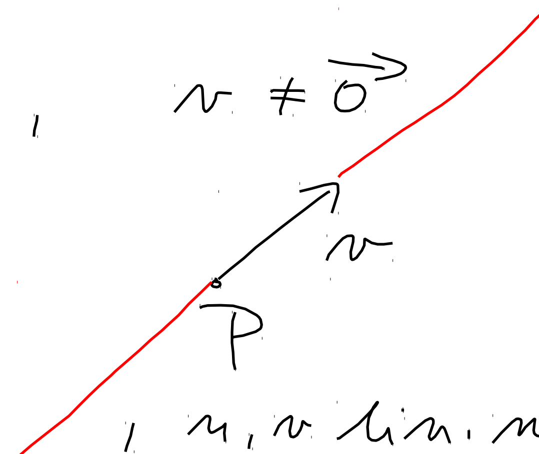
kde $P \in U$ a $V \subseteq U$ je vekt. podprostor.

Příklady:

1. $M = \{P\}$ pro $V = \{\vec{o}\}$

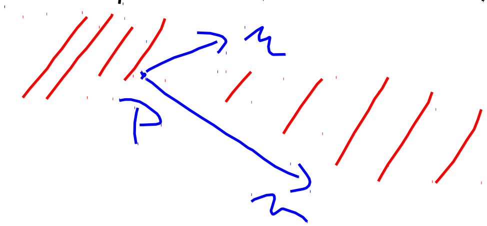
2. přímky $M = P + [v]$, $v \neq \vec{o}$

   $M = P + tv$



3. roviny $M = P + [u, v]$, u, v lin. nezávislé

   $M = P + tu + sv$



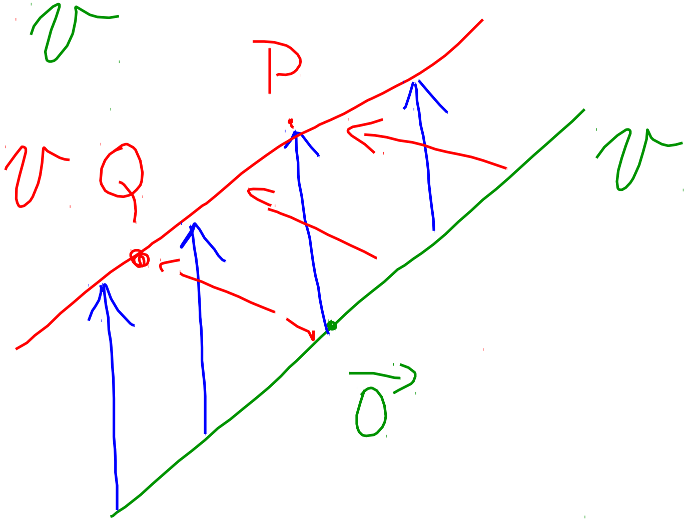
③

Afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$: všechny body
všechny přímky
$\mathbb{R}^2$

Afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$: všechny body
všechny přímky
— " — roviny
$\mathbb{R}^3$

$m = P + V$

$= Q + V$



Vekt. podprostor V v definici afinního podprostoru je určen jednoznačně, na rozdíl od bodu.

Důkaz: Nechť

$$\left.\begin{aligned}
P_1 + V_1 &= m = P_2 + V_2 \\
P_1 &= P_2 + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ V_2}}{v_2} \\
P_1 + v_1 &= P_2 + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ V_2}}{u_2} \\
v_1 = P_2 - P_1 + u_2 &= v_2 + u_2 \in V_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 \subseteq V_2$$

analogicky $V_2 \subseteq V_1$

<u>Definice</u>: Vekt. podprostor v definici afinního podprostoru

$$\mathcal{M} = P + V$$

nazýváme zaměření af. podprostoru a označujeme

$$Z(\mathcal{M}) = V.$$

$$\dim \mathcal{M} = \dim Z(\mathcal{M})$$

Afinní kombinace bodů P a $Q \in U$ je bod

$$tP + (1-t)Q \quad \text{pro } t \in K.$$

$$= Q + t(P-Q)$$

Afinní kombinace bodů $Q_0, Q_1, \ldots Q_k$ je

$$\sum_{i=0}^{k} t_i Q_i \quad , \text{ kde } \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 .$$

$P = Q$ pak $\quad tP + (1-t)Q = P = Q \quad$ bod

Jestliže $P \neq Q$ tak body $\quad tP + (1-t)Q = Q + t(P-Q)$

vyplní přímku procházející body P a Q.

Vrcholy $\sum_{i=0}^{k} t_i Q_i$, kde $\sum t_i = 1$ a $t_i \geq 0$ se nazývá

konvexní kombinace bodů $Q_0, \ldots Q_k$ a tyto kombinace

vyplní konv. obal bodů $Q_0, \ldots, Q_k$.

Věta: Afinní podprostor obsahuje s každými body $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ i všechny jejich afinní kombinace.

Speciálně: s každými dvěma různými body obsahuje i přímku, kterou určují.

Důkaz: $\mathcal{M} = P + V$

$$\mathcal{M} \ni Q_i = P + v_i$$

$$\sum t_i Q_i = \sum t_i (P + v_i) = \overbrace{\left(\sum t_i\right)}^{1} P + \sum t_i v_i$$

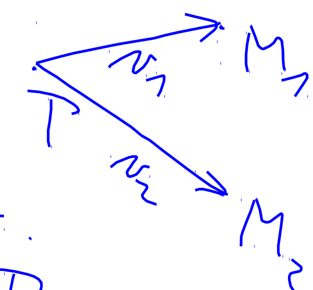
$$= P + \sum t_i v_i \in P + V$$

Platí i obrácené tvrzení:

Věta: Je-li $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ neprázdná a s každými dvěma různými body obsahuje i přímku jimi určenou, pak je to afinní podprostor.

Důkaz: Vezmeme nějaký bod $P \in \mathcal{M}$ a definujme

$V = \{ M - P \in \mathcal{U},\ M \in \mathcal{M} \}$



Zřejmě platí $\mathcal{M} = P + V$.

Stačí dokázat, že V je vektorový podprostor.

$\vec{o} \in V$, nechť v_1 a $v_2 \in V$. $v_1 = M_1 - P$, $v_2 = M_2 - P$

Chceme ukázat, že $v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$

$$v_1 + v_2 = M_1 - P + M_2 - P = (M_1 + M_2 - P) - P =$$

$$= \underbrace{\Big\{ \underbrace{2\left(\tfrac{1}{2} M_1 + \tfrac{1}{2} M_2\right)}_{\in \mathcal{M}} - P \Big\}}_{\in \mathcal{M}} - P \in \mathcal{V}$$

$a \in \mathbb{K}$

$$a v_1 = a(M_1 - P) = \underbrace{\{ a M_1 + (1-a) P \}}_{\in \mathcal{M}} - P \in \mathcal{V}$$

Dvě ekvivalentní definice afinního podprostoru:

(1) $\mathcal{M} = P + V$, kde V je podprostor

(2) $\mathcal{M}$ zachovává afinní kombinace bodů

$\forall t \in \mathbb{K}, \forall P, Q \in \mathcal{M} \quad tP + (1-t)Q \in \mathcal{M}$

---

2 možné zápisy afinních podprostorů

Parametricky je dán tím, že známe bázi zaměření $\mathcal{M} = P + V$ a V má bázi $v_1, v_2, \ldots, v_k$, pak každý bod $M \in \mathcal{M}$

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_k v_k.$$

Implicitní popis řešení soustavy rovnic

Vezmeme v U nějakou pevnou bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a označme $x_1, x_2, \dots, x_n$ souřadnice vektoru v této bázi. Pak každá množina (je-li neprázdná) tvaru

$$M = \{ u \in U ; \text{ souřadnice } u \text{ splňují soustavu } Ax = b \}$$

kde A je matice typu $k \times n$, je afinní podprostor.

$$R(A, b) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ Ax = b \}$$

Kdy má $Ax = b$ řešení? Právě když $h(A) = h(A|b)$

Frobeniova věta.

Nechť $\bar{x}$ je nějaké řešení $Ax = b$. Pak

$$R(A,b) = \bar{x} + \underbrace{R(A,0)}_{\text{kde je vekt. podprostor}}$$

Závěr: Je-li $h(A) = h(A|b)$ je $R(A|b)$ afinní podprostor v $\mathbb{R}^n$

Popis afinního podprostoru v $\mathbb{R}^n$ jako řešení rovnic $Ax = b$ se nazývá implicitní popis af. podprostoru.

Přechod od implicitního zápisu k parametrickému je jednoduchý: Soustavu vyřešíme pomocí parametrů.

Příklad: $Ax = b$

Řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 + s - 2t,\ 3 - s - t,\ 4 + 8t,\ 2 - 6s)$

$$M = P + su + tv = \underset{P}{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}} + s \underset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}} + t \underset{v}{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cesta od parametrického popisu k implicitnímu:

$$x_1 = c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots + c_{1k} t_k + m_1$$
$$x_2 = c_{21} t_1 + c_{22} t_2 + \dots + c_{2k} t_k + m_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n =$$

$$P = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} \dots\dots$$

$$x = Ct + m$$

C je tvaru $n \times k$

t je sloupec velikosti k

x, m je sloupec velikosti n

$$Ex = Ct + m$$

jednotková matice

$$\left(E \mid C \mid m \right) \xrightarrow{\text{el. řádk. operace}} \text{tak, aby } C \text{ bylo ve schod. tvaru}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ \hline A & 0 & b \end{array} \right)$$

C_1 je ve schod. tvaru bez nulového řádku

15

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} A_1 x = C_1 t + b_1 \\ A x = b \end{matrix}$$

Je-li x bod z afinního podprostoru popsaného parametricky, splňuje rovnici

$$A x = b$$

Obráceně: Jestliže x splňuje $Ax = b$, pak existuje $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$, které je řešením rovnice

$$C_1 t = A_1 x - b_1$$

Tedy pro tato x a t platí

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$A \; x = b$$

což je ovšem ekvivalentní s

$$E x = C t + m$$

$$x = C t + m$$

Tedy x splňuje parametrický popis.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

$\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ dva afinní podprostory v U

(a) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$

neprázdná

(b) • $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

• neplatí předchozí výrok

Vzájemná poloha

1. $m \subseteq n$ právě když $m \cap n \neq \emptyset$

   $$Z(m) \subseteq Z(n)$$

2. m a n jsou rovnoběžné $m \cap n = \emptyset$

   $$Z(m) \subseteq Z(n) \text{ nebo } Z(n) \subseteq Z(m)$$

3. m a n jsou mimoběžné $m \cap n \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} Z(m) \cap Z(n) \neq Z(m) \\ Z(m) \cap Z(n) \neq Z(n) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Z(m) \nsubseteq Z(n) \\ \text{ani } Z(n) \nsubseteq Z(m) \end{array}$$

4 m a n jsou mimoběžné $\quad m \cap n = \emptyset$

$Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

Příklad 1 $\quad \mathbb{R}^3$ dvě přímky

$p: (0,0,0) + t(1,0,0)$

$q: (0,0,1) + t(0,1,0) \qquad p \cap q = \emptyset$

$Z(p) = [(1,0,0)] \qquad Z(p) \not\subseteq Z(q)$

$Z(q) = [(0,1,0)] \qquad Z(q) \not\subseteq Z(p)$

Příklad 2 $\quad \mathbb{R}^4$ dvě roviny

$\pi: (0,0,0,0) + [(1,0,0,0), (0,1,0,0)] \qquad \pi \cap \rho = \emptyset$

$\rho: (0,0,0,1) + [(0,1,0,0), (0,0,1,0)] \qquad Z(\pi) \cap Z(\rho) = [(0,1,0,0)]$

Průnik afinních podprostorů

Jsou-li M a N afinní podprostory a $M \cap N \neq \emptyset$, pak $M \cap N$ je afinní podprostor.

Výpočet: 1. M a N zadány implicitně

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ Cx = d \end{array}\right\} \text{popis } M \cap N$$

2. M zadaná implicitně a N zadaná parametricky

Parametrický popis dosadíme do rovnic a spočítáme parametry pro průnik

3. Oba podprostory parametricky

$$x = Ct + m$$
$$x = Cs + n$$

Soustava

$$Cs - Ct = m - n$$

Vyřešíme, dostaneme t

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ x = Ct + m, \text{ kde za } t \text{ dosadíme spočítané řešení} \}$$

Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ označujeme $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ a je to nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Pozn.

$$\mathcal{M} = P + Z(\mathcal{M})$$
$$\mathcal{N} = Q + Z(\mathcal{N})$$
$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = P + \left(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [P - Q] \right)$$