Ukázka příkladu z afinní geometrie

V $\mathbb{R}^4$ zadán bod A, přímka p a rovina ρ.

Máme najít přímku q s těmito vlastnostmi

1) $A \in q$
2) $p \cap q \neq \emptyset$
3) $\rho \cap q \neq \emptyset$

Řešení: q leží v rovině určené bodem A a přímkou p

$\alpha = \{A\} \sqcup p$. Dále $q \cap \rho \subseteq \alpha \cap \rho$

(2)

Průsečík $q \cap \rho$ najdeme jako průsečík

$$\alpha \cap \rho.$$

Při „obecné poloze" zadaných podprostorů A, λ, ρ je průsečík $\alpha \cap \rho$ jednobodový a úloha má jediné řešení.

Bilineární formy

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Lineární zobrazení

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

se nazývá lineární forma. Všechny lineární formy na U tvoří vektorový prostor, který se nazývá duální vekt. prostor k prostoru U a označuje se U^*.

Bilineární forma na vekt. prostoru U je zobrazení

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (u,v) \longmapsto f(u,v)$$

které je lineární v první i druhé složce

$$f(au_1+bu_2,v) = af(u_1,v)+bf(u_2,v)$$
$$f(u,av_1+bv_2) = af(u,v_1)+bf(u,v_2)$$

Příklady:

1. na $\mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) =$

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$= a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2$$

je bilineární forma

y pevné $\quad f(x,y) = (a y_1 + b y_2) x_1 + (c y_1 + d y_2) x_2$

x pevné $\quad f(x,y) = (a x_1 + c x_2) y_1 + (b x_1 + d x_2) y_2$

2. na $\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$ $\quad f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x_i \right) y_j$$

$$= \left(\sum_i x_i a_{i1}, \sum_i x_i a_{i2}, \ldots \sum_i x_i a_{in} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Toto je typický příklad bilin. formy!

3 $U = \mathbb{R}_n[x] \qquad f : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p, q) = p(0) \cdot q'(1) - p'(1) \cdot q(2)$$

4 $U = C[a,b]$, $F : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(f,g) = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

Matice A typu $n \times n$ zadává:

(1) lin. zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$

(2) bilin. formu: $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ $\quad f(x,y) = x^T A y$

V 1. semestru: $\varphi : U \to U$ a v U byla báze α

matici zobrazení φ v bázi α $\quad A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & U \arrow[d, "(\ )_\alpha"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Analogicky nyní každé bilin. formě na U s bazí α přiřadíme matici

$$
\begin{tikzcd}
 & (u,v) & & \\
 & U \times U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(\ )_\alpha \quad (\ )_\alpha"'] & \mathbb{K} \arrow[d, equal] & f(u,v) \\
(x,y) & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K} & f(u,v) \\
 & (x,y) \arrow[r, mapsto] & x^T A y & =
\end{tikzcd}
$$

Matice A bilin. formy $f : U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je matice s prvky

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

(8)

$u, v \in U \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \qquad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$f(u,v) = f\Big(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\Big) = \sum_i x_i f\Big(u_i, \sum_j y_j u_j\Big)$$

$$= \sum_i \Big(\sum_j x_i y_j f(u_i, u_j)\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i f(u_i, u_j) y_j =$$

příklad (2)

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

9

Jaký je vztah mezi maticemi téže bilin. formy v různých bazích?

$f: U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ bilineární forma

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ báze v U se souřadnicemi $(u)_\alpha = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\beta = (v_1, v_2, \dots v_n)$ báze v U se souřadnicemi $(u)_\beta = \overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$

$(v)_\alpha = y$

$(v)_\beta = \overline{y}$

Platí, že

$f(u,v) = x^T A y$ $\quad$ A je matice f v bázi α

$f(u,v) = \overline{x}^T B \overline{y}$ $\quad$ B je matice f v bázi β

10

Nechť P je matice přechodu $(id)_{\alpha,\beta}$

$$\boxed{(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\beta}(u)_\beta}$$

$$x = P\bar{x}, \quad y = P\bar{y}$$

$$\bar{x}^T B \bar{y} = f(u,v) = x^T A y = \underbrace{(P\bar{x})^T}_{\bar{x}^T P^T} A (P\bar{y}) =$$

$$= \bar{x}^T (P^T A P)\bar{y}$$

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{K}^n$ $\quad \bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P)\bar{y}$

Tvrdíme, že pak

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Volbou $\bar{x} = e_i$ a $\bar{y} = e_j$, dostaneme

$$e_i^T B e_j = B_{ij}, \text{ analogicky } e_i^T (P^T A P) e_j = (P^T A P)_{ij}$$

Věta: Nechť $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je bilineární forma s maticí A v bázi α a maticí B v bázi β. Pak

$$B = P^T A P$$

kde $P = (id)_{\alpha,\beta}$

V 1. semestru jsme dokázali:

Nechť $\varphi: U \to U$ je lineární zobrazení a nechť A je matice φ v bázi α a B je matice φ v bázi β $\left(A = (\varphi)_{\alpha,\alpha},\ B = (\varphi)_{\beta,\beta}\right)$.
Pak

$$B = P^{-1} A P,$$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \underbrace{(id)_{\beta,\alpha}}_{= (id)^{-1}_{\alpha,\beta}} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

kde $P = (id)_{\alpha,\beta}$

<u>Označení:</u>

$\varphi : U \to U$ lineární, matici φ v bázi α značíme

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

$f : U \times U \to \mathbb{K}$, pak má matici A v bázi α

nemáme žádné speciální označení

$$\cancel{(f)_{\alpha,\alpha}}$$

Zlatoš $[f]_{\alpha,\alpha}$

Symetrická bilin. forma je bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ s vlastností

$$\forall u, v \in U \qquad f(u, v) = f(v, u)$$

<u>Lemma</u> Bilin. forma $f : U \times U \to K$ je symetrická, právě když její matice A v bázi α je symetrická, tj.

$$A = A^T.$$

<u>Důkaz:</u> $\Rightarrow$ $\quad a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}.$

(14)

Řekneme si algoritmus, který pro danou (symetrickou) bilin. formu f najde bázi B, ve které je matice f diagonální. Tj v souřadnicích báze B je

$$f(u,v) = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + \dots + b_{nn}x_ny_n$$

$$= (x_1, x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Řádkové úpravy matic jsou dány násobením elem. maticemi zleva.

Sloupcové úpravy matic jsou dány násobením elem. maticemi zprava.

Vynásobení 2. řádku číslem c
2. sloupce číslem c

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & c & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Pro tuto matici platí $P = P^T$

Výměna 1. a 2. řádku
1. a 2. sloupce

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Opět $P = P^T$

(16)

K 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

K 2. sloupci přičteme c-násobek 1. sloupce

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Lemma</u> Jestliže elem. matice P provádí řádkovou úpravu, pak P^T provádí stejnou sloupcovou úpravu.

<u>Tvrzení</u>: Pomocí stejných řádkových a sloupcových úprav lze symetrickou matici A převést na diagonální matici B.

$$B = P_n^T (\ldots (P_2^T (P_1^T A P_1) P_2) \ldots) P_n$$

$$= (P_1 P_2 \ldots P_n)^T A (P_1 P_2 \ldots P_n)$$

$$= P^T A P$$

Místo důkazu uděláme příklad:

Nechť $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je bilineární, $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$

v bázi α má matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$f(u_1, u_2)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f(u_1+u_2, u_1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & u_1 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right)$$

K 1. řádku přičteme 2. řádek

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right)$$

2. sloupec k 1.

$\sim$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 10 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array} \underset{2}{\sim}$$

2. a 3. riadok vynásobíme 2

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 4 & 0 & 12 & 2u_2 \\ 20 & 12 & 0 & 2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array}$$

2. 3. stĺpec vynásobíme 2

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 20 & u_1+u_2 \\ 4 & 0 & 24 & 2u_2 \\ 20 & 24 & 0 & 2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & 2u_2 & 2u_3 & \end{array}$$

2. riadok - 1. r.

3. riadok - 5×1. r.

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 20 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & u_2-u_1 \\ 0 & 4 & -100 & 2u_3-5u_1-5u_2 \\ \hline & & & \end{array}$$

Točení ve sloupci

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & u_2-u_1 \\ 0 & 4 & -100 & 2u_3-5u_1-5u_2 \\ \hline u_1+u_2 & u_2-u_1 & 2u_3-5u_1-5u_2 & \end{array}\right) \quad 3.ř + 2.ř. \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & u_2-u_1 \\ 0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2-u_1 & 2u_3-5u_1-5u_2 & \end{array}\right)$$

točení na řádce

$\sim$

21

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 0 & -u_1+u_2 \\ 0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & -u_1+u_2 & -6u_1-4u_2+2u_3 & \end{array}\right)$$

Máme nyní matici B

B je matice lin. formy f v bázi

$$B = (u_1+u_2,\ -u_1+u_2,\ -6u_1-4u_2+2u_3)$$

$u_1 = (1, 0, 0)$

$u_2 = (0, 1, 0)$

$u_3 = (0, 0, 1)$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = P^T$$

(22)

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \dots \qquad \begin{array}{c|c} P^T A P = B & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

$$P = (\mathrm{id})_{\alpha,\beta}$$