BILINEÁRNÍ FORMY

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ je bilin. forma

$$f(au_1 + bu_2, v) = a\, f(u_1, v) + b\, f(u_2, v)$$

a analogicky v druhé proměnné

Symetrické formy $\quad f(u,v) = f(v,u)$

Je-li α báze v U, pak f je jednoznačně určena maticí bilin. formy v bázi α

$$A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

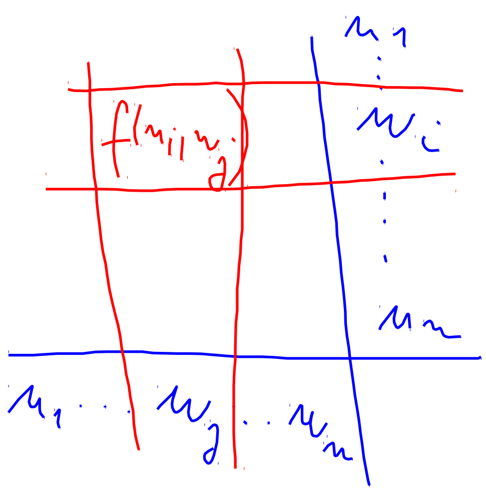
Pak

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, y_j = x^T A\, y$$

kde $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Algoritmus

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$$



řádk. úprava

1. řádek přičteme k i-tému

$f(u_1, u_j)$ $\quad u_1$

$$\underbrace{f(u_1, u_j) + f(u_i, u_j)}_{f(u_1 + u_i,\, u_j)}$$

u_j $\quad u_1 + u_i$

Nyní vezmeme nyní bilin. formu f s maticí $A = (A_{ij})$ v bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$

$$\begin{array}{c|c} A_{ij} & u_i \\ \hline u_j & \end{array}$$

a provádíme stejné řádkové a sloupcové úpravy. Při těchto úpravách lze dosáhnout toho, že matice bude diagonální

$$\sim \begin{array}{c|c} \begin{matrix} B_{11} & & 0 \\ & B_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & B_{nn} \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \hline v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n & \end{array}$$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je nová báze v U a matice f v této bázi je B

<u>Věta:</u> Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ existuje báze B taková, že v jejích souřadnicích je

$$f(u,v) = B_{11}x_1y_1 + B_{22}x_2y_2 + \dots + B_{nn}x_ny_n$$

KVADRATICKÉ FORMY

Sym. bilin. forma $\quad f(u,v) = f(v,u)$

Antisym. bilin. forma $\quad f(u,v) = -f(v,u)$

Jsme-li nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ pak pro antisym. bilin. formu platí

$$f(u,u) = -f(u,u) \Rightarrow 2f(u,u) = 0$$

$$f(u,u) = 0$$

Každá bilin. forma je součet symetrické a antisym. bilin. formy:

$$f(u,v) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(u,v) + f(v,u)\right)}_{g(u,v)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(u,v) - f(v,u)\right)}_{h(u,v)}$$

g je symetrická

h je antisymetrická

$$h(u,v) = f(u,v) - f(v,u) = -\left(f(v,u) - f(u,v)\right) = -h(v,u)$$

$f : U \times U \to \mathbb{K}$ bilin. forma (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$)

$f = g + h$ $\quad$ g symetrická bilin. forma

h antisym. bilin. forma

$$f(u,u) = g(u,u) + \underbrace{h(u,u)}_{0} = g(u,u)$$

Kvadratická forma je zobrazení $q : U \to \mathbb{K}$ takové, že existuje sym. bilin. forma $g : U \times U \to \mathbb{K}$ a

$$q(u) = g(u,u).$$

Věta: Ke každé kvadratické formě $q : U \to \mathbb{K}$ existuje právě jedna symetrická bilin. forma g, která ji definuje, tj.

$$q(u) = g(u,u).$$

Důkaz: Jestliže platí $q(u) = g(u,u)$, pak lze spočítat $g(u,v)$ takto:

$$\underbrace{g(u+v,u+v)}_{q(u+v)} = g(u,u) + g(u,v) + g(v,u) + g(v,v)$$

$$= \underbrace{g(u,u)}_{q(u)} + 2g(u,v) + \underbrace{g(v,v)}_{q(v)}$$

Tedy

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(q(u+v) - q(u) - q(v)\Big)$$

Příklady: $q(x) = 2x_1^2 + \underline{7x_1x_2} + x_2^2 - \underline{3x_2x_3}$

$$g(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{7}{2}x_1y_2 + \frac{7}{2}x_2y_1 - \frac{3}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_2$$

$$g(x,x) = 2x_1x_1 + x_2x_2 + \underbrace{\frac{7}{2}x_1x_2 + \frac{7}{2}x_2x_1}\ \underbrace{- \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_2}$$

$$= q(x)$$

Obecný tvar kvadr. formy na $\mathbb{R}^n$ je

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j \quad \text{kde } (a_{ij}) \text{ je symetrická matice}$$

$$= x^T A x \qquad\qquad (a_{ij}) = A$$

Matice kvadr. formy v bázi α je matice příslušné symetrické bilin. formy v bázi α.

Základní úlohou je pro danou kvadr. formu najít bázi B, v níž je matice kvadr. formy diagonální. To v souřadnicích báze B znamená, že kvadr. formu lze psát takto:

$$q(u) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2$$

kde $(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Takovou bázi nazýváme polární bází. Polárních bází je „spousta".

Jeden způsob hledání polární báze již známe, je to stejné řádk. a sloup. úpravy příslušné sym. matice.

Další způsob je tzv. úprava na čtverce. (Známá z řešení kvadr. rovnic.)

(11)

Úprava na čtverce

f kvadr. forma, která v bázi α má vyjádření

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n + a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + \dots$$

(1) předpokládejme, že $a_{11} \neq 0$

$$= a_{11} \left(x_1^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2 + 2 \frac{a_{13}}{a_{11}} x_1 x_3 + \dots + 2 \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_1 x_n \right) + h(x_2, \dots x_n)$$

$$= a_{11} \left\{ \left(\qquad \right)^2 + g(x_2, \dots x_n) \right\} + h(x_2, \dots x_n)$$

$$(y_1+y_2+\dots+y_n)^2 = (y_1+y_2+\dots+y_n)(y_1+y_2+\dots+y_n) =$$

$$= y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2+2y_1y_2+2y_1y_3+\dots\dots\dots$$

$$= \underbrace{y_1^2+2y_1y_2+\dots+2y_1y_n}+y_2^2+\dots+y_n^2+2y_2y_3+\dots\dots$$

$$\Downarrow$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$y_1^2+2y_1y_2+\dots+2y_1y_n = (y_1+y_2+y_3+\dots+y_n)^2 - g(y_2,y_3,\dots,y_n)$$

Toto budeme aplikovat na naši kvadr. formu

Pokračování ze strany 11

$$= a_{11}\left\{\underbrace{\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\dots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)}_{y_1}^2-\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2\ \dots-\frac{a_{1n}^2}{a_{11}^2}x_n^2\right.$$

$$\left.-2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}^2}x_2x_3-2\frac{a_{12}a_{14}}{a_{11}^2}x_2x_4-\dots-2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}^2}x_{n-1}x_n\right\}$$

$$+h(x_2,\dots x_n)=a_{11}y_1^2+q(x_2,x_3,\dots x_n),$$

kde q je kvadr. forma. S touto formou provedeme stejnou úvahu, jenom místo x_1 budeme pracovat s nějakým x_i, $i>1$.

Jestliže $a_{11}=0$, ale nějaké $a_{ii}\neq 0$, pracujeme s x_i na místě x_1. Jestliže $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=0$, pak nalezneme $a_{ij}\neq 0$.

Provedeme substituci:

$$y_i = x_i \qquad\qquad y_k = x_k \text{ pro } k\neq i,j$$

$$y_j = x_j - x_i \Rightarrow x_j = y_j + y_i$$

$$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}y_i(y_j+y_i) = 2a_{ij}y_iy_j + 2a_{ij}y_i^2$$

V souřadnicích y má kvadr. forma u y_i^2 nenulový koeficient, můžeme použít předchozí postup na y_i.

15

Příklad

matice je $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - x_1 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

$$f(y) = 4y_1(y_1+y_2) + 8y_1y_3 + 12(y_1+y_2)y_3 =$$

$$= 4y_1^2 + 4y_1y_2 + \underbrace{8y_1y_3 + 12y_1y_3}_{20y_1y_3} + 12y_2y_3$$

$$= 4\left(y_1^2 + y_1y_2 + 5y_1y_3\right) + 12y_2y_3$$

$$= 4\left\{\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \frac{y_2^2}{4} - \frac{25}{4}y_3^2 - \frac{5}{2}y_2y_3\right\} + 12y_2y_3$$

$$= 4\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2} y_3\right)^2 - y_2^2 - 25 y_3^2 - 10 y_2 y_3 + 12 y_2 y_3$$

$$= 4\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2} y_3\right)^2 - \left(y_2^2 - 2 y_2 y_3\right) - 25 y_3^2 =$$

$$= 4\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2} y_3\right)^2 - \left\{\left(y_2 - y_3\right)^2 - y_3^2\right\} - 25 y_3^2 =$$

$$= 4\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2} y_3\right)^2 - \left(y_2 - y_3\right)^2 - 24 y_3^2 = 4 z_1^2 - z_2^2 - 24 z_3^2$$

$$z_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{5}{2} y_3 = x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{5}{2} x_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{5}{2} x_3$$

$$z_2 = y_2 - y_3 = x_2 - x_1 - x_3 = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$z_3 = y_3 = x_3 = x_3$$

Začali jsme s bází α v níž máme souřadnice x.

Dostali jsme nové souřadnice z a zajímá nás báze β pro tyto souřadnice:

$$(u)_\beta = z = Px = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P(u)_\alpha$$

$$P = (id)_{\beta,\alpha} \qquad \alpha = (u_1, u_2 \dots u_n) \qquad \beta = (v_1, v_2, \dots v_n)$$

$$(u_1, u_2, \dots u_n) = (v_1, v_2, \dots v_n)(id)_{\beta,\alpha}$$

Bázi β tedy dostaneme pomocí inverzní matice:

$$\beta = (v_1, v_2, \ldots v_n) = (u_1, u_2, \ldots u_n) \left(id \right)^{-1}_{\beta, \alpha} = (u_1, \ldots u_n) P^{-1}.$$

Při výpočtu na cvičení musíme si však místo nové báze spočítat P^{-1}. V metodě stejných řádků a sloupců výpočtem dostaneme novou bázi přímo.