Lineární operátory, vlastní čísla a vlastní vektory

Lineární operátor (= lineární endomorfismus = lineární transformace) je lineární zobrazení $\varphi : U \to U$.

Určitě platí $\varphi(U) \subseteq U$, $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$.

Invariantní podprostor $V \subseteq U$ operátorem φ je takový podprostor, na který platí $\varphi(V) \subseteq V$.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Podprostor $V = \left[\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right]$ je invariantní

$$\varphi(u_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix}=u_1+2u_2\in V \qquad \varphi(u_2)=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=-2u_1+u_2\in V$$

$$\varphi(au_1+bu_2)=a\underset{\underset{V}{\cap}}{\varphi(u_1)}+b\underset{\underset{V}{\cap}}{\varphi(u_2)}\in V$$

Matice lin. operátoru $\varphi: U\to U$ v bázi $\alpha=(u_1,u_2,\dots,u_n)$

je matice $\quad (\varphi)_{\alpha,\alpha}=\left((\varphi(u_1))_\alpha,(\varphi(u_2))_\alpha,\dots,(\varphi(u_n))_\alpha\right)$

Vraťme se k příkladu: $\quad \varepsilon=(e_1,e_2,e_3,e_4)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}=A$$

Spočítáme matici φ v bázi $\beta=(u_1,u_2,e_3,e_4)$

$\varphi(u_1)=u_1+2u_2,\quad \varphi(u_2)=-2u_1+u_2,\quad \varphi(e_3)=u_1+4e_3-e_4,\quad \varphi(e_4)=-3u_1+2u_2+e_3+4e_4$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

nulový blok – souvisí s inv. podprostorem V

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi : U \to U$, $V \subseteq U$ invariantní podprostor, α báze prostoru U, která vznikne doplněním báze prostoru V.

Potom
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ \dim V \\ \end{matrix}$$
$$\underbrace{}_{\dim V}$$

④

Důkaz plyne z definice matice lin. operátoru:

$$\alpha = (\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{báze } V}, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

(V je invariantní)

$$\varphi(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{k1}u_k$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_k) = a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + \dots + a_{kk}u_k$$

$$\varphi(u_{k+1}) = a_{1k+1}u_1 + \dots \dots + a_{kk+1}u_k + a_{k+1k+1}u_{k+1} + \dots + a_{kn}u_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \vdots \\
a_{21} & & a_{1k} & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & & a_{kk} & a_{kk+1} & \vdots \\
\hline
0 & & 0 & & \vdots \\
0 & & 0 & a_{k+1k+1} & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & 0 & a_{nk} & \vdots
\end{array}\right)$$

Pokračování v příkladu s maticí A

Vezmeme ještě jeden invariantní podprostor

$$W = \left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_3 & u_4 \end{array} \right] \qquad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4u_3 - u_4 \in W$$

$$\varphi(u_4) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = u_3 + 4u_4 \in W$$

Vezmeme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

2 nulové bloky

V a W jsou invariantní podprostory

$$V \oplus W = \mathbb{R}^4$$

6

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$, $U = V \oplus W$ a V, W jsou invariantní podprostory. Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze takovámi, že $(u_1, \dots, u_k)$ je báze V a $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze W. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, k \\ \end{array} \\ \underbrace{}_{k} & \end{array}$$

Důkaz je úplně stejný jako v předchozím případě.

$u_i \in V \qquad \varphi(u_i) = a_{1i} u_1 + \dots + a_{ki} u_k$

$u_j \in W \qquad \varphi(u_j) = \qquad a_{k+1\,j} u_{k+1} + \dots + a_{nj} u_n$

Jak vypadají 1-rozměrné invariantní podprostory?

$\varphi: U \to U$, $V = [u]$, $u \neq \vec{o}$

Je-li V invariantní, pak

$$\varphi(u) \in V \implies \varphi(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Pro další vektory $au \in V$ platí

$$\varphi(au) = a\,\varphi(u) = a\lambda u = \lambda(au)$$

Na jednorozměrném invariantním podprostoru působí φ jako násobení konstantou.

Vektor $u \neq \vec{o}$ nazýváme vlastní vektor operátoru φ, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že $\varphi(u) = \lambda u$.

Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru φ, jestliže existuje $u \neq \vec{o}$ takové, že $\varphi(u) = \lambda u$.

Podmínka nenulovosti vektoru u je podstatná, neboť pro nulový vektor a všechna λ platí

$$\varphi(\vec{o}) = \vec{o} = \lambda \cdot \vec{o}.$$

Výpočet vlastních čísel

Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor. Nechť α je nějaká báze v U. Následující tvrzení jsou pro $\lambda \in \mathbb{K}$ ekvivalentní:

- $\exists u \neq \vec{o} \quad \varphi(u) = \lambda u$
- $\exists u \neq \vec{o} \quad \varphi(u) - \lambda u = \vec{o}$
- $\exists u \neq \vec{o} \quad (\varphi - \lambda\, id)\, u = \vec{o}$
- $\exists u \neq \vec{o} \quad (\varphi - \lambda\, id)_{\alpha,\alpha}\, (u)_\alpha = 0$
- $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda\, (id)_{\alpha,\alpha}\right) x = 0$
- $\exists x \neq \vec{o} \quad \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) x = 0$

$\dim U = n$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

- $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = 0$

Čemu se rovná $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$?

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ + další členy, kde se λ vyskytuje nejvýše v $(n-1)$-ní mocnině

$$= (-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

$p_0 = \det A$

Charakteristický polynom matice A je (A čtverc. $n\times n$)

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots p_1\lambda + p_0$$

Lemma: Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.

Důkaz: $B = P^{-1}AP$

$$\det(B-\lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda \underbrace{P^{-1}EP}_{E}) =$$

$$= \det\{P^{-1}(A-\lambda E)P\} = \det P^{-1}\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det P =$$

$$= \frac{1}{\det P}\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det P = \det(A-\lambda E)$$

Definice Charakteristický polynom lin. operátoru $\varphi: U\to U$ je charakteristický polynom jeho matice v kterékoliv bázi.

(11)

jestliže $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$, $B = (\varphi)_{\beta,\beta}$ pak B a A jsou podobné, neboť

$$B = (\varphi)_{\beta,\beta} = (id)^{-1}_{\alpha,\beta} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta} = P^{-1} A P.$$

Proto $\det(B - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$.

Věta: Vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$ jsou kořeny jeho charakteristického polynomu.

Jak najdeme k vlastnímu číslu λ příslušný vlastní vektor?

Jednoduše. Řešíme homogenní soustavu lin. rovnic, která je určena rovnicí v U

$$(\varphi - \lambda\, id)\, u = 0$$

Tato rovnice je ekvivalentní soustavě v $\mathbb{K}^n$ $\left(\dim_{\mathbb{K}} U = n\right)$ pokud počítáme v souřadnicích báze α

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)(u)_\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Vlastní vektory pro vlastní číslo λ jsou nenulové prvky vektorového podprostoru

$$\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id).$$

Podprostor $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id)$ nazýváme vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ. Na tomto podprostoru je

$$\forall u \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id) \qquad \varphi(u) = \lambda u$$

Něco málo o kořenech polynomů

Polynom s koeficienty v $\mathbb{K}$ je

$$p(\lambda) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0$$

Stupeň polynomu je nejvyšší mocnina s nenulovým koeficientem $p_n \neq 0$ $\quad \operatorname{st} p = n$

stupeň nulového polynomu buď nedefinujeme nebo ho položíme rovno $-\infty$.

Pro polynomy p a q nenulové platí

$$\operatorname{st}(p\cdot q) = \operatorname{st} p + \operatorname{st} q$$

Kořen polynomu $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ je kořen polynomu $p(\lambda)$, jestliže

$$p(\lambda_0) = 0$$

Věta: λ_0 je kořenem polynomu p právě když

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$$

kde q je polynom stupně $\operatorname{st} p - 1$.

Důkaz: $\Leftarrow$ Nechť $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)q(\lambda)$

Pak $p(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda_0)\, q(\lambda_0) = 0\cdot q(\lambda_0) = 0$.

$\Longrightarrow$ Nechť $p(\lambda_0) = 0$

$$p(\lambda) = p(\lambda) - p(\lambda_0) = p_n\lambda^n + \dots + p_1\lambda + \cancel{p_0} - p_n\lambda_0^n - \dots - p_1\lambda_0 - \cancel{p_0}$$

$$= p_n(\lambda^n - \lambda_0^n) + p_{n-1}(\lambda^{n-1} - \lambda_0^{n-1}) + \dots \; p_1(\lambda - \lambda_0) =$$

$$= p_n(\lambda - \lambda_0)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\lambda_0 + \dots + \lambda_0^{n-1}) + \dots\dots + p_1(\lambda - \lambda_0) =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$$

<u>Stupeň kořene λ_0</u> polynomu $p(\lambda)$ je roven číslu $k \in \mathbb{N}$ takové-mu, že

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k\, q(\lambda)$$

kde $q(\lambda_0) \neq 0$.

Hledání kořenů

Nechť $p(\lambda) = \pm \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0$,

kde $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0$ jsou celá čísla. Pak každý racionální kořen polynomu p je celé číslo, které dělí absolutní člen p_0.

Nechť je kořen λ_0 tvaru $\lambda_0 = \frac{a}{b}$, kde $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ a a, b jsou nesoudělná. Pak

$$\pm \left(\frac{a}{b}\right)^n + p_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots p_1\left(\frac{a}{b}\right) + p_0 = 0 \qquad \Big/ \cdot b^n$$

$$\pm a^n + p_{n-1} a^{n-1} b + \dots + p_1 a b^{n-1} + p_0 b^n = 0$$

$$\Rightarrow b \mid a^n \ \wedge \ a \mid p_0 b^n$$

a, b nesoudělné a $b \mid a^n \Rightarrow b = 1$

Potom dokážeme $a \mid p_0 b^n \Rightarrow a \mid p_0$.

Návod: Máme-li řešit polynomiální rovnici s celočíselnými koeficienty hledáme kořeny mezi děliteli koeficientu p_0.

Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla

Algebraická násobnost vlastního čísla je jeho násobnost jako kořene char. polynomu

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda) \qquad q(\lambda_0) \neq 0$$

alg. násobnost λ_0 je k.

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_0 je dimenze příslušného vlastního podprostoru:

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \, id)$$