VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$; $\varphi : U \to U$ lin. operátor

$\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo operátoru φ, jestliže existuje $u \neq \vec{O}$ takový, že

$$\varphi(u) = \lambda u \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(u) - \lambda u = O$$

u vlastní vektor, $u \in \ker(\varphi - \lambda\, id)$

$\ker(\varphi - \lambda\, id)$ vlastní podprostor operátoru φ příslušný vlastnímu číslu λ.

<u>Algebraická násobnost</u> vl. čísla = násobnost λ jako kořene charakt. polynomu $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = (-1)^n \lambda^n + \ldots$

<u>Geometrická násobnost</u> vl. čísla λ = $\dim \ker(\varphi - \lambda\, id)$

Věta: Obecně se algebraická a geometrická násobnost nerovnají. Vždy ale platí, že alg. násobnost $\geq$ geometrická násobnost.

Důkaz: Nechť λ_0 je vl. číslo. Vezmeme bázi $u_1, u_2, \dots u_k$ vlastního podprostoru $\ker(\varphi - \lambda_0 id)$ a rozšíříme ji na bázi $\alpha = (u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n)$ celého U. $\ker(\varphi - \lambda_0 id)$ je invariantní podprostor, neboť pro $u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id)$ platí

$$\varphi(u) = \lambda_0 u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id).$$

Pak podle minulé přednášky

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & & & 0 & \\ & \lambda_0 & & & \\ & & \ddots & & B \\ 0 & & & \lambda_0 & \\ \hline & & 0 & & C \end{array}\right)$$

Spočteme char. polynom.

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & & \\ & \ddots & & C \\ & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & 0 & & B-\lambda E \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det(B-\lambda E) = (\lambda_0-\lambda)^k \det(B-\lambda E)$$

Algebraická násobnost $\lambda_0 \geq k = \dim \ker(\varphi - \lambda\, id) =$ geom. násobnost.

Příklad 1 $\quad \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ char. polynom je $\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)^3$

Vl. číslo je 2 alg. násobnosti 3

Geom. násobnost vl. čísla 2

$$(A-2E)x = 0$$

$$0 \cdot x = 0$$

x je libovolný vektor z $\mathbb{R}^3$. $\ker(A-2E) = \mathbb{R}^3$

geom. násobnost je 3.

Příklad 2 $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Bx$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Char. polynom $\det(B-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

Alg. násobnost vl. čísla 2 je 3.

Řešíme rovnici

$$(B-2E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$
$x_2 = 0$
x_1 libovolné

$\ker(B-2E) = \left[e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

geom. násobnost vl. čísla 2 je 1.

<u>Spektrum</u> lin. operátoru je množina všech jeho vl. čísel.

Jestliže operátor působí na prostoru dimenze n, pak součet alg. násobností vl. čísel je $\leq n$, pokud jsme nad $\mathbb{R}$, a $= n$ nad $\mathbb{C}$.

Polynomiální rovnice stupně n má nad $\mathbb{C}$ právě n kořenů.

<u>Věta:</u> Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

<u>Důkaz indukcí:</u> Podle počtu vektorů.

Je-li u_1 vlastní vektor k λ_1, je u_1 podle definice $\neq \vec{O}$, je tedy lin. nezávislý.

Předp. že vektory $u_1, u_2, \ldots u_k$ vlastní s vl. čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ jsou LN.

Mějme navíc vl. vektor u_{k+1} s vl. číslem λ_{k+1}.

Nechť
$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i u_i = 0 \qquad (1)$$
Aplikací φ dostáváme
$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \varphi(u_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \lambda_i u_i = 0 \qquad (2)$$
Od (2) odečteme λ_{k+1}-násobek rovnice (1). Dostaneme
$$\sum_{i=1}^{k} a_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) u_i = 0$$
Ind. předpoklad říká, že $u_1, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé, proto
$$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = 0 \quad \text{pro všechna } i$$
Odtud $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Dosazením do (1) máme
$$a_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$
ale $u_{k+1} \neq \vec{o}$, proto $a_{k+1} = 0$. Dokázali jsme LN vektorů $u_1, \dots, u_{k+1}$.

Věta: Nechť $\dim U = n$ a $\varphi: U \to U$ je lin. operátor, který má v $\mathbb{K}$ n různých vlastních čísel. Pak vlastní vektory k vlastním číslům (ke každému vl. číslu jeden vektor) tvoří bázi α, ve které

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vl. čísla.

Důkaz: Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou příslušné vl. vektory. Podle předchozí věty jsou LN a protože $n = \dim U$, tvoří bázi prostoru U.

$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0\, u_n \implies$ 1. sloupec matice je $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Obdobně další sloupce.

Obecnější věta: Nechť $\dim U = n$ a $\varphi: U \to U$ je lin. operátor, který má n vlastních čísel včetně alg. násobností. Jestliže součet geom. násobností vl. čísel je n, pak v U existuje báze α složená z vlastních vektorů taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & 0 & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

V ní každé vl. čísla vystupuje tolikrát, kolik je jeho alg. = geom. násobnost.

Příklad $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Bx$

$\det(B - \lambda E) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Vl. čísla jsou

$\lambda_1 = 1$ vl. vektor $v_1 = (1, 1, 2)^T$

$\lambda_2 = 2$ vl. vektor $v_2 = (1, 0, 1)^T$

$\lambda_3 = 3$ vl. vektor $v_3 = (1, 2, 2)^T$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. sloupec je $(\varphi(v_1))_\alpha$

$\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

$(\varphi(v_1))_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi(p) = p'$

Hledáme vl. čísla

$$p = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \varphi(p) = 2a_2x + a_1$$

$$\varphi(p) = \lambda p$$

$$2a_2x + a_1 = \lambda a_2 x^2 + \lambda a_1 x + \lambda a_0$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$0 = \lambda a_2$$
$$2a_2 = \lambda a_1$$
$$a_1 = \lambda a_0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

netriviální řešení existuje pro λ takové, že

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 = 0$$

$$\lambda = 0$$

Jediné vl. číslo je $\lambda = 0$, alg. násobnosti 3, Dosazením $\lambda = 0$ do rovnic

$$0 = 0$$
$$2a_2 = 0$$
$$a_1 = 0$$

Vlastními vektory jsou pouze konstantní polynomy $p(x) = a_0 \neq 0$.

Matice φ v bázi $\varepsilon = (x^2, x, 1)$ je

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Alg. násobnost $= 3 > 1 =$ geom. násobnost

Předchozí větu nemůžeme použít.

<u>Podobnost matic</u> Matice A a B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice P taková, že

$$B = P^{-1} A P.$$

Ukázali jsme si, že podobné matice mají stejné char. polynomy. Proto mají i stejná vlastní čísla stejných alg. násobností. Navíc jejich vl. čísla mají i stejnou geom. násobnost.

<u>Odůvodnění:</u> Nechť $A = (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = Ax$

Hledáme bázi B v $\mathbb{R}^n$, aby $B = (\varphi)_{B,B}$. Musí platit

$$B = (\varphi)_{B,B} = (id)_{B,\mathcal{E}} (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} (id)_{\mathcal{E},B} = P^{-1} A P$$

Tedy báze B je popsána sloupci matice $(id)_{\mathcal{E},B} = P$.

Jestliže A i B jsou dvě matice téhož operátoru, jsou geometrické násobnosti vl. čísel měřeny tímto operátorem a tudíž jsou stejné!

ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ OPERÁTORY

Ortogonální operátory ze střední školy:

- otočení kolem počátku v rovině o daný úhel
- symetrie podle osy procházející počátkem v rovině
- otočení kolem osy procházející počátkem v prostoru
- symetrie podle roviny proch. počátkem v prostoru

Společná vlastnost – zachovávají délky a úhly.

Definice Nechť U je reálný vekt. prostor se skalárním součinem (eukleidovský vekt. prostor). Operátor $\varphi : U \to U$ se nazývá ortogonální, jestliže

$$\forall u, v \in U : \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Pozorování: Ortogonální operátor zachovává velikosti vektorů a úhly mezi vektory:

$$\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$$

$$\cos\left(\measuredangle\, \varphi(u), \varphi(v)\right) = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|\varphi(u)\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \cos\left(\measuredangle\, u, v\right)$$

Lemma Jestliže lin. operátor $\varphi : U \to U$ zachovává velikosti vektorů, pak je ortogonální.

Důkaz: V reálném vekt. prostoru platí

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\left(\langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\varphi(u+v)\|^2 - \|\varphi(u-v)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \langle u, v \rangle$$

Definice Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ se skal. součinem (unitární vekt. prostor). Operátor $\varphi : U \to U$ se nazývá UNITÁRNÍ, jestliže

$$\forall u, v \in U : \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů $\varphi : U \to U$

(1) $\|\varphi(u)\| = \|u\|$

(2) φ je prosté: jestliže $\varphi(u) = \vec{0}$, pak $\|u\| = \|\varphi(u)\| = \|\vec{0}\| = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$

(3) φ převádí ortonormální bázi na ortonormální bázi

$u_1, \dots, u_n$ $\qquad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

pak $\qquad \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

a $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$ je ortonormální báze.

Matice ortogonálního a unitárního operátoru v ortonormální bázi

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) s ortonormální bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\varphi : U \to U$ je unitární (nebo ortogonální)

(2) Pro matici $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$ platí

$$A^{-1} = \overline{A}^{T} \qquad \left(A^{-1} = A^{T} \text{ nad } \mathbb{R} \right)$$

Pruh nad A znamená konjugování v kompl. číslech. (kompl. sdružování)

$$\overline{\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ i & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{2+i} & \overline{3-i} \\ \overline{i} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & 3+i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$$

Podmínka (2) je ekvivalentní s tím, že

$$A \cdot \bar{A}^T = E \quad \text{resp.} \quad \bar{A}^T A = E.$$

(1) => (2)

Nechť φ je unitární. Platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = (\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha} = \left(A (u)_\alpha\right)^T \cdot \overline{A (v)_\alpha}$$

$$= \underline{(u)_\alpha^T \, \underline{A^T \bar{A}} \, \overline{(v)_\alpha}} = \langle u, v \rangle = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$= \underline{(u)_\alpha^T \underline{E} \, \overline{(v)_\alpha}}$$

Odkud $A^T \bar{A} = E$

$$\overline{A^T \bar{A}} = \bar{E} = E \Rightarrow \bar{A}^T \cdot \bar{\bar{A}} = E \Rightarrow \bar{A}^T A = E$$

Tím jsme dokázali (2).

(2) => (1) Potřebujeme dokázat:

$2\quad \bar{A}^T A = E$ plyne $A^T \bar{A} = E$ a dále

$$(u)_\alpha^T A^T \bar{A} \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \overline{(v)_\alpha}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle & & \langle u, v \rangle \end{array}$$