ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ OPERÁTORY

$\varphi : U \to U$

$$\forall u, v \in U \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

- ortogonální $\quad U$ je nad $\mathbb{R}$
- unitární $\quad U$ je nad $\mathbb{C}$

Příklady

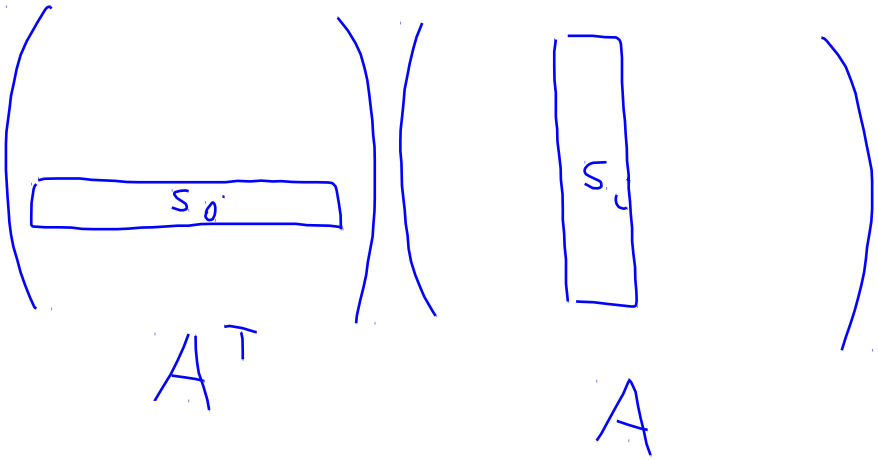
- geometrické
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

  kde A je ortogonální matice, tj $\quad A^{-1} = A^T$
- $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

  kde A je unitární matice, tj $\quad A^{-1} = \overline{A}^T$

Jak zjistit, zda je matice ortogonální nebo unitární

$$A^T A = E$$



$$a_{ji} = \langle s_j, s_i \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Sloupečky matice A jsou jednotkové vektory, které jsou na sebe navzájem kolmé

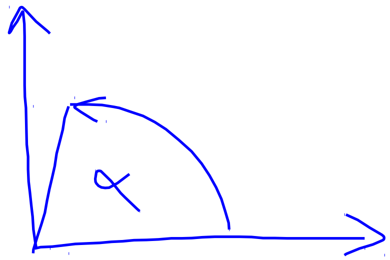
$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot 3/5 = 0$$

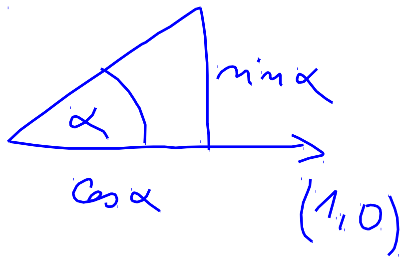
Důležitý příklad

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Tento operátor reprezentuje otočení o úhel α v $\mathbb{R}^2$



$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



Determinanty ortogonálních a unitárních matic

Ortogonální matice $\qquad A \cdot A^T = E$

$$\det(A \cdot A^T) = \det E$$

$$\det A \cdot \det A^T = 1$$

$$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$$

Unitární matice

$$A \cdot \bar{A}^T = E$$

$$\det(A \cdot \bar{A}^T) = \det E$$

$$\det A \cdot \det \bar{A}^T = 1$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1 \qquad \det A \in \mathbb{C}$$

$$|\det A|^2 = 1$$

$$|\det A| = 1$$

Determinant unitární matice je komplexní číslo s absolutní hodnotou 1.

Vlastní čísla a vlastní vektory unitárních a ortogonálních operátorů

Věta o vlastních číslech a vektorech

Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární nebo ortogonální operátor.

(1) Všechna vlastní čísla operátoru φ mají absolutní hodnotu rovnu 1. (Speciálně, je-li φ ortogonální jsou ± 1.)

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz: (1) Nechť $u \neq \vec{o}$ je vlastní vektor s vlastním číslem λ.

$$\underbrace{\langle u, u \rangle}_{\neq 0} = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle u, u \rangle = |\lambda|^2 \langle u, u \rangle$$

Odtud dostáváme $|\lambda| = 1$

(2) Nechť λ_1 je vlastní číslo k vl. vektoru u_1, λ_2 k vl. vektoru u_2.

$|\lambda_2| = 1$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(u_2) \rangle = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$= \lambda_1 \lambda_2^{-1} \langle u_1, u_2 \rangle$$

Odtud $\quad (1 - \lambda_1 \lambda_2^{-1}) \langle u_1, u_2 \rangle = 0$

Protože $\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2^{-1} \neq 1 \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

Základní věta o unitárních operátorech

Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární operátor. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory operátoru φ. V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla operátoru φ.

Důkaz indukcí podle $\dim U$.

Nechť $\dim U = 1$. Pak $\varphi(u) = \lambda_1 u$, kde $|\lambda_1| = 1$.

Vezmeme-li u jednotkové velikosti, máme tvar α.

Nechť tvrzení platí pro všechny unitární operátory na prostorech dimenze $n-1$.

Nechť $\dim U = n$ a $\varphi : U \to U$ je unitární.

Charakt. polynom operátoru φ má v $\mathbb{C}$ jistě nějaký kořen λ_1.

Ten je vlastním číslem a má nějaký vlastní vektor u_1, $\|u_1\| = 1$.

Nechť $V = [u_1]^{\perp}$. $\dim V = n-1$. Dokážeme, že V je invariantní vůči φ.

$v \in V$ a chceme ukázat, že $\varphi(v) \in V$.

$$0 = \langle v, u_1 \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(u_1) \rangle = \langle \varphi(v), \lambda_1 u_1 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \varphi(v), u_1 \rangle$$

Protože $\overline{\lambda_1} \neq 0$, je $\langle \varphi(v), u_1 \rangle = 0$ a proto $\varphi(v) \in V = [u_1]^\perp$.

Tedy můžeme definovat operátor

$$\tilde{\varphi} : V \longrightarrow V \qquad \tilde{\varphi}(v) = \varphi(v)$$

$\tilde{\varphi}$ je zřejmě unitární. Na $\tilde{\varphi}$ můžeme aplikovat indukční předpoklad. Proto ve V existuje ortonormální báze $(u_2, \dots, u_n)$ tvořená vlastními vektory operátoru $\tilde{\varphi}$. Tedy $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je ortonormální báze prostoru U tvořená vlastními vektory.

$$\varphi(u_i) = \lambda_i u_i = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_{i-1} + \lambda_i u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \dots + 0 \cdot u_n$$

Proto i-tý sloupec matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Invariantní podprostory ortogonálních operátorů

Pro jednoduchost uvažujme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$.

$\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ a φ můžeme rozšířit na operátor

$$\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \varphi^{\mathbb{C}}(x) = Ax. \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

Je-li φ ortogonální, tj. $A^{-1} = A^T$, je $\varphi^{\mathbb{C}}$ unitární, neboť

$$A^{-1} = A^T = \bar{A}^T.$$

Nechť

- $\varphi^{\mathbb{C}}$ má v $\mathbb{C}$ vlastní číslo $\lambda = a+ib$, kde $b \neq 0$.

$|a+ib| = 1$, proto $\quad a+ib = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \neq k\pi$.

Pak má $\varphi^{\mathbb{C}}$ rovněž vlastní číslo $\bar{\lambda} = a-ib$.

Jestliže
$$Ax = \lambda x$$
pak
$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$
$$\bar{A}\,\bar{x} = \bar{\lambda}\,\bar{x} \quad \Rightarrow \quad A\bar{x} = \bar{\lambda}\,\bar{x}.$$

Má-li $\lambda = a+ib$, $b \neq 0$, vlastní vektor $u = u_1 + iu_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$

pak $\bar\lambda = a - ib$, má vlastní vektor $\bar u = u_1 - iu_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$.

Tvrzení

(1) $\|u_1\| = \|u_2\|$, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

(2) Dvourozměrný podprostor $[u_1, u_2] \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní vůči φ.

Důkaz: Jestliže $b \neq 0$, pak $\lambda = a+ib \neq a - ib = \bar\lambda$.

Z věty o vlastních číslech a vektorech unitárního operátoru plyne, že vlastní vektory k λ a $\bar\lambda$ jsou na sebe kolmé.

$$0 = \langle u, \bar u \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u_1 + iu_2, u_1 - iu_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle iu_2, u_1 \rangle - \langle u_1, iu_2 \rangle$$

$$- \langle iu_2, iu_2 \rangle = \left(\langle u_1, u_1 \rangle - \langle u_2, u_2 \rangle \right) + i \langle u_2, u_1 \rangle + i \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$= \left(\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2 \right) + i\, 2 \langle u_1, u_2 \rangle$$

Platí $\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2 = 0$ a $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

(2) $$A(u_1 + iu_2) = (a+ib)(u_1 + iu_2)$$

$$\underbrace{Au_1}_{\text{reálná složka}} + i\,\underbrace{Au_2}_{\text{im. složka}} = \underbrace{au_1 - bu_2}_{\text{reálná složka}} + \underbrace{ibu_1 + iau_2}_{\text{im. složka}}$$

$$Au_1 = au_1 - bu_2$$

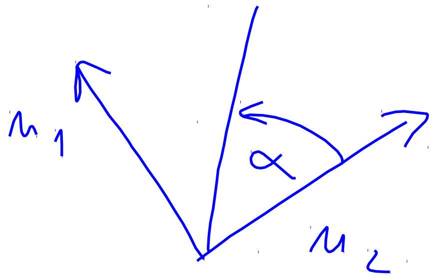
$$Au_2 = bu_1 + au_2$$

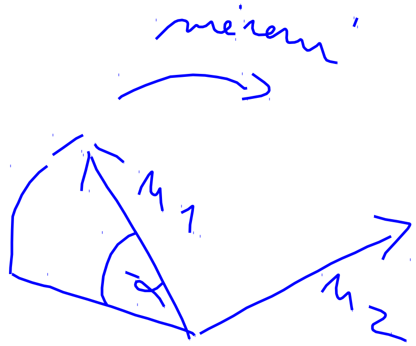
Tedy $[u_1, u_2]$ je invariantní podprostor operátoru φ.

V bázi $\gamma = (u_2, u_1)$ má φ matici

$$(\varphi)_{\gamma,\gamma} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Na dvourozměrném podprostoru $[u_1, u_2]$ působí operátor φ jako otočení o úhel α měřený od u_2 k u_1.





V bázi $B = (u_1, u_2)$ je

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

a φ je otočení o úhel $-\alpha$ měřený od u_1 k u_2.

Základní věta o ortogonálních operátorech

Nechť $\varphi : U \to U$ je ortogonální operátor. Pak je U direktním součtem navzájem kolmých invariantních podprostorů dimenze 1 a 2. V podprostorech dimenze 1 je φ identita nebo $-$identita, v podprostorech dimenze 2 je φ otočení.

Dk: Vlastní čísla 1 a -1 a jejich vlastní vektory zadávají podprostory dimenze 1. Vl. číslům $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\alpha \neq k\pi$ odpovídají podprostory dimenze 2. Dokážeme, že jsou na sebe kolmé!

λ vl. číslo $\qquad u = u_1 + i u_2$

μ jiné vl. číslo $\qquad v = v_1 + i v_2$

$\left.\begin{matrix} u = u_1 + i u_2 \\ v = v_1 + i v_2 \end{matrix}\right\}$ vl. vektory

$\lambda, \mu \notin \mathbb{R}$

$u_2 \neq \vec{0}$, $u_1 \neq \vec{0}$

$v_2 \neq \vec{0}$, $v_1 \neq \vec{0}$

14

Dokážeme, že $[u_1, u_2] \perp [v_1, v_2]$

Víme, že $u \perp v$ neboli $\lambda \neq \mu$

$u \perp \overline{v}$ neboli $\lambda \neq \overline{\mu}$

$$0 = \langle u_1 + i u_2, v_1 + i v_2 \rangle = \underbrace{\left(\langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle\right)}_{= 0} + i \underbrace{\left(\langle u_2, v_1 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle\right)}_{= 0}$$

$$0 = \langle u_1 + i u_2, v_1 - i v_2 \rangle = \underbrace{\left(\langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle\right)}_{= 0} + i \underbrace{\left(\langle u_2, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle\right)}_{= 0}$$

Z těchto rovnic plyne, že

$$\langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle = 0$$
$$\langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle = 0 \quad \Longrightarrow [u_1, u_2] \perp [v_1, v_2]$$

Aplikace v dimenzi 2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(X) = AX$

A ortogonální matice 2×2

Její char. polynom má buď reálná vlastní čísla

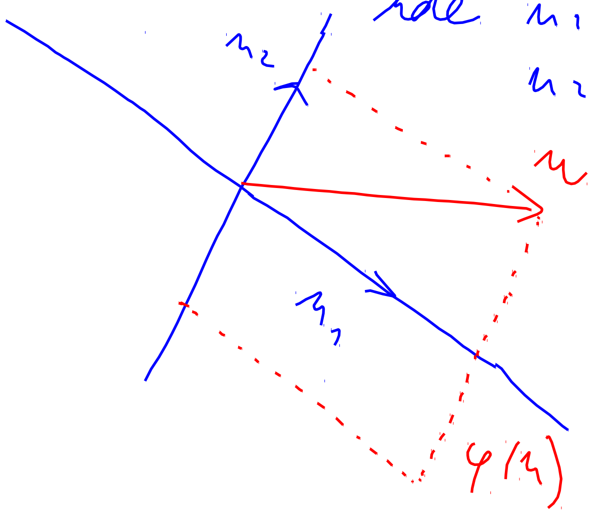
(a) $1, 1$ $\quad A = E \quad \det A = 1$

otočení o 0 stupňů

(b) $1, -1$ $\quad \mathbb{R}^2 = [u_1] \oplus [u_2] \quad \det A = -1$

kde u_1 je vl. vektor k 1

u_2 je vl. vektor k -1 $\quad u_1 \perp u_2$



φ je symetrie podle přímky $[u_1]$

(c) $-1, -1$ $\quad \varphi(x) = -x$ a φ je symetrie podle počátku.
otočení o π

φ má vlastní čísla $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\alpha \neq k\pi$.
Potom je φ otočení o úhel α měřený proti směru hodinových ručiček.

$$\det A = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1$$

Ortogonální operátory v dimenzi 3

Každý ortogonální operátor v dimenzi 3 má aspoň jedno vlastní číslo rovno ± 1 (Char. polynom stupně 3 má reálný kořen.) Proto lze v $\mathbb{R}^3$ vždy najít bázi α takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je ortonormální

V $[u_1]$ je φ identita nebo − identita.

Rovina $[u_2, u_3]$ je kolmá na přímku $[u_1]$ a v této rovině je φ otočení o úhel α od u_2 k u_3.

(1) $\varphi / [u_1] = id$, pak φ je otočení kolem přímky $[u_1]$ o úhel α měřený od u_2 k u_3.

(2) $\varphi / [u_1] = -id$, pak φ je složení symetrie podle roviny $[u_2, u_3]$ a otočení o úhel α kolem přímky $[u_1]$ měřený od u_2 k u_3.