# Příklady na ortogonální matice

① Zjistěte, jaké geometrické zobrazení popisuje lin. operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: A je ortogonální matice, proto $\varphi$ bude buď otočení kolem nějaké osy o úhel $\alpha$ nebo složení takového otočení se symetrií podle roviny kolmé k ose.

2

Ke zjištění osy otáčení a úhlu spočítáme vl. čísla.

Char. polynom

$$\det(A-\lambda E) = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} =$$

dá to práci a hrozí nebezpečí chyby!

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$$

Už v tomto okamžiku z teorie víme, že $\varphi$ je otáčení o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem osy určené vlastním vektorem k 1. Potřebujeme tedy spočítat vl. vektor k 1 a zjistit směr otáčení o úhel $\frac{\pi}{3}$.

Vl. vektor k 1 je $u_1 = v_1 = (1,1,1)$ ... to je osa otáčení.

Vl. vektor k $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ je

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = v_2 + i v_3$$

Vl. vektor k $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ je

$$\overline{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = v_2 - i v_3$$

Směr otáčení je buď od $v_2$ k $v_3$ nebo od $v_3$ k $v_2$.

$$A(v_2 + i v_3) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)(v_2 + i v_3)$$

$$A v_2 = \cos\frac{\pi}{3} v_2 - \sin\frac{\pi}{3} v_3$$

$$A v_3 = \sin\frac{\pi}{3} v_2 + \cos\frac{\pi}{3} v_3$$

4

Jde tedy o otáčení od $v_3$ k $v_2$, neboli matice v bázi $(v_3, v_2)$ je

$$\left(\varphi/[v_2, v_3]\right)_{(v_3, v_2)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

To je otáčení od 1. vektoru k 2. vektoru báze

V bázi $(v_2, v_3)$

$$\left(\varphi/[v_2, v_3]\right)_{(v_2, v_3)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

5

Zadání: Jde o otáčení o úhel $\frac{\pi}{3}$ od $v_3$ k $v_2$ kolem osy $(1,1,1)$.

Poznámka: Známe-li osu otáčení lze úhel a směr zjistit tak, že vezmeme nějaký vektor $v \perp$ vlastní vektor k 1, v našem případě $v \perp (1,1,1)$, a spočítáme $\varphi(v)$. Potom úhel otáčení $\alpha$ dostaneme jako odchylku $v$ a $\varphi(v)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|}$$

a otáčení je ve směru od $v$ ke $\varphi(v)$.

V původním řešení uvažujeme navíc ortonormální bázi

$$\alpha = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right), \text{ v níž } (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

2 Nechť $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem $x_1 = x_2,\ x_3 = 0$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ má všechny složky kladné. Najděte matici $A$ tak, aby v souřadnicích stand. báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Jeden způsob řešení spočívá v tom, že nejprve najdeme matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ ve vhodné ortonormální bázi a pak spočítáme

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

Nalezení vhodné ortonormální báze:

1. vektor nechť určuje osu otáčení

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \varphi(v_1) = v_1$$

K němu najdeme dva kolmé vektory

7

$$v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \langle v_1, v_2\rangle = 0, \quad \|v_2\| = 1$$

$$v_3 = (0, 0, 1) \qquad \langle v_3, v_1\rangle = 0, \quad \langle v_3, v_2\rangle = 0$$

$$v_3 = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \implies x_1 = x_2 = 0$$

$$\varphi(v_3) = -v_2$$

$$\varphi(v_2) = v_3$$

$$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Spočítáme $A$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \underbrace{(id)_{\varepsilon,\alpha}}_{= P} (\varphi)_{\alpha,\alpha} \underbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon}}_{= P^{-1} = P^T}$$

Matici $P$ umíme jednoduše najít ze zadání báze $\alpha$:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je vždy ortogonální, tedy

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = P^{-1} = P^T$$

Vynásobením tří matic dostaneme

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

9

Jiný postup řešení: $A = \left( \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \right)$

Najdeme obrazy $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ a $\varphi(e_3)$ pomocí geometrických úvah.

(10)

# SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

Nechť $U$ a $V$ jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$. Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární zobrazení.

Lineární zobrazení $\varphi^*: V \to U$ nazveme adjungované k zobrazení $\varphi$, jestliže platí

$$\forall u \in U, \forall v \in V: \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

Příklad: $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^k$, $\varphi(x) = Ax$, kde $A$ je matice $k \times n$. Potom $\varphi^*: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\varphi^*(y) = A^T y$ splňuje výše uvedenou vlastnost:

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^k$

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T \cdot y$$

$$\langle x, \varphi^* y \rangle = \langle x, A^T y \rangle = x^T \cdot A^T y = \langle \varphi(x), y \rangle.$$

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^k, \quad \varphi(x) = Ax, \quad \varphi^*(y) = \overline{A}^T y$

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y}$$

$$\langle x, \varphi^*(y) \rangle = \langle x, \overline{A}^T y \rangle = x^T \overline{(\overline{A}^T y)} = x^T A^T \overline{y} = \langle \varphi(x), y \rangle$$

**Věta:** Nechť $\alpha$ je ortonormální báze v $U$, $\beta$ je ortonormální báze ve $V$, $\varphi: U \to V$ a $\varphi^*: V \to U$ existuje. Pak platí

$$(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{(\varphi)_{\beta,\alpha}}^{T}$$

**Důkaz:** Nechť $(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$ a $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = B$. Pak platí

$$\langle \varphi(u), v \rangle_V = (\varphi(u))_\beta^T \cdot \overline{(v)_\beta} = (A(u)_\alpha)^T \cdot \overline{(v)_\beta} = \underline{(u)_\alpha^T A^T \overline{(v)_\beta}}$$

$$\langle u, \varphi^*(v) \rangle_U = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi^*(v))_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{B(v)_\beta} = \underline{(u)_\alpha^T \overline{B}\, \overline{(v)_\beta}}$$

Odtud máme $A^T = \overline{B}$, neboli $B = \overline{A}^T$.

**Důsledek** Ke každému $\varphi: U \to V$ existuje právě jedno adjungované zobrazení.

# Definice samoadjungovaného operátoru

Nechť $U$ je vekt. prostor se skalárním součinem.

Operátor $\varphi : U \to U$ se nazývá samoadjungovaný, jestliže $\varphi = \varphi^*$, tj. platí

$$(\forall u, v \in U) \quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Příklady: 1) $U = \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^*(y) = A^T y$.

$\varphi = \varphi^*$ znamená, že $A = A^T$

Tedy všechny samoadjungované operátory na $\mathbb{R}^n$ jsou dány symetrickými reálnými maticemi $n \times n$.

2) $U = \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^*(y) = \bar{A}^T y$. $\varphi = \varphi^*$ znamená, že $A = \bar{A}^T$.

Komplexní matice s vlastností $A = \bar{A}^T$ nazýváme hermitovské.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & 2-i \\ -i & 4 & 3+4i \\ 2+i & 3-4i & -8 \end{pmatrix}$$ je hermitovská

3) $\varphi : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Pak $\varphi$ je samoadjungovaný operátor.

Nechť $u = u_1 + u_2$ $\quad u_1 \in V,\ u_2 \in V^\perp$

$v = v_1 + v_2$ $\quad v_1 \in V,\ v_2 \in V^\perp$

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u_1, v \rangle = \langle u_1, v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle$$

$$\langle u, \varphi(v) \rangle = \langle u_1 + u_2, v_1 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle$$

15

# Vlastní čísla a vlastní vektory samoadj. operátorů

1. Každé vlastní číslo samoadj. operátoru je reálné (i když jsme v kompl. vekt. prostoru).

2. Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

**Důkaz:** 1. Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$

$$\lambda \langle u, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda}\,\underbrace{\langle u, u\rangle}_{\neq 0}$$

Odtud $\lambda = \bar{\lambda}$, a tedy je $\lambda$ reálné.

16

2) Nechť $\lambda_1, \lambda_2$ jsou dvě různá vl. čísla. Už víme, že jsou reálná. Nechť $u_1, u_2$ jsou odpovídající vlastní vektory. Platí

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \langle \varphi(u_1), u_2\rangle = \langle u_1, \varphi(u_2)\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle u_1, u_2\rangle$$

$$(\lambda_1 - \overline{\lambda_2})\langle u_1, u_2\rangle = 0$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle u_1, u_2\rangle = 0 \quad \text{neboť } \overline{\lambda_2} = \lambda_2$$

Tedy $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

**Věta:** Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Potom v $U$ existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ tvořená vlastními vektory, v této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

Důkaz: Indukcí podle dimenze $U$. Pro $\dim U = 1$, je

$$\varphi(u) = a u,$$

kde $a \in \mathbb{C}$. Protože je vždy $a$ vlastní číslo a $\varphi$ je samo-adjungovaný je $a \in \mathbb{R}$. Matice $\varphi$ v ort. bázi je

$$(a) = (\lambda_1).$$

Nechť věta platí v prostorech dimenze $n-1 \geq 1$.
Nechť nyní $\dim U = n$, $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný.
$\varphi : U \to U$ má char. polynom, který má nějaké kořen v $\mathbb{C}$.
Ale tento kořen je vlastní číslo a to musí být reálné.
Tedy $\varphi$ má nějaké reálné vl. číslo $\lambda_1$ s vlastním vektorem $u_1 \in U$.

Vezmeme $V = [u_1]^\perp$, ukážeme, že $\varphi(V) \subseteq V$.

Stačí dokázat, že pro $v \in V$ je $\varphi(v) \in V$, tj. $\varphi(v) \perp u_1$.

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = \underset{\text{reálné}}{\overline{\lambda_1}} \langle v, u_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\langle v, u_1 \rangle}_{=0} = 0 \quad \text{neboť } v \perp u_1.$$

$\varphi|V : V \longrightarrow V$ je samoadjungovaný, podle ind. předpokladu existuje ve $V$ ort. báze $u_2, u_3, \dots u_n$ tvořená vlastními vektory. Tedy $u_1, u_2, \dots u_n$ je ortonormální báze v $U$ tvořená vlastními vektory.

**Důsledek** = věta o spektrálním rozkladu samoadj. operátorů

Každý samoadjungovaný operátor je lineární kombinací kolmých projekcí do vlastních podprostorů.

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$$

kde $\lambda_i$ jsou vlastní čísla (reálná) a $P_i$ jsou kolmé projekce do vlastních podprostorů $\ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{Id})$.

Důkaz: Podle předchozí věty máme v $U$ bázi tvořenou vl. vektory. Vlastní vektory příslušné vl. číslu $\lambda_i$ generují vlastní podprostor. $\lambda_i$ přísluší $u_i$

$$\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$(\lambda_1 P_1 + \dots \lambda_i P_i + \dots + \lambda_k P_k)(u_i) = \lambda_1 \underbrace{P_1 u_i}_{0} + \dots \lambda_i \underbrace{P_i u_i}_{u_i} + \dots = \lambda_i u_i$$

Operátory $\varphi$ a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ se rovnají na vektorech báze, tedy jsou si rovny.