APLIKACE JKT PRO SOUSTAVY LIN. DIF. ROVNIC

Uvažujme soustavu lin. dif. rovnic s neznámými funkcemi

$$x_1, x_2, \dots x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \quad x' = Ax$$

kde A je konstantní matice

$x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned} \qquad x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

②

Pro matici A typu 1×1 umíme rovnici vyřešit

$$x' = a x$$
$$x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{at} x_0$$

V případě soustavy můžeme rovněž definovat e^A.

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots\dots$$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots\dots \qquad \in Mat_{n \times n}$$

Taková řada konverguje vždy.

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots\dots$$

Řada pro e^{At} konverguje stejnoměrně, proto ji můžeme derivovat člen po členu:

$$\left(e^{At}\right)' = (E)' + (At)' + \frac{\left(A^2t^2\right)'}{2} + \dots$$

$$= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2} + \frac{A^4t^3}{3!} + \dots$$

$$= A\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots\right) = A \cdot e^{At}$$

Vidíme, že $e^{At} : \mathbb{R} \longrightarrow Mat_{n\times n}$ je řešení maticové dif. rovnice

$$X' = AX \qquad X \text{ matice } n\times n$$

Řešení úlohy

$$x' = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

je potom $x(t) = e^{At} x_0$

S využitím JKT matice A lze řešení dostat pomocí konečné řady.

Nechť $J = P^{-1} A P \iff A = PJP^{-1}$

Nechť y je řešení soustavy

$$y' = Jy$$

Potom $x = Py$ je řešení soustavy

$$x' = Ax,$$

neboť

$$x' = (Py)' = Py' = PJy = PJP^{-1}x = Ax.$$

Spočítáme e^{Jt}

Matice J má tvar $J = D + (J-D)$, kde D je diagonální a $J-D$ je striktně horní trojúhelníková.

Příklad

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_1 & & & \\
\hline
 & & & & \lambda_2 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & \lambda_2 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & \lambda_2
\end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & \\
 & \lambda_1 & & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & \\
 & & & & \lambda_2 & & \\
 & & & & & \lambda_2 & \\
 & & & & & & \lambda_2
\end{pmatrix}
\qquad
J - D = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & \\
 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 1 & \\
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = e^{Dt + (J-D)t} = e^{Dt} \cdot e^{(J-D)t}$$

$$e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B} \quad \text{pro} \quad AB = BA$$

V našem příkladu je

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & & & 0 & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & & & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & 0 & & & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & & & & e^{\lambda_2 t} & \\ & & & & & & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$(J-D)^3 = 0$$

Proto řada pro $e^{(J-D)t}$ je konečná. V našem případě má členy pouze do stupně t^2.

$$e^{Jt} = e^{Dt} \cdot e^{(J-D)t} = e^{Dt}\left(E + (J-D)t + \frac{(J-D)t^2}{2}\right)$$

Řada pro $e^{(J-D)t}$ je vždy konečná. Je-li dimenze největší buňky k, pak nejvyšší mocnina t je t^{k}.

DŮKAZ VĚTY O JKT

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Předpokládejme, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel je roven dimenzi U. Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je matice v JKT. Tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Důkaz najdete: IS 2015

skripta Slovák (IS)

Bak. práce Ivana Bachurová: LA pro pokročilé

1. kapitola

Nejdříve několik pojmů

Nilpotentní operátor $\varphi : V \to V$ je takový operátor, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \times} = 0 .$$

Kořenový podprostor operátoru φ pro vlastní číslo λ

Vlastní podprostor operátoru φ pro vlastní číslo λ je

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\, id)$$

Kořenový podprostor R_λ (root) $\qquad \varphi : U \to U$, λ vl. číslo

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (\varphi - \lambda\, id)^k u = 0 \}$$

Jednoduché pozorování

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\, id) \subseteq R_\lambda$$

Příklad: Mějme $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ $\quad \varphi(x) = Jx$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = J \qquad \varphi(e_1) = \lambda_1$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)e_1 = 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)e_2 = e_1$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)^2 e_2 = 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)e_3 = e_2$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)^3 e_3 = 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)e_4 = 0$$

$$R_{\lambda_1} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$$

$$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7]$$

$$\mathbb{R}^7 = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2}$$

$\dim R_{\lambda_1} =$ alg. nás. λ_1

$\dim R_{\lambda_2} =$ alg. nás. λ_2

Vlastnosti kořenových podprostorů

$\varphi : U \to U$ s vl. číslem λ

1. R_λ je vekt. podprostor
2. R_λ je invariantní vůči všem $\psi : U \to U$, které komutují s φ. Speciálně R_λ je invariantní vůči $\varphi - \mu\, id$.
3. Je-li $\mu \neq \lambda$, pak $(\varphi - \mu\, id)/_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je invertibilní.
4. $(\varphi - \lambda\, id)/_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je nilpotentní.

Poznámky k důkazům:

4. Je-li $R_\lambda = [u_1, u_2, \dots u_s]$ a $(\varphi - \lambda\, id)^{k_i} u_i = 0$, vezmeme $k = \max k_i$ a bude platit $(\varphi - \lambda\, id)^k = 0$.

2 Z 4 víme, že $R_\lambda = \ker(\varphi - \lambda id)^k$

a platí: Jestliže $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak $\ker \varphi$ je invariantní vůči ψ. $u \in \ker \varphi$

$$\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) = \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(u) \in \ker \varphi.$$

3 Nechť $u \in \ker(\varphi - \mu id)$ a nechť k je nejmenší číslo $u \in R_\lambda$

s vlastností $(\varphi - \lambda id)^k u = 0$.

Potom $0 = (\varphi - \lambda id)^k u = (\varphi - \lambda id)^{k-1} (\varphi - \lambda id) u$ $\quad (\varphi(u) = \mu u)$

$= (\varphi - \lambda id)^{k-1} (\mu - \lambda) u \Rightarrow (\varphi - \lambda id)^{k-1} u = 0,$

Spor s volbou k.

Důkaz věty o JKT má dva základní kroky

I. krok <u>Věta</u>

Nechť $\lambda_1 \dots \lambda_k$ jsou všechna navzájem různá vl. čísla operátoru $\varphi: U \to U$ a nechť součet jejich alg. násobností je $\dim U$. Potom

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus R_{\lambda_3} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

a $\dim R_{\lambda_i} =$ alg. násobnost λ_i.

Součet více podprostorů $U_1 + U_2 + \dots + U_k = U$ je direktní, jestliže platí $\forall u_i \in U_i \quad u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \implies u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$

(Odtud plyne $\forall u \in U \; \exists!\, u_i \in U_i$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = u \Big)$$

Důkaz: Součet je direktní: Indukcí podle k.

Nechť $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní.

Nechť $u_i \in R_{\lambda_i}$ a $u_1 + u_2 + \dots + u_k = \vec{o}$.

$R_{\lambda_k} = \operatorname{Ker} (\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^s$, pak aplikujeme na rovnici $(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^s$

$$\underbrace{(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^s u_1}_{v_1 \in R_{\lambda_1}} + \dots\dots + \underbrace{(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^s u_{k-1}}_{v_{k-1} \in R_{\lambda_{k-1}}} + \vec{o} = \vec{o}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1} = \vec{o}$$

z předpokladu $\quad v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = o$.

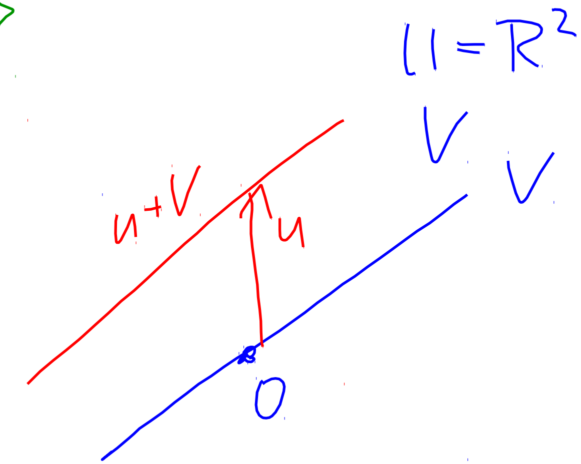
$(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^s$ je izo na $R_{\lambda_1}, \dots R_{\lambda_{k-1}}$. $\Rightarrow u_1 = \dots = u_{k-1} = \vec{o}$

Odtud $u_k = \vec{0}$. Tedy součet $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k}$ je direktní.

2. krok důkazu $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k} = U$.

K tomuto kroku potřebujeme pojem kvocientu vekt. prostoru.
U vekt. prostor, V jeho podprostor, definujeme

$$U/V = \{ u + V \subseteq U \; ; \; u \in V \}$$



Sčítání na U/V

$$(u+V) + (w+V) = (u+w) + U$$

Násobení

$$a(u+V) = au + V$$

Pak je U/V vekt. prostor.

$\varphi : U \to U$ lin. operátor s inv. podprostorem V $\quad \varphi(V) \subseteq V$.

Pak existuje právě jeden lin. operátor $\tilde{\varphi} : U/V \to U/V$

$$\tilde{\varphi}(u+V) = \varphi(u) + V$$

Pomocí těchto dvou pojmů lze dokázat

<u>Lemma</u>: Nechť $\varphi : U \to U$ má vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, $n = \dim U$

Pak existuje v U báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důkaz indukcí podle dim n s triviálním krokem.

Ind. krok: Nechť platí pro φ na prostorech dim $n-1$.

$\dim U = n$, $\varphi : U \to U$ má vl. číslo λ_1 s vlastním vektorem v_1

Vezmeme $\tilde{\varphi} : U/[v_1] \to U/[v_1]$

$\dim U/[v_1] = n-1$. Aplikujeme ind. předpoklad:

V $U/[v_1]$ existuje báze $\tilde{\alpha} = (u_2+[v_1], u_3+[v_1], \dots u_n+[v_1])$

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \lambda_3 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vezmeme $\alpha = (v_1, u_2, \dots u_n)$, v této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hline & \lambda_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{array}\right)$$

Vrátíme se k důkazu věty:

Podle lemmatu existuje báze α, v níž

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & * & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

λ_1 se na diagonále vyskytuje n_1 krát.

$n_1 =$ alg. nás. λ_1. Platí, že

$$R_{\lambda_1} = [u_1, u_2, \dots, u_{n_1}] \qquad \dim R_{\lambda_1} = n_1 ,$$

kde u_i jsou vektory z báze α.

Odtud plyne

$$\dim(R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim R_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Tedy $R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U$.

II. krok důkazu

spočívá v tom, že rozložíme na vhodný dir. součet kořenové podprostory.

$\varphi - \lambda \mathrm{id}$ je nilpotentní operátor na R_λ.

Speciální nilpotentní operátor $\psi: V \to V$ je tzv. cyklický operátor:

$\psi: V \to V$ je cyklický jestliže ve V existuje báze $\alpha = (v_1, v_2, \dots v_s)$ taková, že

$$\psi(v_1) = 0, \quad \psi(v_2) = v_1, \quad \psi(v_3) = v_2, \quad \dots \quad \psi(v_s) = v_{s-1}$$

v této bázi

$$(\psi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_s(0)$$

<u>Věta</u> Nechť $\varphi : U \to U$ je nilpotentní operátor. Pak lze U rozložit na direktní součet invariantních podprostorů

$$U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_l$$

takových, že $\varphi|V_i : V_i \to V_i$ je cyklický.

Důkaz: φ je stupeň nilpotentnosti $\varphi^k = 0$, $\varphi^{k-1} \neq 0$.

$P_i = \operatorname{im} \varphi^i$

$\{0\} = P_k \subsetneq P_{k-1} \subsetneq P_{k-2} \qquad P_1 \subsetneq P_0 = U$

Kdyby $P_i = P_{i-1}$ pak by $P_{i+1} = P_i$ a nestupně bychom dostali $P_k \neq \{0\}$.

$e_1^{k-1}, \dots e_{p_{k-1}}^{k-1}$ je báze P_{k-1}

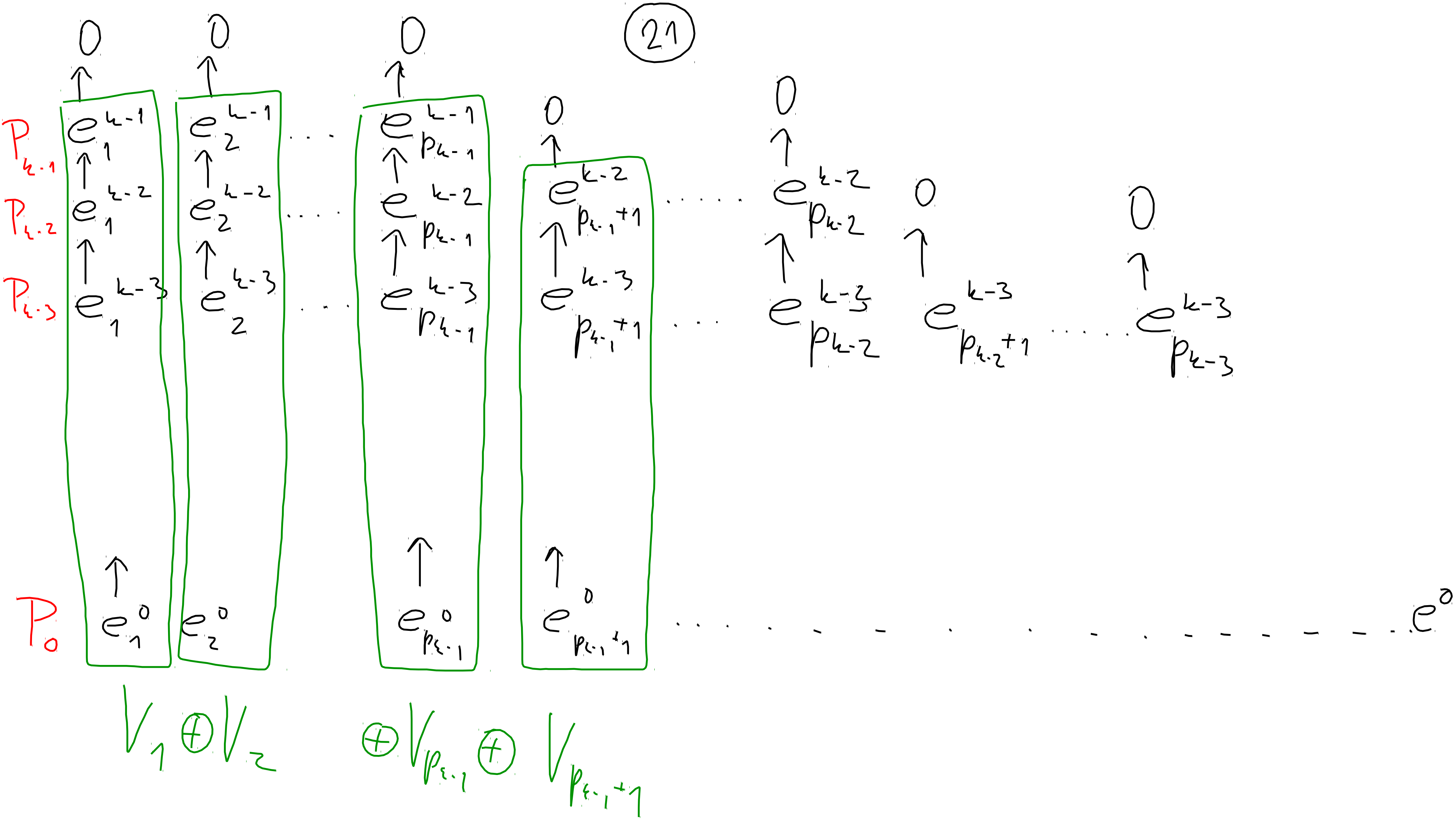
$P_{k-1} = \varphi(P_{k-2})$ Proto existují $e_1^{k-2}, \dots e_{p_{k-1}}^{k-2} \in P_{k-2}$ které se zobrazí do $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$

$$\varphi(e_j^{k-2}) = e_j^{k-1}$$

Dokážeme, že vektory $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, \dots e_{p_{k-1}}^{k-2}$ jsou LN

Doplníme na bázi celého P_{k-2} vektory

$$\bar{e}_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, \bar{e}_{p_{k-2}}^{k-2}$$


P_{k-1}
P_{k-2}
P_{k-3}
P_0
$V_1 \oplus V_2 \quad \oplus V_{p_{k-1}} \oplus V_{p_{k-1}+1}$

Zobrazení φ zobrazí doplněné vektory na lin. kombinace $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$

$$\varphi(\bar{e}_j^{k-2}) = \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_i e_i^{k-1}$$

Nyní položíme

$$e_j^{k-2} = \bar{e}_j^{k-2} - \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_i e_i^{k-2}$$

Potom

$$\varphi(e_j^{k-2}) = \varphi(\bar{e}_j^{k-2}) - \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_i e_i^{k-1} = 0$$

Tímto způsobem pokračujeme dále a dostaneme tabulku na str. 21

Podprostory V_i jsou invariantní a $\varphi|V_i : V_i \to V_i$ je cyklický operátor.

počet V_i s dim k $=$ dim P_{k-1}

počet V_i s dim $k-1$ $=$ dim $P_{k-2} - 2$ dim P_{k-1}

počet V_i s dim $k-2$ $=$ dim $P_{k-3} - 2$ dim $P_{k-2} +$ dim P_{k-1}

Dokončíme důkaz Jordanovy věty

Nyní $U = R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$

Podle II. kroku aplikujeme na nilpotentní operátor

$$\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id}|R_{\lambda_i} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$$

Zvolíme bázi R_{λ_i} takovou, že

$$(\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id})_{\alpha,\alpha} = \bigoplus_{j=1}^{\text{nějak}} J_j(0) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(\varphi | R_{\lambda_i})_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{matrix} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$$

Dáme-li všechny báze R_{λ_i} dohromady, dostaneme bázi, v níž má φ matici v JKT.